DESDE 2013
https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/icbi/issue/archive
Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI
ISSN: 2007-6363

Publicación semestral, Vol. 13, No. Especial (2025) 135–144

Espacios de tipo b–métrico extendido y teoremas del punto fijo
Spaces of type extended b–metric and fixed point theorems

R. Martínez-Cruz[a,*], M. D. Macias-Macias[a], J.E. Pérez-Vázquez[a], R. López-Hernández[a]

[a] *Facultad de Ciencias Básicas Ingeniería y Tecnología, Universidad Autónoma de Tlaxcala, 90401, Apizaco, Tlaxcala, México.*

Resumen

En esta investigación, inspirados en el concepto de espacio de tipo métrico, presentamos la noción de espacio de tipo b–métrico extendido. Establecemos algunos teoremas del punto fijo para automapeos definidos en dichos espacios el cual generalizan los resultados dados por Mohamed Amine Khamsi.

Palabras Clave: Puntos fijos, espacios de tipo b–métrico extendido.

Abstract

In this research, inspired by the concept of metric type spaces, we present the notion of extended b–metric type spaces. We establish some fixed point theorems for self-mappings defined in these spaces which generalize the results given by Mohamed Amine Khamsi.

Keywords: Fixed points, spaces of type extended b–metric.

1. Introducción

Stefan Banach dió a conocer, en su tesis doctoral (Banach, 1922), un importante teorema del punto fijo conocido como el “Principio de Contracción de Banach”, el cual es uno de los resultados más importante del análisis y se considera la principal fuente de la teoría del punto fijo en espacios métricos. En su investigación demuestra la existencia de dichos puntos fijos para mapeos contractivos en espacios métricos completos. Dicho principio se ha generalizado en muchas direcciones diferentes y una variedad de trabajos al respecto han sido publicados en espacios métricos generalizados, por ejemplo: reemplazando el conjunto de los números reales no negativos por un espacio de Banach real ordenado, L. G. Huang y X. Zhang (Huang y Zhang, 2007), introducen el concepto de espacio métrico del cono.Por otro lado, Mohamed (Mohamed, 2010), discute el concepto de métrica del cono y algunos resultados de existencia de puntos fijos de mapeos contractivos definidos en dichos espacios. Adicionalmente, N. Hussain y M. H. Shah (Hussain y Shah, 2011), establecen algunas propiedades topológicas de los espacios b–métricos del cono y reestructuran algunos resultados recientes sobre aplicaciones KKM (teoremas de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz) en el contexto de dichos espacios. Demuestran algunos resultados de existencia del punto fijo para aplicaciones multivaluadas definidas en dichos espacios. Finalmente, Das y Bag (Das y Bag, 2022) introducen la noción de espacio b–métrico extendido del cono,en el cual se establece la estructura de la bola abierta y definen la noción de convergencia de una sucesión, generalizan los teoremas de contracción de Banach y Kannan sin la condición de normalidad.

En este trabajo de investigación introducimos la idea de espacios de tipo b-métrico y de tipo b-métrico extendido y su relación con los espacios b-métrico extendido del cono. Damos a conocer el concepto de θ-normal que generaliza la condición de normalidad de Mohamed (Mohamed, 2010). Esta generalización detona la exposición del trabajo que estamos proponiendo en el siguiente sentido.

(1) Las definiciones de espacio métrico del cono, b–métrico del cono proporcionados por L.G. Huang y X.Zhang (Huang y Zhang, 2007), N. Hussain y M. H. Shah et al. (Hussain y Shah, 2011) y la θ-normal nos conducirán de manera natural a obtener la noción de espacio b–métrico extendido del cono dado a conocer por Das y Bag (Das y Bag, 2022, Definition 3.1).

(2) Estos conceptos referenciados en (1) junto con la desigualdad (4), implicarán la definición de espacio de tipo b–métrico extendido al sustituir $s = 1$ y, la de tipo b–métrico al poner

* Autor para correspondencia: reinaldo.martinez.c@uatx.mx.
Correo electrónico: reinaldo.martinez.c@uatx.mx(Reinaldo Martínez-Cruz), dann250401@outlook.com(María Dannae Macias Macias), joseerasmo.perez.v@uatx.mx(José Erasmo Pérez-Vázquez), ricardo.lopez.h@uatx.mx(Ricardo López-Hernández).

Historial del manuscrito: recibido el 10/09/2024, Última versión-revisada recibida el 10/10/2024, aceptado el 13/12/2024 publicado el 26/04/2025. **DOI:** https://doi.org/10.29057/icbi.v13iEspecial.13724

$\theta(x, y, z) = 1$.

(3) Estos últimos conceptos nos permitirán generalizar los resultados dados por Mohamed (Mohamed, 2010).

(4) Si al mapeo le pedimos ser Lipchitziana, el proceso para llevar a cabo muchas de las demostraciones sobre teoremas del punto fijo, a nuestro parecer son mas elegantes y fáciles de entender.

La organización del trabajo es como sigue: En la sección 2 proporcionamos algunos preliminares y resultados que nos son de utilidad para dar a conocer algunas generalizaciones, útiles para las dos secciones posteriores. En la sección 3 nos damos a la tarea de hacer énfasis que, la definición proporcionada por Das y Bag (Das y Bag, 2022) se obtiene de manera directa a partir de las Definiciones 2.8 y 2.9. Además, estos resultados nos permiten redefinir las nociones de espacios de tipo b–métrico y espacios de tipo b–métrico extendido. En la sección 4, presentamos algunas generalizaciones de los teoremas del punto fijo en espacios de tipo b–métrico extendido y, como corolarios obtenemos los relacionados con espacios de tipo b–métrico.

Finalmente, en la sección 5, proporcionamos alguna aplicación de esta investigación a un sistema de ecuaciones matriciales.

2. Preliminares

En esta sección proporcionamos algunos preliminares y resultados que nos será de utilidad en las secciones posteriores.

Definición 2.1. Sea E un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|$ y $P \subset E$. Entonces P es llamado un cono si y solo si

(1) $P = \overline{P}$, $P \neq \emptyset$ y $P \neq \{\theta_0\}$ donde θ_0 es el vector nulo de E y $\overline{P}$ denota la clausura de P;

(2) si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b \geq 0$, y $x, y \in P$, entonces $ax + by \in P$;

(3) si $x \in P$ y $-x \in P$, entonces $x = \theta_0$.

Ejemplo 2.2. En el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, con su orden usual $\leq$, consideremos:

Para cualesquiera $s, t \in \mathbb{R}$ con $0 < s < t$, sea $P = [s, t]$. Tenemos que:

(1) $P = \overline{P}$, $P \neq \emptyset$ y $P \neq \{0\}$

(2) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $0 \leq a, b$, $1 = a + b$ y $x, y \in P$, entonces

$$s = (a + b)s = as + bs \leq ax + by \leq at + bt = (a + b)t = t. \quad (1)$$

Se sigue que, la desigualdad (1) se satisface trivialmente. Así, $ax + by \in P$.

(3) Supongamos que, $x \in P$, $-x \in P$ y $x \neq 0$, entonces $x > 0$ o $x < 0$. Si $x > 0$, entonces $s \leq x \leq t$ y $s \leq -x \leq t$ implican que, $s < 0$, lo cual nos da una contradicción. Nuevamente, para el caso $x < 0$ nos conduce a que, $s < 0$. Así, $x = 0$.

Definición 2.3. Sea P un cono en un espacio de Banach E. Recordemos que una relación de orden parcial $\leq$ en P satisface:

(i) para cada $a \in P$, $a \leq a$,

(ii) para cada $a, b, c \in P$, $a \leq b$ y $b \leq c$ implica que $a \leq c$,

(iii) para cada $a, b \in P$, $a \leq b$ y $b \leq a$ implica que $a = b$.

Ejemplo 2.4. El conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, con su orden usual $\leq$, es un conjunto parcialmente ordenado.

Dado un cono P en un espacio de Banach E, definimos una relación de orden parcial $\leq$ con respecto a P por:

$$x \leq y \quad \text{si y solo si} \quad y - x \in P. \quad (2)$$

También escribimos $x < y$ siempre que $x \leq y$ y $x \neq y$, mientras que $x \ll y$ representará $y - x \in int(P)$ (donde recuerde que $int(P)$ denota el interior del conjunto P).

Definición 2.5. El cono P es llamado normal si existe una constante $K > 0$ tal que para cualesquiera $u, v \in E$, se tiene que,

$$\theta_0 \leq u \leq v \quad \text{si y solo si} \quad \|u\| \leq K\|v\|. \quad (3)$$

El mínimo K satisfaciendo la desigualdad (3) le llamaremos constante normal de P.

Definición 2.6. Sea X un conjunto no vacío. El cono P es llamado θ–normal si existe una función $\theta : X \times X \times X \to [1, \infty)$ tal que para cualesquiera $x, y, z \in X$ y $u, v \in E$, se tiene que,

$$\theta_0 \leq u \leq v \quad \text{si y solo si} \quad \|u\| \leq \theta(x, y, z)\|v\|. \quad (4)$$

El mínimo θ satisfaciendo la desigualdad (4) le llamaremos θ–normal de P.

Una observación inmediata es el siguiente

Nota 2.7. Si el cono P es normal, entonces P es θ–normal.

Demostración. Supongamos que, el cono P es normal, entonces existe una constante $K > 0$ tal que, para cualesquiera $u, v \in E$, obtenemos:

$$\theta_0 \leq u \leq v \quad \text{si y solo si} \quad \|u\| \leq K\|v\|.$$

Pongamos $\theta(x, y, z) = K + 1$ para cualesquiera $x, y, z \in X$. Se sigue que,

$$\theta_0 \leq u \leq v \quad \text{si y solo si} \quad \|u\| \leq \theta(x, y, z)\|v\|.$$

□

A continuación, recordamos las nociones de métrica del cono y b–métrica del cono dados a conocer por L. G. Huang y X. Zhang (Huang y Zhang, 2007), N. Hussain y M. H. Shah (Hussain y Shah, 2011).

Definición 2.8. SeanX un conjunto no vacío y E un espacio de Banach y θ_0 el vector nulo de E. Sea P un cono de E con $int(P) \neq \emptyset$ y $\leq$ una relación de orden parcial con respecto a P. Supongamos que el mapeo $d : X \times X \to E$ satisface las siguientes propiedades: para cualesquiera $x, y, z \in X$, se tiene que

(MC1) $d(x, y) \geq \theta_0$,

(MC2) $d(x, y) = \theta_0$ si y solo si $x = y$,

(MC3) $d(x, y) = d(y, x)$,

(MC4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

A la pareja (X, d) se le conoce espacio métrico del cono y d una métrica del cono.

Definición 2.9. Sean X un conjunto no vacío y E un espacio de Banach y θ_0 el vector nulo de E. Sea P un cono de E con $int(P) \neq \emptyset$ y $\preceq$ una relación de orden parcial con respecto a P. Supongamos que el mapeo $d : X \times X \to E$ satisface las siguientes propiedades: para cualesquiera $x, y, z \in X$, se tiene que;

(BMC1) $d(x, y) \succeq \theta_0$,

(BMC2) $d(x, y) = \theta_0$ si y solo si $x = y$,

(BMC3) $d(x, y) = d(y, x)$,

(BMC4) existe $s \geq 1$ tal que $d(x, y) \preceq s(d(x, z) + d(z, y))$.

A la pareja (X, d) se le conoce espacio b–métrico del cono y d una b–métrica del cono.

La definición y el ejemplo siguiente nos son de utilidad para llevar a cabo algunas generalizaciones.

Definición 2.10. Sean E un espacio de Banach y $f : E \to [0, \infty)$ una función. Decimos que:

(a) *f preserva la métrica del cono* si para cualquier espacio métrico del cono (X, d), se tiene que, $f \circ d$ es una métrica del cono en X. A la familia constituida por las funciones que preservan la métrica del cono lo denotaremos por $\mathcal{MC}$,

(b) *f preserva la b–métrica del cono* si para cualquier espacio b–métrico del cono (X, d), se tiene que, $f \circ d$ es una b–métrica del cono en X. Al conjunto constituido por las funciones que preservan la b–métrica del cono lo denotaremos por $\mathcal{BMC}$

Una observación inmediata.

Nota 2.11. Nótese que, para $s = 1$, obtenemos la métrica del cono, y de aquí se desprende que, $\mathcal{MC} \subseteq \mathcal{BMC}$.

Ejemplo 2.12. Sean E un espacio de Banach y $f : E \to [0, \infty)$ una aplicación definida como:

$$f(x) = ||x|| \quad \text{para} \quad \text{cada} \quad x \in E.$$

Tenemos que, f preserva la b–métrica del cono. En efecto, sea (X, d) cualquier espacio b–métrico del cono. Para cualesquiera $x, y, z \in X$, obtenemos que:

1) $(f \circ d)(x, y) = f(d(x, y)) = 0$ si y solo si $||d(x, y)|| = 0$ si y solo si $d(x, y) = \theta_0$ si y solo si $x = y$.

2) $(f \circ d)(x, y) = f(d(x, y)) = ||d(x, y)|| = ||d(y, x)|| = f(d(y, x)) = (f \circ d)(y, x)$.

3) A partir de las Definiciones 2.6 y 2.9 desigualdad (BMC4), se obtiene que:

$$\begin{aligned}
(f \circ d)(x, y) &= f(d(x, y)) \\
&= ||d(x, y)|| \\
&\leq s\theta(x, y, z)\Big[||d(x, z) + d(z, y)||\Big] \\
&\leq s\theta(x, y, z)\Big[||d(x, z)|| + ||d(z, y)||\Big] \\
&= s\theta(x, y, z)\Big[f(d(x, z)) + f(d(z, y))\Big] \\
&= s\theta(x, y, z)\Big[(f \circ d)(x, z) + (f \circ d)(z, y)\Big].
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f \circ d$ es una b–métrica del cono.

Nota 2.13. Al sustituir $s = 1$, obtenemos que, la función $f : E \to [0, \infty)$ definida por:

$$f(x) = ||x|| \quad \text{para} \quad \text{cada} \quad x \in E,$$

tambien preserva la métrica del cono.

El resultado siguiente es una generalización de Mohamed (Mohamed, 2010, Theorem 2.6).

Proposición 2.14. *Sean (X, d) un espacio b–métrico del cono, P un cono θ–normal en el espacio de Banach E y $f \in \mathcal{BMC}$. El mapeo $D : X \times X \to [0, \infty)$ definido como*

$$D(x, y) = ||d(x, y)|| \quad \text{para} \quad \text{cualesquiera} \quad x, y \in X,$$

satisface las siguientes propiedades:

(D1) *$D(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,*

(D2) *$D(x, y) = D(y, x)$, para cualesquiera $x, y \in X$,*

(D3) *existe una constante $s \geq 1$ tal que*

$$D(x, y) \leq s\theta(x, y, z)\Big[D(x, z_1) + \ldots + D(z_n, y)\Big],$$

para cualesquiera $x, y, z_i \in X$ con $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Demostración. Nótese que $D = (f \circ d)$, donde $d : X \times X \to E$ y $f : E \to [0, \infty)$ son dados en la Definición 2.9 y el Ejemplo 2.12. A partir de la desigualdad (BMC4), y el hecho que, P es un cono θ–normal de E, obtenemos que:

$$||d(x, y)|| \leq s\theta(x, y, z)||d(x, z_1) + d(z_1, z_2) + \ldots + d(z_n, y)||,$$

el cual implica que,

$$||d(x, y)|| \leq s\theta(x, y, z)\Big[||d(x, z_1)|| + ||d(z_1, z_2)|| + \ldots + ||d(z_n, y)||\Big].$$

En particular,

$$\begin{aligned}
D(x, y) &= ||d(x, y)|| \\
&\leq s\theta(x, y, z)\Big[||d(x, z)|| + ||d(z, y)||\Big] \\
&= s\theta(x, y, z)\Big[D(x, z) + D(z, y)\Big].
\end{aligned}$$

□

Nota 2.15. Al sustituir $s = 1$, obtenemos otra vertiente de Mohamed (Mohamed, 2010).

Recordemos cuando una aplicación dado por L. G. Huang y X. Zhang (Huang y Zhang, 2007) es Lipschitziana.

Definición 2.16. Sea (X, d) un espacio métrico del cono. Una aplicación $T : X \to X$ se llama Lipschitziana si existe una constante $\kappa \in \mathbb{R}$ tal que

$$d(T(x), T(y)) \preceq \kappa d(x, y), \quad \text{para} \quad \text{cualesquiera} \quad x, y \in X. \quad (5)$$

Aplicando las Desigualdades (4) y (5), obtenemos la siguiente observación.

Nota 2.17. Sean (X, d) un espacio métrico del cono y P un cono θ–normal en el espacio de Banach E. Para cualesquiera $x, y, z \in X$, obtenemos que:

$$||d(T(x), T(y))|| \leq |\kappa|\theta(x, y, z)||d(x, y)||. \quad (6)$$

Aplicando la desigualdad (6), obtenemos la siguiente nota.

Nota 2.18. Sean (X, d) un espacio b–métrico del cono y P un cono θ–normal en el espacio de Banach E. La aplicación $D : X \times X \to [0, \infty)$ definido como

$$D(x, y) = \|d(x, y)\| \quad \text{para} \quad \text{cualesquiera} \quad x, y \in X,$$

satisface la desigualdad siguiente:

$$D(T(x), T(y)) \leq s|\kappa|\theta(x, y, z)D(x, y).$$

Nota 2.19. Al sustituir $s = 1$, obtenemos que, si (X, d) es un espacio métrico del cono y P un cono θ–normal en el espacio de Banach E. La aplicación $D : X \times X \to [0, \infty)$ definido como

$$D(x, y) = \|d(x, y)\| \quad \text{para} \quad \text{cualesquiera} \quad x, y \in X,$$

satisface la desigualdad siguiente:

$$D(T(x), T(y)) \leq |\kappa|\theta(x, y, z)D(x, y).$$

3. Espacios de tipo *b*–métrico y *b*–métrico extendido

Empezamos esta sección observando que, a partir de las Definiciones 2.6, 2.8 y 2.9 conducen de manera natural a la noción de espacio b–métrico extendido del cono dado a conocer por Das y Bag(Das y Bag, 2022, Definition 3.1).

Definición 3.1. Sean X un conjunto distinto del vacío y $\theta : X \times X \times X \to [1, \infty)$. Supongamos que el mapeo $d_\theta : X \times X \to E$ satisface las siguientes propiedades: para cualesquiera $x, y, z \in X$, se tiene que

(Md$_\theta$1) $d_\theta(x, y) \geq \theta_0$,
(Md$_\theta$2) $d_\theta(x, y) = \theta_0$ si y solo si $x = y$,
(Md$_\theta$3) $d_\theta(x, y) = d_\theta(y, x)$,
(Md$_\theta$4) $d_\theta(x, y) \leq \theta(x, y, z)(d_\theta(x, z) + d_\theta(z, y))$.

A la pareja (X, d_θ) se le conoce como espacio b–métrico extendido del cono y d_θ una b–métrica extendida del cono.

Definición 3.2. Sean E un espacio de Banach y $f : E \to [0, \infty)$ una función. Decimos que, *f preserva la b-métrica extendida del cono* si para cualquier espacio b–métrico extendido del cono (X, d_θ), existe una función $\widehat{\theta} : X \times X \times X \to [1, \infty)$ tal que, $(f \circ d_\theta)_{\widehat{\theta}}$ es una b–métrica extendida del cono en X. Al conjunto constituido por las funciones que preservan la b–métrica extendida del cono lo denotaremos por $\mathcal{BEC}$

La siguiente Observación es inmediata.

Nota 3.3. Cualquier espacio b–métrico del cono es un espacio b–métrico extendido del cono

Demostración. La demostración, se sigue, a partir de la definición 3.1 inciso (Md$_\theta$4), al sustituir

$$\theta(x, y, z) = s \quad \text{para} \quad \text{cualesquiera} \quad x, y, z \in X.$$

□

La Nota 3.3 implica el siguiente hecho

Nota 3.4. La relación siguiente se satisface $\mathcal{BMC} \subseteq \mathcal{BEC}$.

El resultado obtenido en la Nota 2.15 sugiere la siguiente definición.

Definición 3.5. Sean X un conjunto no vacío y $\theta : X \times X \times X \to [1, \infty)$. Sea $D_\theta : X \times X \to [0, \infty)$ una función que satisface

(D$_\theta$1) $D_\theta(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$,
(D$_\theta$2) $D_\theta(x, y) = D_\theta(y, x)$, para cualquier $x, y \in X$,
(D$_\theta$3) $D_\theta(x, y) \leq \theta(x, y, z)(D_\theta(x, z) + D_\theta(z, y))$, para cualesquiera puntos $x, y, z \in X$.

Al par (X, D_θ) le denominarémos espacio de tipo b–métrico extendido.

Sustituyendo $\theta(x, y, z) = s$ en la definición 3.5, obtenemos otra noción, a saber:

Definición 3.6. Sean X un conjunto no vacío y $D_s : X \times X \to [0, \infty)$ una función que satisface

(D$_s$1) $D_s(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$,
(D$_s$2) $D_s(x, y) = D_s(y, x)$, para cualquier $x, y \in X$,
(D$_s$3) existe $s \geq 1$ tal que, $D_s(x, y) \leq s(D_s(x, z) + D_s(z, y))$, para cualesquiera puntos $x, y, z \in X$.

Al par (X, D_s) le denominarémos espacio de tipo b–métrico.

A partir de la Definición 3.1 y la Nota 3.4, podemos redefinir los siguientes enunciados en su versión de espacios b–métricos extendidos del cono.

Definición 3.7. Sea (X, d_θ) un espacio b–métrico extendido del cono. Una aplicación $T : X \to X$ se llama Lipschitziana si existe una constante $\kappa \in \mathbb{R}$ tal que

$$d_\theta(T(x), T(y)) \leq \kappa d_\theta(x, y), \quad \text{para} \quad \text{cualesquiera} \quad x, y \in X. \tag{7}$$

Aplicando las desigualdades (4) y (7), obtenemos la siguiente observación.

Nota 3.8. Sean (X, d_θ) un espacio b–métrico extendido del cono y P un cono θ–normal en el espacio de Banach E. Si $T : X \to X$ es Lipschitziana, entonces para cualesquiera $x, y, z \in X$, obtenemos que:

$$\|d_\theta(T(x), T(y))\| \leq |\kappa|\theta(x, y, z)\|d_\theta(x, y)\|. \tag{8}$$

Aplicando la desigualdad (8), obtenemos la siguiente nota.

Nota 3.9. Sean (X, d_θ) un espacio métrico del cono, P un cono θ–normal en el espacio de Banach E y $T : X \to X$ Lipschitziana. El mapeo $D_\theta : X \times X \to [0, \infty)$ definido como

$$D_\theta(x, y) = \|d_\theta(x, y)\| \quad \text{para} \quad \text{cualesquiera} \quad x, y \in X,$$

satisface la desigualdad siguiente:

$$D_\theta(T(x), T(y)) \leq |\kappa|\theta(x, y, z)D_\theta(x, y). \tag{9}$$

Sustituyendo $\theta(x, y, z) = s$ en las desigualdades (8) y (9) obtenemos dos observaciones mas, a saber:

Nota 3.10. Si (X, d) es un espacio b–métrico del cono y $T : X \to X$ es Lipschitziana, entonces para cualesquiera $x, y, z \in X$, obtenemos que:

$$\|d_\theta(T(x), T(y))\| \leq |\kappa|s\|d_\theta(x, y)\|. \tag{10}$$

Aplicando la desigualdad (10), obtenemos la siguiente nota.

Nota 3.11. Sean (X, d) un espacio b–métrico del cono, y $T : X \to X$ Lipschitziana. El mapeo $D_s : X \times X \to [0, \infty)$ definido como

$$D_s(x, y) = \|d(x, y)\| \quad \text{para} \quad \text{cualesquiera} \quad x, y \in X,$$

satisface la desigualdad siguiente:

$$D_s(T(x), T(y)) \leq |\kappa| s D_s(x, y). \tag{11}$$

La definición de convergencia y completitud en espacios b–métricos extendidos del cono es como sigue:

Definición 3.12. Sea (X, d_θ) un espacio b–métrico extendido del cono y $\{x_n\} \subseteq X$ una sucesión. Decimos que:

1. $\{x_n\}$ converge a $x \in X$ si y solo si para cada $c \in E$ con $c \geq \theta_0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$, tenemos que $d_\theta(x_n, x) \leq c$. Denotamos esto por $\lim_{n\to\infty} d_\theta(x_n, x) = 0$.
2. $\{x_n\}$ es de Cauchy si y solo si para cada $c \in E$ con $c \geq \theta_0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n, m \geq N$, tenemos que $d_\theta(x_n, x_m) \leq c$. Denotamos esto por $\lim_{n,m\to\infty} d_\theta(x_n, x_m) = 0$.
3. (X, d_θ) es completo si y solo si cualquier sucesión de Cauchy en X es convergente.

Las propiedades básicas y sus demostraciones de sucesiones convergentes y de Cauchy se pueden encontrar en (Das y Bag, 2022). Aquí, enunciamos algunas de ellas.

Lema 3.13. *(Das y Bag, 2022, Lema 3.15.) Sean (X, d_θ) un espacio b–métrico extendido del cono, P un cono θ–normal en el espacio de Banach E. Supongamos que, $\theta : X \times X \times X \to [1, \infty)$ es acotado. Entonces*

(i) *Cualquier sucesión convergente posee límite único.*

(ii) *Cada sucesión convergente es de Cauchy.*

Los espacios b–métricos extendidos del cono como hemos visto tienen una estructura de tipo b–métrico extendido. De hecho, como lo hicimos ver en el Ejemplo 2.4, cuando $E = \mathbb{R}$ y la relación $\preceq$ es sustituida por $\leq$ y, esta sustitución satisfacen las propiedades de la definición 3.1, obtenemos lo que, en la literatura se llama una b–métrica extendida. Es por eso que, la b–métrica extendida del cono es mas general que la b–métrica extendida.

De manera similar definimos convergencia y completitud en espacios de tipo b–métrico extendido.

Definición 3.14. Sea (X, D_θ) un espacio de tipo b–métrico extendido y $\{x_n\} \subseteq X$ una sucesión.

1. $\{x_n\}$ converge a $x \in X$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} D_\theta(x_n, x) = 0$.
2. $\{x_n\}$ es de Cauchy si y sólo si $\lim_{n,m\to\infty} D_\theta(x_n, x_m) = 0$.
3. (X, D_θ) es completo si y sólo si cualquier sucesión de Cauchy en X es convergente.

4. Resultados del punto fijo

Los llamados teoremas del punto fijo son aquellos que garantizan, bajo ciertas condiciones, la existencia de algún punto fijo de una función. En esta sección abordaremos algo similar, pero antes necesitamos recordar dicha definición.

Definición 4.1. Consideremos un espacio $X \neq \emptyset$ y una función $T : X \to X$. Se dice que $x \in X$ es un punto fijo de T si $Tx = x$; el nombre proviene de que T deja a x fijo.

El siguiente ejemplo es muy ilustrativo

Ejemplo 4.2. Sea $X = \mathbb{R}$.

(i). Pongamos $Tx = 0$ para cualquier $x \in X$; pues bién, cualquiera de sus raíces de T es un punto fijo de la función $g(x) = Tx + x$, ya que,

$$g(x_0) = Tx_0 + x_0 = 0 + x_0 = x_0.$$

(ii). La aplicación $Tx = x^2$ tiene dos puntos fijos, a saber, 0 y 1.

Proposición 4.3. *(Das y Bag, 2022, Theorem 4.1) Sean (X, d_θ) un espacio b–métrico extendido del cono completo y P un cono en un espacio de Banach E. Sea $\theta : X \times X \times X \to [1, \infty)$ un funcional acotado y supongamos que $T : X \to X$ satisface la condición contractil*

$$d_\theta(Tx, Ty) \leq \kappa d_\theta(x, y), \tag{12}$$

para cualesquiera $x, y \in X$, donde $a < \kappa < 1$, para algún $a > 0$. Además, si

$$\lim_{n,m\to\infty} \theta(x_n, x_m, x_{n+1}) < \frac{1}{\kappa},$$

donde $x_n = Tx_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$ es una sucesión iterativa para algún $x_0 \in X$, entonces T tiene un punto fijo único en X.

Los resultados siguientes son generalizaciones de los proporcionados por Mohamed (Mohamed, 2010).

Teorema 4.4. *Sea (X, D_θ) un espacio de tipo b–métrico extendido completo. Sea $T : X \to X$ un mapeo tal que T^n es Lipschitziana para todo $n \geq 0$ y $\sum_{n=0}^{\infty} Lip(T^n) < \infty$. Además, si $\theta : X \times X \times X \to [1, \infty)$ es un funcional acotado, entonces T tiene un punto fijo único $\omega \in X$. De aquí que, para cualquier $x \in X$, la órbita $\{T^n x\}$ converge a ω*

Demostración. Sean $x \in X$ y $n, h \geq 0$ cualesquiera. Por la Definición 3.5 inciso ($D_\theta 3$), tenemos que:

$$D_\theta(x, T^h x) \leq \theta(x, T^h x, z)\Big(D_\theta(x, Tx) + D_\theta(Tx, T^h x)\Big).$$

De aquí que,

$$\begin{aligned} D_\theta(T^{n+h} x, T^n x) &= D_\theta(T^n(T^h x), T^n x) \\ &\leq Lip(T^n) D_\theta(T^h x, x) \\ &\leq \theta(x, T^h x, z) Lip(T^n)\Big(D_\theta(x, Tx) + D_\theta(Tx, T^h x)\Big). \end{aligned}$$

Por hipótesis $\sum_{n=0}^{\infty} Lip(T^n)$ es convergente; así $\lim_{n\to\infty} Lip(T^n) = 0$. Ahora, como θ es acotado, existe $K > 0$ tal que, para cada elemento $z \in X$, $\theta(x, y, z) < K$. Así,

$$\lim_{n\to\infty} D_\theta(T^{n+h} x, T^n x) = 0. \tag{13}$$

La igualdad (13) nos dice que, la sucesión $\{T^n x\}$ es de Cauchy. Como X es completo, entonces $\{T^n x\}$ converge algún punto $\omega(x)$. Demostremos que $\omega(x)$ es un punto fijo de T. Dado que

$$\begin{aligned} D_\theta\Big(T^{n-1} x, \omega(x)\Big) \leq \theta(T^{n-1} x, \omega(x), z)\Big(&D_\theta(T^{n-1} x, T^n x) \\ &+ D_\theta(T^n x, \omega(x))\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \theta(T^{n-1}x, \omega(x), z)D_\theta(T^{n-1}x, T^{n-1}(Tx))\\
&\qquad +\theta(T^{n-1}x, \omega(x), z)D_\theta(T^n x, \omega(x))\\
&\le \theta(T^{n-1}x, \omega(x), z)Lip\Big(T^{n-1}\Big)D_\theta(x, Tx)\\
&\qquad +\theta(T^{n-1}x, \omega(x), z)D_\theta(T^n x, \omega(x)).
\end{aligned}
$$

Se sigue que,

$$
\begin{aligned}
D_\theta(\omega(x), T\omega(x)) &\le \theta(\omega(x), T\omega(x), z)\Big(D_\theta(\omega(x), T^n x)\\
&\qquad +D_\theta(T^n x, T\omega(x))\Big)\\
&= \theta(\omega(x), T\omega(x), z)D_\theta(\omega(x), T^n x)\\
&\qquad +\theta(\omega(x), T\omega(x), z)D_\theta\Big(T(T^{n-1}x), T\omega(x)\Big)\\
&\le \theta(\omega(x), T\omega(x), z)D_\theta(\omega(x), T^n x)\\
&\qquad +\theta(\omega(x), T\omega(x), z)Lip(T)D_\theta(T^{n-1}x, \omega(x))\\
&\le \theta(\omega(x), T\omega(x), z)D_\theta(\omega(x), T^n x)\\
&+\theta(\omega(x), T\omega(x), z)Lip(T)\Big[\theta(\omega(x), T\omega(x), z)Lip(T^{n-1})D_\theta(x, Tx)\\
&\qquad +\theta(\omega(x), T\omega(x), z)D_\theta(T^n x, \omega(x))\Big]\\
&= \theta(\omega(x), T\omega(x), z)D_\theta(\omega(x), T^n x)\\
&\qquad +[\theta(\omega(x), T\omega(x), z)]^2 Lip(T)Lip(T^{n-1})D_\theta(x, Tx)\\
&\qquad +[\theta(\omega(x), T\omega(x), z)]^2 Lip(T)D_\theta(T^n x, \omega(x))\\
&\le KD_\theta(\omega(x), T^n x)\\
&\qquad +[K]^2 Lip(T)\Big(Lip(T^{n-1})D_\theta(x, Tx) + D_\theta(T^n x, \omega(x))\Big).
\end{aligned}
$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} D_\theta(\omega(x), T^n x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} Lip(T^{n-1}) = 0,$$

obtenemos que:

$$D_\theta(\omega(x), T\omega(x)) = 0 \quad \text{si y solo si} \quad T\omega(x) = \omega(x).$$

En lo que sigue, demostrarémos que, T tiene como máximo un punto fijo. Sean ω_1 y ω_2 dos puntos fijos de T. Tenemos que, para cualquier $n \ge 1$

$$D_\theta(\omega_1, \omega_2) = D_\theta(T^n\omega_1, T^n\omega_2) \le Lip(T^n)D_\theta(\omega_1, \omega_2).$$

Dado que, $\lim_{n\to\infty} Lip(T^n) = 0$, se sigue que:

$$D_\theta(\omega_1, \omega_2) = 0, \quad \text{si y solo si,} \quad \omega_1 = \omega_2.$$

Por lo que, $\omega(x) = \omega(y)$ para cualquier $x, y \in X$, esto completa la demostración del teorema. □

Nota 4.5. Nótese que, la condición $\theta(x, y, z) \le K$ para cualquier $z \in X$ fue necesaria, ya que, $\theta(x, y, z)\lim_{n\to\infty} Lip(T^n)$ puede no ser cero.

Corolario 4.6. *Sea (X, D_s) un espacio de tipo b–métrico completo. Sea $T : X \to X$ una función tal que T^n es Lipschitzian para todo $n \ge 0$ y $\sum_{n=0}^{\infty} Lip(T^n) < \infty$, entonces T tiene un punto fijo único $\omega \in X$. De aquí que, para cualquier $x \in X$, la órbita $\{T^n x\}$ converge a ω*

Demostración. Sean $x \in X$ y $n, h \ge 0$ cualesquiera. A partir de la Definición 3.6 inciso (D_s3), obtenemos:

$$D_s(x, T^h x) \le s\Big(D_s(x, Tx) + D_s(Tx, T^h x)\Big).$$

De aquí que,

$$
\begin{aligned}
D_s(T^{n+h}x, T^n x) &= D_s(T^n(T^h x), T^n x)\\
&\le Lip(T^n)D_s(T^h x, x)\\
&\le sLip(T^n)\Big(D_s(x, Tx) + D(Tx, T^h x)\Big).
\end{aligned}
$$

Por hipótesis $\sum_{n=0}^{\infty} Lip(T^n)$ es convergente; así $\lim_{n\to\infty} Lip(T^n) = 0$. De aquí que,

$$\lim_{n\to\infty} D_s(T^{n+h}x, T^n x) = 0. \tag{14}$$

Nuevamente la igualdad (14) nos dice que, la sucesión $\{T^n x\}$ es de Cauchy. Como X es completo, entonces $\{T^n x\}$ converge algún punto $\omega(x)$. Demostremos que $\omega(x)$ es un punto fijo de T. Dado que

$$
\begin{aligned}
D_s\Big(T^{n-1}x, \omega(x)\Big) &\le s\Big(D_s(T^{n-1}x, T^n x) + D_s(T^n x, \omega(x))\Big)\\
&= sD_s(T^{n-1}x, T^{n-1}(Tx)) + sD_s(T^n x, \omega(x))\\
&\le sLip\Big(T^{n-1}\Big)D_s(x, Tx) + sD_s(T^n x, \omega(x)).
\end{aligned}
$$

Se sigue que,

$$
\begin{aligned}
D_s(\omega(x), T\omega(x)) &\le s\Big(D_s(\omega(x), T^n x)\\
&\qquad +D_s(T^n x, T\omega(x))\Big)\\
&= sD_s(\omega(x), T^n x)\\
&\qquad +sD_s\Big(T(T^{n-1}x), T\omega(x)\Big)\\
&\le sD_s(\omega(x), T^n x)\\
&\qquad +sLip(T)D_s(T^{n-1}x, \omega(x))\\
&\le sD_s(\omega(x), T^n x)\\
&\qquad +sLip(T)\Big[sLip(T^{n-1})D_s(x, Tx) + sD_s(T^n x, \omega(x))\Big]\\
&= sD_s(\omega(x), T^n x) + [s]^2 Lip(T)Lip(T^{n-1})D_s(x, Tx)\\
&\qquad +[s]^2 Lip(T)D_s(T^n x, \omega(x))\\
&\le sD_s(\omega(x), T^n x)\\
&\qquad +[s]^2 Lip(T)\Big(Lip(T^{n-1})D_s(x, Tx) + D_s(T^n x, \omega(x))\Big).
\end{aligned}
$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} D_s(\omega(x), T^n x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} Lip(T^{n-1}) = 0,$$

obtenemos que:

$$D_s(\omega(x), T\omega(x)) = 0 \quad \text{si y solo si} \quad T\omega(x) = \omega(x).$$

En lo que sigue, demostrarémos que, T tiene como máximo un punto fijo. Sean ω_1 y ω_2 dos puntos fijos de T. Tenemos que, para cualquier $n \ge 1$

$$D_s(\omega_1, \omega_2) = D_s(T^n\omega_1, T^n\omega_2) \le Lip(T^n)D_s(\omega_1, \omega_2).$$

Dado que, $\lim_{n\to\infty} Lip(T^n) = 0$, se sigue que:

$$D_s(\omega_1, \omega_2) = 0, \quad \text{si y solo si,} \quad \omega_1 = \omega_2.$$

Por lo que, $\omega(x) = \omega(y)$ para cualquier $x, y \in X$, esto completa la demostración del teorema. □

A continuación hacemos notar que, el mismo ejemplo dado por Mohamed (Mohamed, 2010), se satisface para los espacios de tipo b–métrico extendido. Antes un resultado muy elemental

Nota 4.7. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, la siguiente relación se satisface:

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2). \tag{15}$$

Demostración. Procedamos por casos:

Caso(1) $a = b$. Para este primer caso, la desigualdad (15) se satisface.

Caso(2). $a \neq b$. Para este segundo caso, tenemos que: $0 \leq (a-b)^2$ si y solo si $0 \leq a^2+b^2-2ab$ si y solo si $2ab \leq a^2+b^2$ si y solo si $a^2+b^2+2ab \leq a^2+b^2+a^2+b^2$ si y solo si $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$. □

Ejemplo 4.8. Sea X el conjunto de funciones medibles de Lebesgue definida en $[0,1]$ tal que

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Defina $D_\theta : X \times X \to [0,\infty)$ por

$$D_\theta(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|^2 dx.$$

Entonces D_θ satisface las siguientes propiedades:

(1) $D_\theta(f,g) = 0$ si y sólo si $f = g$;

(2) $D_\theta(f,g) = D_\theta(g,f)$, para cualesquiera $f, g \in X$;

(3) $D_\theta(f,g) \leq \theta(f,g,h)(D_\theta(f,h) + D_\theta(h,g))$, para cualesquiera elementos $f, g, h \in X$. En efecto, para ver el inciso (1), supongamos que, $D_\theta(f,g) = 0$ y existe $x \in [0,1]$ tal que, $f(x) \neq g(x)$. Entonces

$$D_\theta(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|^2 dx > 0;$$

pero esto contradice al supuesto. Así que, $D_\theta(f,g) = 0$, implica que, $f = g$. Nótese que $f = g$ implica $D_\theta(f,g) = 0$ es inmediato. El inciso (2), se satisface trivialmente.

Para ver el inciso (3), sean $f, g, h \in X$ y pongamos

$$a = f(x) - h(x), \quad b = h(x) - g(x)$$

y $\theta(f,g,h) = |f(x)| + |g(x)| + |h(x)| + 2$ para cualquier $x \in [0,1]$. Por la desigualdad (15), obtenemos que:

$$\begin{aligned}(f(x)-g(x))^2 &= (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2) \\ &= 2\Big((f(x)-h(x))^2 + (h(x)-g(x))^2\Big).\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}D_\theta(f,g) &= \int_0^1 |f(x)-g(x)|^2 dx \\ &\leq 2\Big(\int_0^1 |f(x)-g(x)|^2 dx + \int_0^1 |h(x)-g(x)|^2 dx\Big). \\ &< \theta(f,g,h)\Big(D_\theta(f,h) + D_\theta(h,g)\Big).\end{aligned}$$

Recordemos que, un subconjunto Y de X es acotado siempre que

$$sup\{D_\theta(x,y) : x, y \in Y\} < \infty,$$

y una función $f : X \to Y$ está acotado si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que, $|f(x)| \leq K$ para cualquier $x \in X$.

Sea $T : X \to X$ un mapeo. Si existe un $x_0 \in X$ tal que, el conjunto

$$\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, Tx_0, T^2x_0, \ldots\} = \{T^n x_0 : \quad n \in \mathbb{N}\} \subseteq X,$$

entonces el conjunto $\mathcal{O}(x_0)$ es conocido como una órbita de $x_0 \in X$.

Teorema 4.9. *Sea (X, D_θ) un espacio de tipo b–métrico extendido completo. Supongamos que, $T : X \to X$ es un mapeo tal que T^n es Lipschitzian para cualquier $n \geq 0$ y $\lim_{n\to\infty} Lip(T^n) = 0$. Entonces T tiene un único punto fijo si y sólo si existe una órbita acotada. Además, si T tiene un punto fijo ω, entonces para cualquier $x \in X$, la órbita $\{T^n x\}$ converge a ω.*

Demostración. Supongamos que, existe un único elemento $x_0 \in X$, tal que $Tx_0 = x_0$. De aquí que,

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(x_0) &= \{x_0, Tx_0, T^2x_0, \ldots, T^n x_0, \ldots,\} \\ &= \{x_0, x_0, x_0, \ldots, x_0, \ldots,\} \\ &= \{x_0\}.\end{aligned}$$

Sean $x, y \in \mathcal{O}(x_0)$. Nótese que, para cualquier $\delta > 0$, se tiene que:

$$D_\theta(x,y) = D_\theta(x_0,x_0) = D_\theta(Tx_0,Tx_0) = 0 < \delta.$$

Luego, la órbita $\mathcal{O}(x_0)$ está acotada.

Para ver la otra implicación, supongamos que, para cada $x \in \mathcal{O}(x_0)$, $\{T^n x : \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ está acotado. Así, existe $c \geq 0$ tal que $D_\theta(T^n x, T^m x) \leq c$, para cualesquiera $n, m \geq 0$. En particular, para $n = 0$ y $m = h$, obtenemos que:

$$D_\theta(x, T^h x) = D_\theta(T^0 x, T^h x) \leq c.$$

De aquí que, para $n, h \geq 0$:

$$\begin{aligned}D_\theta(T^{n+h}x, T^n x) &= D_\theta(T^n(T^h x), T^n x) \\ &\leq Lip(T^n) D_\theta(T^h x, x) \\ &\leq Lip(T^n) c.\end{aligned}$$

Por hipótesis, $lim_{n\to\infty} Lip(T^n) = 0$, se sigue que,

$$lim_{n\to\infty} D_\theta(T^{n+h}x, T^n x) = 0.$$

Así, $\{T^n x\}$ es una sucesión de Cauchy. Como X es completo, $\{T^n x\}$ converge algún punto $\omega(x)$. La parte restante de la demostración se sigue del Teorema 4.4. □

Corolario 4.10. *Sea (X, D_s) un espacio de tipo b–métrico completo. Supongamos que, $T : X \to X$ es un mapeo tal que T^n es Lipschitzian para cualquier $n \geq 0$ y $\lim_{n\to\infty} Lip(T^n) = 0$. Entonces T tiene un único punto fijo si y solo si existe una órbita acotada. Además, si T tiene un punto fijo ω, entonces para cualquier $x \in X$, la órbita $\{T^n x\}$ converge a ω.*

Demostración. Supongamos que, existe un único elemento $x_0 \in X$, tal que $Tx_0 = x_0$. De aquí que,

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(x_0) &= \{x_0, Tx_0, T^2x_0, \ldots, T^nx_0, \ldots,\}\\ &= \{x_0, x_0, x_0, \ldots, x_0, \ldots,\}\\ &= \{x_0\}.\end{aligned}$$

Sean $x, y \in \mathcal{O}(x_0)$. Nótese que, para cualquier $\delta > 0$, se tiene que:

$$D_s(x, y) = D_s(x_0, x_0) = D_s(Tx_0, Tx_0) = 0 < \delta.$$

Luego, la órbita $\mathcal{O}(x_0)$ está acotada.

Para ver la otra implicación, supongamos que, para cada $x \in \mathcal{O}(x_0)$, $\{T^nx : \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ está acotado. Así, existe $c \geq 0$ tal que $D_\theta(T^nx, T^mx) \leq c$, para cualesquiera $n, m \geq 0$. En particular, para $n = 0$ y $m = h$, obtenemos que:

$$D_s(x, T^hx) = D_s(T^0x, T^hx) \leq c.$$

De aquí que, para $n, h \geq 0$:

$$\begin{aligned}D_s(T^{n+h}x, T^nx) &= D_s(T^n(T^hx), T^nx)\\ &\leq Lip(T^n)D_s(T^hx, x)\\ &\leq Lip(T^n)c.\end{aligned}$$

Por hipótesis, $lim_{n\to\infty}Lip(T^n) = 0$, se sigue que,

$$lim_{n\to\infty}D_s(T^{n+h}x, T^nx) = 0.$$

Así, $\{T^nx\}$ es una sucesión de Cauchy. Como X es completo, $\{T^nx\}$ converge algún punto $\omega(x)$. La parte restante de la demostración se sigue del Corolario 4.6.

□

La conexión entre la Proposición 4.3 y el Teorema 4.9 se dan en el siguiente corolario.

Corolario 4.11. *Sean (X, d_θ) un espacio b–métrico extendido del cono sobre el espacio de Banach E y P un cono θ–normal de E. Además, supongamos que, $\theta : X \times X \times X \to [1, \infty)$ es un funcional acotado. Consideremos $D_\theta : X\times X \to [0, \infty)$ definido por:*

$$D_\theta(x, y) = \|d_\theta(x, y)\|, \quad \text{para} \quad \text{cualesquiera} \quad x, y \in X.$$

Sea $T : X \to X$ una contracción con constante $0 < \alpha < 1$ y Lipchitzian. Entonces para cualesquiera $x, y \in X$ y $n \geq 0$,

$$D_\theta(T^nx, T^ny) \leq |\kappa|(\alpha)^{n-1}KD_\theta(x, y).$$

Demostración. Por la Definición 3.5 y la Nota 3.9, (X, D_θ) es un espacio de tipo b–métrico extendido. Sean $x, y \in X$ y $n \geq 0$. Por ser T una contracción con constante $0 < \alpha < 1$ y θ acotado, obtenemos que:

$$\begin{aligned}D_\theta(T^nx, T^ny) &= D_\theta\Big(T(T^{n-1}x), T(T^{n-1}y)\Big)\\ &\leq \alpha D_\theta(T^{n-1}x, T^{n-1}y)\\ &\leq (\alpha)^2D_\theta\Big(T^{n-2}x, T^{n-2}y\Big)\\ &\leq (\alpha)^3D\Big(T^{n-3}x, T^{n-3}y\Big)\\ &\ \ \vdots\\ &\leq (\alpha)^{n-1}D_\theta\Big(T^{n-(n-1)}x, T^{n-(n-1)}y\Big)\\ &= (\alpha)^{n-1}D_\theta\Big(Tx, Ty\Big)\\ &\leq (\alpha)^{n-1}|\kappa|\theta(x, y, z)D_\theta(x, y)\\ &\leq (\alpha)^{n-1}|\kappa|KD_\theta(x, y).\end{aligned}$$

Como $Lip(T^n)$ es la mínima constante tal que

$$D_\theta(T^nx, T^ny) \leq Lip(T^n)D_\theta(x, y),$$

se sigue que, $Lip(T^n) \leq (\alpha)^{n-1}|\kappa|K$ para cualquier $n \geq 0$. Dado que, $\sum_{n\geq 0}(\alpha)^n$ es convergente, obtenemos que, $\sum_{n\geq 0} Lip(T^n)$ tambien converge, así $\text{lím}\, Lip(T^n) = 0$. Luego, a partir del Teorema 4.9, se desprende que, T tiene un punto fijo único ω y así cualquier órbita converge a ω. □

Tenemos algo similar para los D_s.

Corolario 4.12. *Sean (X, d) un espacio b–métrico del cono sobre el espacio de Banach E y P un cono normal de E. Consideremos $D_s : X \times X \to [0, \infty)$ definido por:*

$$D_s(x, y) = \|d(x, y)\|, \quad \text{para} \quad \text{cualesquiera} \quad x, y \in X.$$

Sea $T : X \to X$ una contracción con constante $0 < \alpha < 1$ y Lipchitzian. Entonces para cualesquiera $x, y \in X$ y $n \geq 0$,

$$D_s(T^nx, T^ny) \leq |\kappa|(\alpha)^{n-1}sD_s(x, y).$$

Nota 4.13. A partir de los Corolarios 4.11 y 4.12, vemos que, para el caso $n = 1$, $Lip(T) \leq |\kappa|K$ y $Lip(T) \leq |\kappa|s$. Como no podemos garantizar que, $|\kappa|K$ y $|\kappa|s$ sean menor que 1, se sigue que, T no puede ser una contracción para los mapeos D_θ y D_s. Esta es la razón por la que, los teoremas y corolarios anteriores se expresaron en términos de $Lip(T^n)$.

5. Aplicaciones

El objetivo de esta última sección, está en encontrar soluciones de ecuaciones matriciales lineales, utilizando algunos teoremas del punto fijo visto en la sección 4.

Denotemos por $\mathcal{H}(n)$ el conjunto de todas las matrices Hermitianas de $n\times n$ y $\mathcal{P}(n) \subseteq \mathcal{H}(n)$ el espacio de todas las matrices definidas positivas. Así, para las $X \in P(n)$ diremos que $X > 0$. Además, $X \geq 0$ denota que $X \in S(n)$. Tambien usaremos $X \geq Y$ ($X \leq Y$) en lugar de $X - Y \geq 0$ ($0 \leq Y - X$).

Consideremos las siguientes ecuaciones matriciales:

$$X - A_1^*XA_1 - \ldots - A_m^*XA_m = Q \tag{16}$$

y

$$X + A_1^*XA_1 + \ldots + A_m^*XA_m = Q, \tag{17}$$

donde $Q \in \mathcal{P}(n)$, A_i para $i = 1, \ldots, m$ y $A = (a_{kl})$ con $1 \leq k, l \leq n$ son matrices arbitrarias de $n\times n$. También 0_n denota la matrix nula de $n \times n$.

Por otra parte, $A \in \mathcal{H}(n)$ si y solo si $\overline{a}_{kl} = a_{lk}$, donde $\overline{a}_{kl} = x_{kl} - iy_{kl}$. Ahora, en $\mathcal{H}(n)$ definamos un orden parcial como sigue: para cualesquiera $A, B \in \mathcal{H}(n)$, $A \preceq B$ si y solo si $B \leq A$. Tenemos que;

(i) para cada $A \in \mathcal{H}(n)$, $A \leq A$.

(ii) Para cualesquiera $A, B, C \in \mathcal{H}(n)$, $A \leq B$ y $B \leq C$ si y solo si $B \leq A$ y $C \leq B$. Pero, $C \leq B$ y $B \leq A$ implican que, $C \leq A$. Así, $A \leq C$.

(iii) Para cada $A, B \in \mathcal{H}(n)$, $A \leq B$ y $B \leq A$ implican que $A = B$.

En lo que sigue, vamos a especificar qué métrica generalizada usaremos en $\mathcal{H}(n)$.

Definamos $d_\theta : \mathcal{H}(n) \times \mathcal{H}(n) \to \mathcal{H}(n)$ por:

$$d_\theta(A, B) = B - A, \quad \text{para} \quad \text{cualesquiera} \quad A, B \in \mathcal{H}(n).$$

Afirmamos que, d_θ es una b–métrica extendida del cono. En efecto, sean $A, B, C \in \mathcal{H}(n)$;

(Md_θ1) $d_\theta(A, B) \geq 0_n$ si y solo si $B - A \geq 0_n$ si y solo si $B \geq 0_n + A = A$.

(Md_θ2) $d_\theta(A, B) = 0_n$ si y solo si $B - A = 0_n$ si y solo si $B = 0_n + A = A$.

(Md_θ3) $d_\theta(A, B) = d_\theta(B, A)$ si y solo si $B = A$.

(Md_θ4). Pongamos $\theta = d_\theta \mid_{\mathcal{P}(n)}$, donde $d_\theta \mid_{\mathcal{P}(n)}$ es la restricción de d_θ sobre $\mathcal{P}(n)$. Esto es, para cualesquiera $A, B, C \in \mathcal{P}(n)$, sea $\theta(A, B, C) = \|A + B + C\|_1 + 1$, la norma $\| \cdot \|_1$ es definida por

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^{n} s_i(A) = tr\Big(\sqrt{(A^*A)}\Big),$$

donde los $s_i(A)$, con $i = 1, \ldots, n$ son los valores singulares de A y $tr(A)$, denota la traza de A para matrices Hermitianas no negativas. Así,

$$\theta : \mathcal{P}(n) \times \mathcal{P}(n) \times \mathcal{P}(n) \to [1, \infty)$$

y $d_\theta(A, B) \leq \theta(A, B, C)(d(A, C) + d(C, B))$ si y solo si $B - A \leq \theta(A, B, C)(C - A + B - C)$.

Así, la pareja $(\mathcal{H}(n), d_\theta)$ es un espacio b-métrico extendido del cono y d_θ una b–métrica extendida del cono.

Definamos $f : \mathcal{H}(n) \to [0, \infty)$ como sigue: $f(A) = \|A\|_1$ para cada $A \in \mathcal{H}(n)$.

Notémos que, $D_\theta : \mathcal{H}(n) \times \mathcal{H}(n) \to [0, \infty)$ satisface

$$\begin{aligned} D_\theta(A, B) &= (f \circ d_\theta)(A, B) \\ &= f(d_\theta(A, B)) \\ &= \|d_\theta(A, B)\|_1 \\ &= \|B - A\|_1 \\ &= tr(B - A) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(b_{kk} - a_{kk}). \end{aligned}$$

El conjunto $\mathcal{H}(n)$ dotado de esta norma es un espacio de tipo b–métrico extendido completo. En efecto, sean $A, B, C \in H(n)$.

(D_θ1) Es claro que, si $B = A$, entonces $D_\theta(A, B) = tr(B - A) = 0$.

Para ver la otra implicación, supongamos que, $D_\theta(A, B) = 0$ y $B \neq A$, entonces existe $1 \leq k \leq n$ tal que, $b_{kk} \neq a_{kk}$. Pero, esto contradice al supuesto que, $D_\theta(A, B) = \sum_{k=1}^{n}(b_{kk} - a_{kk}) = 0$.

(D_θ2) $D_\theta(A, B) = D_\theta(B, A)$ si y solo si $\|B - A\|_1 = \|A - B\|_1$ si y solo si $tr(B - A) = 0$.

(D_θ3) Sea $\theta(A, B, C) = \|A + B + C\|_1 + 1$ con $A, B, C \in \mathcal{P}(n)$. Se sigue que, $\theta : \mathcal{P}(n) \times \mathcal{P}(n) \times \mathcal{P}(n) \to [1, \infty)$ y

$$\begin{aligned} D_\theta(A, B) &= \|B - A\|_1 \\ &\leq \|B - C + C - A\|_1 \\ &\leq \theta(A, B, C)(\|B - C\|_1 + \|C - A\|_1) \\ &\leq \theta(A, B, C)(D_\theta(A, C) + D_\theta(C, B)). \end{aligned}$$

Para ver la Completez, sea $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesion de Cauchy en $\mathcal{H}(n)$. Queremos encontrar un elemento A en $\mathcal{H}(n)$ tal que, para cada $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ de tal forma que, para cada $m \geq N(\epsilon)$, se tenga que, $D_\theta(A_m, A) < \epsilon$.

Por hipótesis, $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio $\mathcal{H}(n)$. Así, dado $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, si $o, m \geq N(\epsilon)$, entonces

$$D_\theta(A_m, A_o) < \epsilon/2. \tag{18}$$

De aquí que,

$$\|A_o - A_m\|_1 = tr(A_o - A_m) = \sum_{k=1}^{n}(a_{kk}^o - a_{kk}^m) < \epsilon/2,$$

donde, para cada $1 \leq k \leq n$, obtenemos que, $(a_{kk}^o - a_{kk}^m)$ son las componentes de la diagonal de la matrix $A_o - A_m$. Pero, $A_m \in \mathcal{H}(n)$ si y solo si $\overline{a}_{kk}^m = a_{kk}^m$ si y solo si $x_{kk}^m - iy_{kk}^m = x_{kk}^m + iy_{kk}^m$ si y solo si $y_{kk}^m = 0$. Así, $a_{kk}^m = x_{kk}^m$ y, de manera similar, $a_{kk}^o = x_{kk}^o$.

Esto demuestra que, para cada $1 \leq k \leq n$ fijo, $\{x_{kk}^o\}_{o=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy de números reales. Dado que $\mathbb{R}$ es completo, se sigue que, $lim_{o\to\infty} x_{kk}^o = x_{kk}$. Es decir,

$$lim_{o\to\infty} x_{11}^o = x_{11}, \ldots, lim_{o\to\infty} x_{kk}^o = x_{kk}, \ldots, lim_{o\to\infty} x_{nn}^o = x_{nn}.$$

Usando estos n limites, denotemos por

$$(x_{11}, \ldots, x_{kk}, \ldots, x_{nn})$$

las componentes de la diagonal de la matrix A. Nuevamente, nótese que, $\overline{a}_{kk} = a_{kk}$ si y solo si $x_{kk} - iy_{kk} = x_{kk} + iy_{kk}$ si y solo si $y_{kk} = 0$. O sea, $a_{kk} = x_{kk} = \overline{a}_{kk}$. De aquí que, $A \in \mathcal{H}(n)$.

A partir de la expresión (18), obtenemos que,

$$D_\theta(A_m, A) \leq D_\theta(A_m, A_o) + D_\theta(A_o, A) < \epsilon.$$

si y solo si

$$D_\theta(A_m, A) \leq \sum_{k=1}^{n}(x_{kk}^o - x_{kk}^m + x_{kk} - x_{kk}^o) < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se sigue que, $lim_{m\to\infty} A_m = A$. Esto demuestra que, la sucesión A_m converge a A.

Sean $T : \mathcal{H}(n) \to \mathcal{H}(n)$ y $H : \mathcal{H}(n) \to \mathcal{H}(n)$ definidas por:

$$T(X) = Q + \sum_{j=1}^{m} A_j^* X A_j \quad \text{y} \quad H(X) = Q - \sum_{j=1}^{m} A_j^* X A_j.$$

Nótese que $T(X) = X$, es decir, los puntos fijos de T son las soluciones de (16). Similarmente los puntos fijos de H son las soluciones de (17). Además,

$$T^2(X) = T(T(X)) = T(X) = X, \ldots, T^n(X) = X,$$

y
$$H^2(X) = H(H(X)) = H(X) = X, \ldots, H^n(X) = X.$$
Por otra parte, la orbita
$$\mathcal{O}(X) = \{X, TX, T^2X, \ldots\} = \{X\} \subseteq \mathcal{H}(n),$$
está acotada, ya que, para cualesquiera $Z, W \in \mathcal{O}(X)$, y cualquier $\delta > 0$, se tiene que:
$$D_\theta(Z, W) = D_\theta(X, X) = D_\theta(TX, TX) = 0 < \delta.$$

T^n es Lipchitziana.
$$D_\theta(T^n(X), T^n(Y)) \leq \|\kappa\|\theta(A, B, C)D_\theta(X, Y),$$
si y solo si
$$D_\theta(X, Y) \leq \|\kappa\|\theta(A, B, C)D_\theta(X, Y)$$
si y solo si
$$\|\kappa\|\theta(A, B, C) \geq 1$$
si y solo si
$$\kappa \geq (\theta(A, B, C))^{-1} \quad \text{o} \quad \kappa \leq -(\theta(A, B, C))^{-1}.$$
Si $(\theta(A, B, C))^{-1} \leq \kappa < 1$, entonces T es una contracción y, $\lim_{n\to\infty} Lip(T^n) = \lim_{n\to\infty} \kappa^n = 0$. Como $\mathcal{O}(X)$ está acotada, se sigue por el Teorema 4.9 que, T tiene un único punto fijo.

Por otra parte, para $\kappa \geq 1$, obtenemos que, T no es una contracción y así, $\lim_{n\to\infty} Lip(T^n) = \lim_{n\to\infty} \kappa^n \neq 0$. Por el Teorema 4.9, T no posee un único punto fijo, aunque la $\mathcal{O}(X)$ esté acotada.

Al sustituir $\theta(A, B, C) = s$, obtenemos algo similar para los espacios de tipo b–métrico.

6. Conclusiones

Ahora, mencionamos lo que creemos son los aportes de esta investigación: Das y Bag (Das y Bag, 2022) introducen la noción de espacio b–métrico extendido del cono. Hacen notar que, al sustituir $\theta(x, y, z) = s$ se obtiene la definición de espacio b–métrico del cono y, para $\theta(x, y, z) = 1$ la noción de espacio métrico del cono. Nosotros en este trabajo proporcionamos un camino diferente para obtener la definición de Das. Damos a conocer nuevas definiciones; en particular la de θ–normal, este concepto como lo hicimos notar, nos permitió generalizar los resultados dados por Mohamed (Mohamed, 2010). Al sustituir $\theta(x, y, z) = s$, $s = 1$ y, recurrir a la definición de espacio b–métrico del cono proporcionado por N. Hussain y M. H. Shah (Hussain y Shah, 2011), obtuvimos la definición de espacio de tipo b–métrico extendido y de tipo b–métrico, estos últimos conceptos nos permite dar a conocer Teoremas y corolarios que guardan una estrecha relación con el punto fijo. A continuación puntualizamos con más detalle:

(i) Las Definiciones 2.6, 2.10 incisos (a) y (b), 3.2, 3.5 y 3.6.

(ii) Ejemplo 2.12.

(iii) Las Notas.

(iv) Teoremas 4.4 y 4.9.

(v) Los corolarios. Entre otros resultados.

Pregunta. ¿Podrémos generalizar los resultados obtenidos en el trabajo de Investigación (Martínez Cruz y Hernández-Piña, 2022), a su versión de espacios de tipo b–métrico del cono y b–métrico extendido del cono?

Agradecimientos

Los autores damos las gracias a los árbitros por la revisión exhaustiva y las sugerencias a nuestro trabajo. Ellos han contribuido a que esta investigación sea una realidad.

Referencias

Banach, S. (1922). Sur les operations dans les ensembles abs traits et leur application aux equation integrables. *Fundations Mathematical*, 3:133–181.

Das, A. y Bag, T. (2022). Some fixed point theorems in extended cone \(b\)-metric spaces. *Commun. Math. Appl.*, 13(2):647–659.

Huang, L.-G. y Zhang, X. (2007). Cone metric space and fixed point theorems of contractive mapping. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 322:1468–1476.

Hussain, N. y Shah, M. (2011). Kkm mapping in cone b–metric spaces. *Computers & Mathematics with Applications*, 62(4):1677–1684.

Martínez Cruz, R. y Hernández-Piña, E. (2022). Funciones que preservan la b–métrica extendida y otras mÂ´étricas relacionadas. *PÄDI bol. cient. cienc. básicas ing. ICBI*, 9(18):47–55.

Mohamed, A. K. (2010). Remarks on cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings. *Fixed Point Theory and Applications*, 315398:1–7.