

Herramienta computacional en Python para cálculos de relatividad general Computational tool in Python for general relativity calculations

E.Y. Castillo-Castillo ^a, L. Palacios-Razo ^{a,*}, C.A. Soto-Campos ^a

^aÁrea Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Pachuca, Hidalgo, México.

Resumen

Este trabajo presenta y valida varias métricas que son soluciones de las ecuaciones de Einstein, utilizando cómputo simbólico en Python. Con el uso de SymPy, se calculan estructuras clave de la geometría diferencial, como símbolos de Christoffel, tensores de Riemann y Ricci, los escalares de curvatura y Kretschmann, el tensor de Einstein y ecuaciones geodésicas, esenciales en relatividad general. Este enfoque sobresale por su simplicidad y transparencia, en contraste con herramientas como Mathematica, Maple o EinsteinPy, donde las funciones predefinidas operan como entidades cerradas, a menudo ocultando su funcionamiento interno. Aquí, GRDidactic permite a los usuarios ver y entender cada paso del proceso, garantizando una comprensión completa de los cálculos y facilitando el aprendizaje de este campo. A través de ejemplos como las métricas de Schwarzschild, Kerr, Reissner-Nordström, Bardeen y Alcubierre, se demuestra la precisión y fiabilidad del código, facilitando la validación teórica en relatividad general y manteniendo un control total sobre las operaciones matemáticas.

Palabras Clave: Relatividad general, cómputo simbólico, Python, geometría diferencial.

Abstract

This work presents and validates several metrics which are solutions to Einstein's equations, using symbolic computation in Python. Using SymPy, key structures in differential geometry are calculated, such as Christoffel symbols, Riemann and Ricci tensors, curvature and Kretschmann scalars, the Einstein tensor, and geodesic equations, essential in general relativity. This approach stands out for its simplicity and transparency, unlike tools like Mathematica, Maple or EinsteinPy, where predefined functions operate as enclosed entities, often concealing their internal workings. Here, GRDidactic will enable users to see and understand each process step, ensuring a complete understanding of the calculations and facilitating the learning of this field. Through examples like the Schwarzschild, Kerr, Reissner-Nordström, Bardeen and Alcubierre metrics, the code's precision and reliability are demonstrated, facilitating theoretical validation in general relativity while maintaining full control over the mathematical operations.

Keywords: General relativity, symbolic computation, Python, differential geometry.

1. Introducción

La relatividad general, formulada por Albert Einstein en 1915, redefine la gravedad como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, en lugar de una fuerza convencional. Esta comprensión ha permitido el desarrollo de diversas soluciones matemáticas conocidas como métricas, que modelan fenómenos gravitacionales bajo distintas condiciones. Entre las soluciones más destacadas se encuentran las métricas de Schwarzschild, Kerr, Reissner-Nordström, Bardeen y Alcubierre, cada una aplicable a diferentes escenarios físicos. Estas soluciones fueron seleccionadas por su relevancia en la relatividad gene-

ral y por ser casos representativos ampliamente utilizados en la literatura científica. La métrica de Schwarzschild describe el espacio-tiempo en torno a un cuerpo esférico no cargado; la métrica de Reissner-Nordström incorpora la carga en el contexto de un agujero negro esférico; y la métrica de Kerr amplía este análisis a cuerpos en rotación (Thorne *et al.*, 2000). La métrica de Bardeen, siendo un ejemplo de un agujero negro regular, propone una posible solución a las singularidades (Ayon-Beato y Garcia, 1998). Por otro lado, la métrica de Alcubierre es fundamental en estudios teóricos sobre el viaje superlumínico (Alcubierre, 1994).

* Autor para correspondencia: pa375077@uaeh.edu.mx

Correo electrónico: ca377005@uaeh.edu.mx (Esmeralda Yatzel Castillo-Castillo), pa375077@uaeh.edu.mx (Luis Palacios-Razo), csoto@uaeh.edu.mx (Carlos Arturo Soto-Campos).

Historial del manuscrito: recibido el 23/08/2024, última versión-revisada recibida el 22/10/2024, aceptado el 06/11/2024, publicado el 26/04/2025. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v13iEspecial.13553>



Derivar y validar manualmente elementos de geometría diferencial para estas métricas es un proceso extremadamente tedioso y propenso a errores humanos. Para superar estas dificultades, la computación simbólica ha emergido como una herramienta esencial en la física teórica. A diferencia de los métodos numéricos, que se basan en aproximaciones y soluciones discretas, la computación simbólica permite manipular expresiones matemáticas en su forma exacta, facilitando tanto la obtención de soluciones analíticas como la exploración detallada de sus propiedades. Un sistema de cálculo simbólico es un entorno computacional que realiza operaciones algebraicas y analíticas directamente sobre las expresiones matemáticas, sin necesidad de convertirlas en valores numéricos. Esto es fundamental para el análisis de ecuaciones tensoriales y la manipulación de objetos matemáticos complejos (Winkler, 2024). El proceso comienza con la introducción de una expresión matemática o instrucción, que el sistema de cálculo simbólico ejecuta para generar un resultado. A partir de este resultado, el usuario puede introducir nuevas instrucciones, lo que lleva a una sesión de cálculo iterativa y productiva. Su principal ventaja radica en la capacidad para manejar cálculos algebraicos de gran tamaño. Aunque muchas manipulaciones simples se pueden realizar manualmente, las fórmulas más complejas aumentan la dificultad y reducen las probabilidades de éxito; por lo tanto, en estos casos, un sistema de cálculo simbólico es una herramienta invaluable (Heck y Koepf, 1993).

Tradicionalmente, este tipo de análisis ha requerido el uso de herramientas computacionales avanzadas como Mathematica o Maple, las cuales, aunque poderosas, presentan barreras en términos de accesibilidad y transparencia. En este contexto, SymPy, un paquete de Python para cálculos simbólicos, se ha posicionado como una alternativa accesible y flexible, permitiendo a estudiantes e investigadores realizar estos cálculos sin la necesidad de software propietario costoso.

En este trabajo, presentamos y validamos un código desarrollado con SymPy que facilita la obtención de estructuras básicas de geometría diferencial. A diferencia de otras bibliotecas populares de Python como Sagemath, OGREPy, EinsteinPy o GraviPy, donde las funciones están predefinidas y operan como entidades cerradas, nuestro enfoque permite al usuario seguir y comprender cada paso del proceso de cálculo. En estas otras librerías, no es posible visualizar las operaciones subyacentes que conducen al resultado final, lo que limita el entendimiento profundo del proceso de cálculo. En cambio, GRDidactic ofrece una total transparencia, permitiendo al usuario verificar cada cálculo individualmente. Esta característica lo hace especialmente útil tanto para investigadores que buscan un mayor control sobre sus cálculos como para estudiantes que desean aprender los fundamentos de la relatividad general.

GRDidactic tiene el potencial de facilitar el acceso a herramientas avanzadas en física teórica, brindando a una audiencia más amplia la oportunidad de participar en el análisis y comprensión de la relatividad general a través de un entorno de desarrollo ampliamente utilizado como es Python. Además, proponemos que el enfoque aquí descrito puede servir como base para futuras investigaciones y aplicaciones educativas en cursos de relatividad general y física teórica.

2. Fundamentos teóricos

En las siguientes ecuaciones, se asume la convención de suma de Einstein, es decir, la presencia de un índice repetido implica que se suma ese término sobre todos los valores del índice, que varían de 0 a 3. Aquí, el índice 0 corresponde a la coordenada temporal, mientras que los índices 1, 2 y 3 se asocian con las coordenadas espaciales.

En la formulación tradicional de la teoría de relatividad general, el espacio tiempo está descrito completamente por el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, en términos del cual, el elemento de línea está dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (1)$$

La construcción de una derivada covariante ∇_μ , que es la herramienta que permite describir cómo cambia un vector al moverse a lo largo de una curva en el espacio-tiempo curvo, normalmente es compatible con la condición métrica $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$, lo que implica que la conexión es libre de torsión. Esta condición asegura que la geometría del espacio-tiempo sea lo suficientemente regular como para que los vectores mantengan su longitud y el ángulo entre ellos a lo largo de las trayectorias (Schutz, 2022). Bajo esta condición, los coeficientes de la conexión afín, conocidos como los símbolos de Christoffel describen cómo varían las coordenadas en un sistema curvo y se definen de la siguiente manera:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (2)$$

Bajo esta conexión, las geodésicas, representan las trayectorias más cortas entre dos puntos en un espacio-tiempo curvado, análoga a una línea recta en un espacio plano (Thorne *et al.*, 2000).

El tensor de Riemann, que describe la curvatura del espacio-tiempo, es un objeto matemático fundamental en la relatividad general, ya que revela cómo el espacio-tiempo se curva debido a la presencia de materia y energía. Se expresa en términos de la conexión afín (símbolos de Christoffel):

$$R^\alpha_{\mu\lambda\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} + \Gamma^\alpha_{\lambda\rho} \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\rho} \Gamma^\rho_{\lambda\mu}. \quad (3)$$

Este tensor describe cómo cambia la orientación de un vector cuando es transportado alrededor de una pequeña región del espacio-tiempo, proporcionando una medida precisa de la curvatura (Schutz, 2022).

Con este tensor y una distribución de materia descrita por un tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$ las ecuaciones de Einstein de la relatividad general, están dadas por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (4)$$

Aquí, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, el cual se obtiene contrayendo el tensor de Riemann sobre su primer y tercer índice

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}. \quad (5)$$

Este tensor mide cómo la curvatura del espacio-tiempo afecta el volumen de un objeto. En particular, el tensor de Ricci refleja cómo la curvatura de una región afecta la divergencia de geodésicas que se originan en un punto, lo que permite determinar si los volúmenes de objetos pequeños se expanden o contraen bajo la influencia de la curvatura (Liveridge, 2004).

El escalar de curvatura R es la traza del tensor de Ricci

$$R = g^{\alpha\mu} R_{\mu\alpha} = R^{\alpha}_{\alpha}. \quad (6)$$

Este escalar describe la variación del área de una pequeña esfera geodésica en un espacio curvo en comparación con un espacio plano ofrece una visión más global de la curvatura en un punto dado y su relación con la materia (Loveridge, 2004). El tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ es fundamental, pues relaciona directamente la curvatura del espacio-tiempo con la distribución de energía y momento a través de $T_{\mu\nu}$, donde κ es una constante proporcional a la constante gravitacional (Carroll, 2019).

Además, el escalar de Kretschmann,

$$K = R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (7)$$

proporciona una medida más completa de la curvatura, ya que es un invariante cuadrático del tensor de Riemann. Este escalar es particularmente útil para identificar singularidades en el espacio-tiempo (Wald, 2010).

Finalmente, las ecuaciones de las geodésicas, que describen las trayectorias de mínima longitud de las partículas en un espacio-tiempo curvo, se expresan como:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right) + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (8)$$

Dado que los símbolos de Christoffel $\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$ son funciones conocidas de las coordenadas x^α , estas ecuaciones constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden (Schutz, 2022).

3. Descripción de GRDidactic

3.1. Lenguaje y herramientas utilizadas

GRDidactic se ha desarrollado utilizando el lenguaje de programación Python, debido a su versatilidad y amplia aceptación en la comunidad científica. La librería empleada para el cálculo simbólico fue **SymPy**, facilitando la manipulación de expresiones matemáticas complejas.

Esta herramienta permitió una implementación eficiente y robusta de los cálculos necesarios para determinar los símbolos de Christoffel, el tensor de Riemann, el tensor de Ricci, el escalar de Ricci, el escalar de Kretschmann, el tensor de Einstein y las ecuaciones de las geodésicas, a partir de una métrica dada.

3.2. Parámetros que debe proporcionar el usuario

Para que GRDidactic pueda calcular los objetos matemáticos correspondientes, el usuario debe introducir la métrica del espacio-tiempo de interés. Esto implica definir las siguientes entradas:

- **Coordenadas:** Un conjunto de coordenadas adecuado para la métrica, por ejemplo, $\{t, r, \theta, \phi\}$ para coordenadas esféricas.
- **Componentes de la métrica:** Los componentes no nulos de una matriz $g_{\mu\nu}$ que representan la métrica covariante en función de las coordenadas definidas.

- **Constantes o parámetros físicos** (si los hay): Por ejemplo, el radio de Schwarzschild (r_s) o la constante de la velocidad de la luz (c), que pueden aparecer como términos en la métrica.

A continuación se muestra un ejemplo de definición de la métrica de Schwarzschild en pseudocódigo:

```
coord = [t, r, theta, phi]
rs, C = r_s, c
g = matriz 4x4 inicializada con ceros

g[0, 0] = -(1 - rs / coord[1]) * C**2
g[1, 1] = 1 / (1 - rs / coord[1])
g[2, 2] = coord[1]**2
g[3, 3] = coord[1]**2 * sin(coord[2])**2
```

Una vez que se ha definido la métrica, GRDidactic procederá a calcular los símbolos de Christoffel, los tensores de curvatura, los escalares de curvatura y las ecuaciones de las geodésicas.

3.3. Estructura de GRDidactic

GRDidactic se organiza de manera modular, con cada función dedicada a una tarea específica. Esta estructura permite seguir el proceso de cálculo paso a paso, lo que facilita el aprendizaje de los conceptos fundamentales involucrados. A continuación, se presenta una breve descripción de las funciones principales:

- **Cálculo de los Símbolos de Christoffel:** Esta función utiliza la métrica en sus formas covariante y contravariante para calcular los símbolos de Christoffel de segunda especie. Los símbolos de primera especie se obtienen multiplicando los de segunda especie por la métrica covariante, siguiendo el procedimiento estándar en relatividad general.
- **Cálculo del Tensor de Riemann:** Utilizando los símbolos de Christoffel, esta función calcula los componentes del tensor de Riemann.
- **Cálculo del Tensor de Ricci y Escalar de Ricci:** A partir del tensor de Riemann, se obtienen los componentes del tensor de Ricci y el escalar de Ricci.
- **Cálculo del Escalar de Kretschmann:** Se utiliza el tensor de Riemann para calcular el escalar de Kretschmann.
- **Cálculo del tensor de Einstein:** Emplea el tensor de Ricci y el escalar de Ricci para calcular los componentes del tensor de Einstein.
- **Ecuaciones de las Geodésicas:** Encuentra las ecuaciones de las geodésicas a partir de los símbolos de Christoffel.

Estos módulos permiten una implementación clara y flexible, facilitando la verificación y validación de los resultados.

4. Validación y resultados

4.1. Métrica de Schwarzschild

El elemento de línea para la métrica de Schwarzschild está dado por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - r_s/r} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (9)$$

donde $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ es el radio de Schwarzschild. Esta métrica representa el espacio-tiempo alrededor de un cuerpo esférico no rotante y sin carga, como un agujero negro o una estrella. Fue la primera solución exacta de las ecuaciones de Einstein y es fundamental en el estudio de objetos compactos en astrofísica, incluyendo agujeros negros y estrellas de neutrones. Esta fue la primera métrica probada con GRDidactic. Se calcularon los valores del tensor de Riemann covariante, los cuales fueron consistentes con (Müller y Grave, 2009).

4.1.1. Tensor de Riemann covariante

```
Definir función Riemann(i, j, k, l)
  p = derivada parcial de ch[i, j, l] respecto a coord[k]
  - derivada parcial de ch[i, j, k] respecto a coord[l]
  Inicializar s a 0
  Para cada o desde 0 hasta n-1 hacer:
    s = s + ch[i, o, k] * ch[o, j, l] - ch[i, o, l] * ch[o,
      ↪ j, k]
  Retornar p + s
```

$$R_{r\theta r\theta} = -\frac{0.5r_s}{r-r_s}, \quad R_{\theta r\theta\theta} = -\frac{0.5r_s \sin^2(\theta)}{r-r_s}, \quad R_{\theta\phi\theta\phi} = 1.0rr_s \sin^2(\theta) \quad (10)$$

4.2. Métrica de Kerr

La métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist está dada por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s r}{\Sigma}\right) c^2 dt^2 - \frac{2r_s a r \sin^2 \theta}{\Sigma} c dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{r_s a^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (11)$$

donde $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ y $\Delta = r^2 - r_s r + a^2$. La métrica de Kerr describe el espacio-tiempo alrededor de un agujero negro en rotación, y es utilizada para modelar agujeros negros que suelen poseer un momento angular significativo. Se calcularon los símbolos de Christoffel, verificándose su exactitud mediante comparación con resultados teóricos publicados en (Müller y Grave, 2009).

4.2.1. Símbolos de Christoffel

```
Definir función Christoffel(i, j, k)
  Inicializar s a 0
  Para cada a desde 0 hasta n-1 hacer:
    s = s + 1/2 * g_inv[a, i] * (derivada parcial de g[a, j]
      ↪ respecto a coord[k] + derivada parcial de g[a, k]
      ↪ respecto a coord[j] - derivada parcial de g[j, k]
      ↪ respecto a coord[a])
  Retornar s
```

$$\Gamma_{t\theta}^r = -\frac{2.0a^2 r r_s \sin(2\theta)}{(a^2 \cos(2\theta) + a^2 + 2r^2)^2}, \quad \Gamma_{t\theta}^\phi = -\frac{1.0acrr_s}{(a^2 \cos^2(\theta) + r^2)^2 \tan(\theta)} \quad (12)$$

$$\Gamma_{r\theta}^r = -\frac{1.0a^2 \sin(2\theta)}{a^2 \cos(2\theta) + a^2 + 2r^2}, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1.0r}{a^2 \cos^2(\theta) + r^2} \quad (13)$$

4.3. Métrica de Reissner–Nordström

Una de las soluciones estáticas más conocidas para las ecuaciones de campo de Einstein es la métrica de Reissner–Nordström, que describe la geometría del espacio-tiempo alrededor de un agujero negro esférico cargado y estático. Aunque un agujero negro cargado sería rápidamente neutralizado por interacciones con la materia circundante. A pesar de esto, los agujeros negros cargados muestran una serie de características importantes para

el análisis de sus propiedades geométricas y termodinámicas. El agujero negro de Reissner–Nordström en coordenadas esféricas se describe mediante la métrica

$$ds^2 = -A_{RN} c^2 dt^2 + A_{RN}^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (14)$$

donde $A_{RN} = 1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}$, con Q representando la carga. Se calcularon el tensor de Ricci y el escalar de Kretschmann, los cuales se fundamentan con los valores reportados en (Müller y Grave, 2009).

4.3.1. Tensor de Ricci

```
Definir función Ricci(i, j)
  Inicializar s a 0
  Para cada o desde 0 hasta n-1 hacer:
    s = s + riem[o, i, o, j]
  Retornar s
```

$$R_{tt} = \frac{1.0Q^2 c^2 \rho (Q^2 \rho + r^2 - rr_s)}{r^6}, \quad R_{\theta\theta} = \frac{1.0Q^2 \rho}{r^2} \quad (15)$$

$$R_{rr} = -\frac{1.0Q^2 \rho}{r^2 (Q^2 \rho + r^2 - rr_s)}, \quad R_{\phi\phi} = \frac{1.0Q^2 \rho \sin^2(\theta)}{r^2}$$

4.3.2. Escalar de Kretschmann

```
Inicializar ek a 0
Para cada a desde 0 hasta n-1 hacer:
  Para cada b desde 0 hasta n-1 hacer:
    Para cada c desde 0 hasta n-1 hacer:
      Para cada d desde 0 hasta n-1 hacer:
        ek = ek + (g[a, a] * riem[a, b, c, d]) * (g_inv[b, b] *
          ↪ g_inv[c, c] * g_inv[d, d] * riem[a, b, c, d])
Mostrar ek
```

$$\mathcal{K} = \frac{1.0 \cdot (56.0Q^4 \rho^2 - 48.0Q^2 rr_s \rho + 12.0r^2 r_s^2)}{r^8} \quad (16)$$

4.4. Métrica de Bardeen

El modelo de Bardeen está descrito por la métrica

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2mr^2}{(r^2 + g^2)^{3/2}}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2mr^2}{(r^2 + g^2)^{3/2}}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (17)$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ representa la métrica de una esfera unitaria. Mediante el uso de la electrodinámica no lineal, se ha obtenido una interpretación física de esta solución, donde un agujero negro regular puede interpretarse como un monopolo magnético con masa m y carga g . Esta característica ha atraído la atención de la comunidad científica debido a su posible relación con las investigaciones sobre materia oscura (Juárez-Loyola, 2023).

El cálculo del escalar de Ricci fue consistente con el valor reportado en (Ayón-Beato y Garcia, 2000), mientras que la ecuación de la geodésica para la coordenada θ coincide con la expresión presentada en (Zhou et al., 2012).

4.4.1. Escalar de Ricci

```
Inicializar er a 0
Para cada a desde 0 hasta n-1 hacer:
  Para cada b desde 0 hasta n-1 hacer:
    er = er + g_inv[a, b] * ricci[a, b]
Mostrar er
```

$$R = \frac{24.0g^2 m (1.0g - 0.5r) (1.0g + 0.5r)}{(g^2 + r^2)^{7/2}} \quad (18)$$

4.4.2. Ecuaciones de las geodésicas

```

Para cada a desde 0 hasta n-1 hacer:
  Inicializar w1 a 0
  Inicializar w2 a 0
  w1 = segunda derivada parcial de coord[a] respecto a L
  Para cada b desde 0 hasta n-1 hacer:
    Para cada c desde 0 hasta n-1 hacer:
      w2 = w2 + simplificación de ch[a, c, b] * derivada parcial
        de coord[c] respecto a L * derivada parcial de coord[b]
        respecto a L
  Mostrar ecuación: w1 + w2 = 0

```

$$-0.5 \sin(2\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi \right)^2 + \frac{d^2}{d\lambda^2} \theta + \frac{2.0 \frac{d}{d\lambda} r \frac{d}{d\lambda} \theta}{r} = 0 \quad (19)$$

4.5. Métrica análoga a la de Alcubierre con burbuja de curvatura en dirección radial

La métrica que refleja una burbuja de curvatura en la dirección radial, similar a la propuesta de Alcubierre, se describe en coordenadas esféricas por la siguiente expresión

$$ds^2 = -(1 - \beta(r, t)^2) dt^2 - 2\beta(r, t) dr dt + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (20)$$

donde $\beta(r, t) = f(r_s)v(t)$, con $r_s = \|r - R_s\|$ y $v(t) = \frac{dR_s}{dt}$. Esta métrica es de gran interés en estudios teóricos sobre el viaje superlumínico dentro del marco de la relatividad general, ya que describe una burbuja que puede moverse a velocidades arbitrarias sin violar localmente la causalidad. La velocidad $v(t)$ controla el desplazamiento de la burbuja, mientras que $f(r_s)$ determina la forma de la misma. Aunque esta solución no implica una violación directa de las ecuaciones de Einstein, presenta desafíos en su implementación física.

Se calcularon los componentes del tensor de Einstein, y los resultados obtenidos coincidieron con los obtenidos por (Abellán et al., 2023).

4.5.1. Tensor de Einstein

```

Definir función Einstein(i, j)
  s = -1/2 * g[i, j] * er + ricci[i, j]
  Retornar s

```

$$G_{rr} = G_{tt} = \frac{1.0 \cdot (2.0r\beta(t, r)\frac{\partial}{\partial r}\beta(t, r) + 2.0r\frac{\partial}{\partial r}\beta(t, r) + 1.0\beta^2(t, r))\beta(t, r)}{r^2} \quad (21)$$

4.6. Comparación con resultados teóricos

La validación de los cálculos se realizó comparando los resultados obtenidos con GRDidactic con aquellos reportados en la literatura científica. En cada caso, se encontraron coincidencias exactas, lo que demuestra la precisión y fiabilidad del código.

Es importante señalar que, aunque no se presentan todos los resultados en este artículo debido a la extensión, se ha verificado exhaustivamente cada métrica mencionada. Los fragmentos de código y resultados presentados ilustran la capacidad de GRDidactic para realizar cálculos complejos y precisos en relatividad general.

5. Tiempo de ejecución

Un aspecto crucial de cualquier herramienta computacional es el tiempo de ejecución del código. En el caso del cálculo simbólico, los tiempos de ejecución varían dependiendo de la complejidad de las operaciones realizadas. Esto implica que, en cada cálculo, el usuario enfrentará diferentes exigencias computacionales según la métrica y los objetos que desea obtener. Para proporcionar una estimación representativa del desempeño de GRDidactic, se realizó una prueba de rendimiento desde la definición de la métrica hasta el cálculo del tensor de Einstein.

Se seleccionaron cuatro métricas para este análisis: dos ampliamente conocidas (Schwarzschild y Kerr) y dos métricas de tipo Petrov-N, utilizadas recientemente en teorías de gravedad modificada (Ahmed et al., 2024a,b), con el objetivo de demostrar que GRDidactic puede aplicarse en investigaciones actuales. Estas métricas fueron evaluadas utilizando diversas librerías de Python especializadas en cálculos simbólicos y tensoriales, tales como SageMath, GraviPy, OGREPy, Pytearcart y EinsteinPy. La comparación se realizó calculando los símbolos de Christoffel, el tensor de Riemann, el tensor de Ricci, el escalar de Ricci y el tensor de Einstein. Cabe mencionar que para la métrica de Schwarzschild, solo se calcularon los símbolos de Christoffel y el tensor de Riemann, ya que los objetos restantes resultan en cero. En el caso de la métrica de Kerr, solo se calcularon los símbolos de Christoffel debido al costo computacional asociado con la simplificación de los objetos restantes.

Para obtener los tiempos de compilación, cada métrica en cada librería se ejecutó tres veces y utilizando la herramienta *time* de Jupyter Notebook, se obtuvo el tiempo de ejecución de cada celda. Los tiempos fueron promediados, y esos resultados se presentan en la Tabla 1. Las pruebas se llevaron a cabo en un equipo con un procesador AMD Ryzen 5 3500U @ 2.10 GHz, 8 GB de RAM, un SSD de 256 GB y un HDD de 1 TB, corriendo bajo Windows 11.

De acuerdo con los tiempos de compilación reportados en la Tabla 1, GRDidactic muestra un desempeño competitivo, superando a librerías bien establecidas en varias ocasiones. Este rendimiento, combinado con su diseño accesible, no solo lo convierte en una herramienta robusta para investigaciones en relatividad general, sino también en un recurso didáctico valioso para el aprendizaje y la enseñanza de conceptos fundamentales en este campo.

6. Aplicaciones y discusión

6.1. Discusión

Existen diversas herramientas y software diseñados para realizar estos cálculos, tales como Maple y la biblioteca EinsteinPy de Python. Si bien estas herramientas son poderosas y versátiles, pueden resultar abrumadoras o confusas para quienes recién se inician en el estudio de la relatividad general.

El código que presentamos en este artículo se destaca por su simplicidad y accesibilidad, ya que utiliza únicamente SymPy, una biblioteca de Python para matemáticas simbólicas.

Tabla 1: Tiempos de ejecución en segundos para diferentes sistemas de cálculo simbólico (CAS)

Métrica	CAS					
	SageMath	GraviPy	OGRePy	Pytearcats	EinsteinPy	GRDidactic
Schwarzschild						
S. Christoffel	5.157	1.550	0.873	0.624	3.330	0.514
T. Riemann	6.360	1.994	6.655	1.5	4.083	1.447
Kerr						
S. Christoffel	24.433	10.14[†]	NaN [‡]	29	54.367	26.833
Tipo-N Vaidya						
S. Christoffel	6.577	2.817	1.105	0.922	2.850	0.778
T. Riemann	14.233	3.483	12.000	1.860	6.767	2.980
T. Ricci	0.373	2.790	0.188	0.270	6.783	0.267
Escalar de Ricci	0.066	2.407	0.218	0.264	2.930	0.013
T. Einstein	0.695	2.713	0.302	0.219	6.953	0.226
Tipo-N Ricci-Inversa						
S. Christoffel	6.153	2.530	0.699	0.794	2.527	0.326
T. Riemann	8.133	2.853	2.857	1.063	3.313	0.797
T. Ricci	0.256	2.433	0.111	0.128	3.410	0.110
Escalar de Ricci	0.763	2.423	0.134	0.302	2.597	0.016
T. Einstein	0.486	2.383	0.221	0.152	3.527	0.114

[†] Tardó un promedio de 53.43 segundos en cargar y procesar la métrica. [‡] No fue posible completar el cálculo.

Al centrarse en una sola biblioteca, GRDidactic ofrece una forma más clara y comprensible de abordar estos cálculos, especialmente para aquellos que comienzan a estudiar la teoría de relatividad general y desean evitar realizar cálculos manualmente. A diferencia de otras herramientas, GRDidactic expone de manera transparente todas las fórmulas y procesos necesarios para calcular un objeto específico, lo que facilita tanto el aprendizaje como la enseñanza de los conceptos fundamentales.

Además, el uso de Python, un lenguaje de programación altamente accesible y popular, hace que este código sea atractivo para estudiantes e investigadores que buscan una alternativa práctica y didáctica a bibliotecas existentes que no muestran todos los procesos necesarios para calcular objetos de relatividad general.

6.2. Aplicaciones de GRDidactic en investigaciones actuales

El código desarrollado tiene una amplia gama de aplicaciones en estudios de relatividad general y cosmología, como se observa en investigaciones recientes (Ahmed *et al.*, 2024a,b) y (Plamondon, 2018), las cuales involucran el cálculo de objetos básicos de relatividad general, como tensores y escalares de curvatura, que describen el comportamiento de un espacio-tiempo específico.

Frecuentemente, las investigaciones teóricas en relatividad general requieren el análisis de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein. GRDidactic facilita la verificación de propiedades geométricas y físicas de dichas soluciones, tales como la curvatura del espacio-tiempo y la existencia de singularidades, a través del cálculo de tensores y escalares relevantes. De este modo, proporciona herramientas para analizar la curvatura del espacio-tiempo en diversos escenarios, como universos

en expansión o contracción, y evaluar su consistencia con las observaciones cosmológicas actuales.

Por ejemplo, en el trabajo de (Plamondon, 2018), se propone un potencial *erfc* como fuente gravitatoria para explicar la curvatura del espacio-tiempo. Este potencial se integra en una métrica que describe un objeto masivo, simétrico y estático. A partir de esta métrica, se calculan los tensores de curvatura y se analizan tanto las ecuaciones de campo como las de las geodésicas. Los cálculos realizados en ese artículo fueron replicados utilizando GRDidactic, partiendo del elemento de línea presentado en dicho artículo.

Además de su aplicación en relatividad general, GRDidactic tiene un potencial significativo en campos emergentes que utilizan conceptos avanzados de geometría riemanniana. Un ejemplo de ello es la teoría de fluctuaciones termodinámicas (Ruppeiner, 1995), donde se establece una conexión fundamental entre esta teoría y la geometría diferencial, proporcionando una herramienta innovadora para el estudio de la curvatura termodinámica.

Ruppeiner propuso que la curvatura riemanniana termodinámica, derivada de una métrica definida en el espacio de estados termodinámicos, constituye una aproximación cualitativamente novedosa para analizar el comportamiento de los sistemas cerca del punto crítico, sugiriendo que esta curvatura es proporcional al volumen de correlación. Utilizando GRDidactic, verificamos los cálculos del escalar de curvatura, obteniendo los mismos resultados presentados en su trabajo.

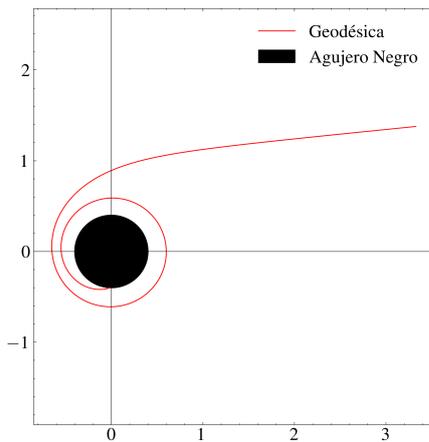
Finalmente, es importante señalar que tanto (Ruppeiner, 1995) como (Plamondon, 2018) emplean la convención de (Weinberg, 1972) para la definición del tensor de Riemann.

6.3. Limitaciones y mejoras futuras

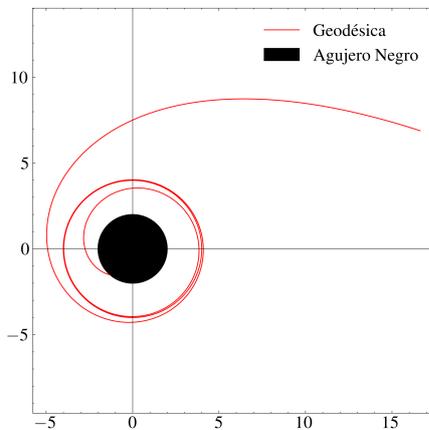
Aunque el código desarrollado es robusto y versátil, presenta algunas limitaciones que podrían abordarse en futuras versiones. Para mitigar estas restricciones, se podrían implementar mejoras en la optimización del código y su integración con bibliotecas de cálculo paralelo.

Por ejemplo, la biblioteca multiprocessing permite crear procesos independientes con su propio espacio de memoria, lo que podría mejorar el rendimiento en tareas pesadas (Python Software Foundation, 2024). Además, el compilador en tiempo real Numba, que traduce código Python a código máquina altamente optimizado, es una solución efectiva para aumentar la eficiencia de GRDdidactic (Numba Developers, 2024).

En futuras versiones, se podrían incorporar cálculos numéricos utilizando Numpy para analizar el comportamiento de los tensores en puntos específicos del espacio-tiempo con parámetros determinados. Asimismo, sería factible generar gráficos representativos, como las geodésicas, utilizando Matplotlib. En la versión actual, únicamente se incluye la solución numérica para la métrica de Schwarzschild (ver Figura 1), que se obtiene resolviendo sus ecuaciones diferenciales mediante la función `solve_ivp` de la biblioteca SciPy, seleccionando un método numérico apropiado y especificando las condiciones iniciales correspondientes (SciPy Developers, 2023).



a Geodésica nula.



b Geodésica tipo tiempo.

Figura 1: Trayectorias geodésicas para un agujero negro de Schwarzschild, ambas en el plano ecuatorial ($\theta = \frac{\pi}{2}$).

Además, realizar ajustes en las definiciones de las variables dentro de la métrica podría generar expresiones más compactas, similares a las de la métrica de Kerr. Esto no solo simplificaría las expresiones resultantes, sino que también mejoraría el rendimiento en cálculos simbólicos complejos, al reducir la necesidad de usar la función `simplify`, que, aunque útil, puede ser innecesariamente lenta al intentar múltiples tipos de simplificaciones antes de determinar la óptima.

GRDdidactic está diseñado principalmente para trabajar dentro del marco de la relatividad general. Sin embargo, existen otras teorías que requieren cálculos adicionales o diferentes como la anomalía de la traza en cuatro dimensiones del tensor de energía-momento, obtenida a partir del invariante topológico de cuatro dimensiones de Gauss-Bonnet y el cuadrado del tensor de Weyl (Calzá et al., 2022), definidos a partir del tensor de Riemann, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci, objetos que pueden ser calculados por GRDdidactic. Extender el código para incluir estas teorías podría ampliar su aplicabilidad en investigaciones actuales. Entre estas teorías se encuentra la gravedad inversa de Ricci, que establece modificaciones en la acción de Einstein-Hilbert mediante un acoplamiento con un escalar de anticurvatura obtenido a partir del tensor de Ricci. Al mostrar que una familia de modelos de espacio-tiempo de tipo N sirven como solución a esta teoría, es posible afirmar que permite curvas temporales cerradas, como en la relatividad general (Ahmed et al., 2024a).

7. Conclusiones

El código validado en este trabajo demuestra su capacidad para calcular estructuras básicas de geometría diferencial y relatividad general, como símbolos de Christoffel, tensores de Riemann y Ricci, el tensor de Einstein, el escalar de Kretschmann, y ecuaciones de geodésicas a partir de una métrica específica. Al desarrollarlo con SymPy, se ofrece una alternativa accesible y didáctica a las herramientas computacionales tradicionales utilizadas en relatividad general, como Mathematica y Maple, al permitir una mayor transparencia en los cálculos y un control completo sobre cada paso del proceso.

Las pruebas realizadas con métricas reconocidas, como las de Schwarzschild, Kerr, Reissner-Nordström, Bardeen y Alcubierre, han confirmado la precisión y fiabilidad de GRDdidactic, coincidiendo con los resultados teóricos disponibles en la literatura científica.

Este enfoque facilita tanto a estudiantes como a docentes el aprendizaje y la enseñanza de conceptos fundamentales en relatividad general, reduciendo las barreras de acceso asociadas con software propietario costoso y complejo. Además, GRDdidactic no solo es valioso en un contexto educativo, sino que también tiene un gran potencial para ser adaptado en el estudio de teorías alternativas y en proyectos multidisciplinarios. Esto amplía su utilidad más allá de la relatividad general clásica, proporcionando una base sólida para futuras investigaciones en física teórica.

Disponibilidad de datos

El código, los resultados completos y los tiempos de ejecución están disponibles en este [repositorio](#).

Referencias

- Abellán, G., Bolívar, N., y Vasilev, I. (2023). Alcubierre warp drive in spherical coordinates with some matter configurations. *The European Physical Journal C*, 83(1):7.
- Ahmed, F., de Souza, J., y Santos, A. (2024a). Closed time-like curves in $f(t, r)$ modified gravity theory. *Nuclear Physics B*, p. 116573.
- Ahmed, F., de Souza, J., y Santos, A. (2024b). Cosmological constant petrov type-n space-time in ricci-inverse gravity. *Annals of Physics*, 461:169578.
- Alcubierre, M. (1994). The warp drive: hyper-fast travel within general relativity. *Classical and Quantum Gravity*, 11(5):L73.
- Ayon-Beato, E. y García, A. (1998). Regular black hole in general relativity coupled to nonlinear electrodynamics. *Physical review letters*, 80(23):5056.
- Ayón-Beato, E. y García, A. (2000). The bardeen model as a nonlinear magnetic monopole. *Physics Letters B*, 493(1-2):149–152.
- Calzá, M., Casalino, A., y Sebastiani, L. (2022). Local solutions of general relativity in the presence of the trace anomaly. *Physics of the Dark Universe*, 37:101066.
- Carroll, S. M. (2019). *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press.
- Heck, A. y Koepf, W. (1993). *Introduction to MAPLE*, volumen 16. Springer.
- Juárez-Loyola, J. A. (2023). Modos cuasi-normales del agujero negro de bardeen rodeado de materia y energía oscura.
- Loveridge, L. C. (2004). Physical and geometric interpretations of the riemann tensor, ricci tensor, and scalar curvature. *arXiv preprint gr-qc/0401099*.
- Müller, T. y Grave, F. (2009). Catalogue of spacetimes. *arXiv preprint arXiv:0904.4184*.
- Numba Developers (2024). 5 minute guide. <https://numba.readthedocs.io/en/stable/user/5minguide.html>. Último acceso: 3 de agosto de 2024.
- Plamondon, R. (2018). General relativity: An erfc metric. *Results in Physics*, 9:456–462.
- Python Software Foundation (2024). Módulo multiprocessing — ejecución de operaciones concurrentes. <https://docs.python.org/es/3/library/multiprocessing.html>. Último acceso: 3 de agosto de 2024.
- Ruppeiner, G. (1995). Riemannian geometry in thermodynamic fluctuation theory. *Reviews of Modern Physics*, 67(3):605.
- Schutz, B. (2022). *A first course in general relativity*. Cambridge university press.
- SciPy Developers (2023). `scipy.integrate.solve_ivp`. https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.solve_ivp.html. Último acceso: 17 de septiembre del 2024.
- Thorne, K. S., Misner, C. W., y Wheeler, J. A. (2000). *Gravitation*. Freeman San Francisco.
- Wald, R. M. (2010). *General relativity*. University of Chicago press.
- Weinberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Wiley, New York,.
- Winkler, F. (2024). Symbolic computation in algebra, geometry, and differential equations. *Information and Computation*, p. 105200.
- Zhou, S., Chen, J., y Wang, Y. (2012). Geodesic structure of test particle in bardeen spacetime. *International Journal of Modern Physics D*, 21(09):1250077.