

Texturas de dos ceros en el sector leptónico: análisis numérico 2-zeros texture in the leptonic sector: numerical analysis

A. Montiel-Hernández ^{a,*}, P. Miranda-Romganoli ^a, R. Noriega-Papaqui ^a

^aÁrea Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Pachuca, Hidalgo, México.

Resumen

En una extensión del Modelo Estándar (ME) se realiza un análisis numérico de los elementos de las matrices de masa del sector leptónico, contemplando que poseen una estructura conjunta de texturas de dos ceros. Considerando solamente la contribución de Dirac para las matrices de masa de los neutrinos, se analiza tanto la jerarquía normal como la inversa. Para el análisis numérico de las restricciones de los parámetros libres del modelo de texturas utilizado se implementa un algoritmo de optimización bio-inspirado tipo PSO y se aplica un criterio de chi-cuadrada (χ^2) de tal manera que se reproduzcan los valores experimentales de los elementos de la matriz U_{PMNS} . Se muestran las curvas de nivel para analizar los elementos B_ν , C_ν y D_ν de las matrices de masa, y se presentan las expresiones analíticas para dichas curvas. A través de un análisis numérico combinado se encuentra una jerarquía para A_ν , B_ν , C_ν , D_ν y E_ν .

Palabras Clave: Matrices de masa, texturas con ceros, jerarquía normal, jerarquía inversa, algoritmo PSO.

Abstract

In an extension of the Standard Model (SM), a numerical analysis is performed on the elements of the mass matrices in the leptonic sector, considering that they possess a joint structure of two-zero textures. Considering only the Dirac contribution for the neutrino mass matrices, both normal and inverse hierarchies are analyzed.

For the numerical analysis of the constraints on the free parameters of the texture model, a bio-inspired optimization PSO algorithm is implemented, a chi-squared (χ^2) criterion is applied to reproduce the experimental values of the elements of the U_{PMNS} matrix. Contour plots are shown to analyze the elements B_ν , C_ν , and D_ν of the mass matrices, and analytical expressions for these curves are presented. Through a combined numerical analysis, a hierarchy is found between A_ν , B_ν , C_ν , D_ν , and E_ν .

Keywords: Mass matrices, 2-zeros texture, normal hierarchy, inverted hierarchy, PSO algorithm.

1. Introducción

El esfuerzo en la búsqueda de la estructura del universo a una escala fundamental en las partículas y las fuerzas que lo componen dio como resultado una teoría, conocida como el Modelo Estándar (ME) de las partículas fundamentales (Weinberg (1967); Glashow (1961); Salam (1968)), que a pesar del éxito que ha tenido al predecir una multitud de fenómenos con gran precisión, aún nos deja preguntas profundas y complejas que han desafiado a los científicos por mucho tiempo, como la explicación del origen de la masa de las partículas fundamentales, en especial la de los neutrinos (Mohapatra et al. (2007); King (2004)).

En el ME existen 12 fermiones fundamentales, seis en el

sector de quarks (u , c , t , d , s y b) y seis en el sector leptónico: electrón (e), muón (μ), tau (τ), neutrino del electrón (ν_e), neutrino del muón (ν_μ) y neutrino del tau (ν_τ).

En la versión original del ME, los neutrinos no se consideran como partículas masivas, sin embargo, debido al fenómeno de oscilaciones de neutrinos detectado experimentalmente por la colaboración Super-Kamiokande (Fukuda (1998)), es necesario modificar el ME para incluir neutrinos masivos. La forma más sencilla de realizar esto, y la que se estudiará en este trabajo, es considerar que los neutrinos adquieran su masa de la misma manera que los leptones cargados (Kanemura et al. (2016)), esto es, considerar una matriz de Yukawa que genere su masa.

Así pues, las masas de los leptones se gesta a partir de *matrices de masa*, se considera una para leptones cargados y otra pa-

*Autor de correspondencia: mo337998@uaeh.edu.mx

Correos electrónicos: mo337998@uaeh.edu.mx (Andrea Montiel-Hernández), pmiranda@uaeh.edu.mx (Pedro Miranda-Romagnoli), rnoriega@uaeh.edu.mx (Roberto Noriega-Papaqui).

Historial del manuscrito: recibido el 25/09/2024, última versión-revisada recibida el 06/12/2024, aceptado el 29/01/2025, publicado el 26/04/2025. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v13iEspecial.13803>



ra neutrinos, estas nos ayudan a encontrar las matrices de rotación que estructuran la matriz de *Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata* (U_{PMNS}) que está definida como el producto de las matrices que diagonaliza a los leptones cargados y a los neutrinos. Sin embargo, debido al formalismo matemático que utilizamos, las matrices de masa quedan completamente desconocidas y en consecuencia, no es posible predecir de forma teórica las masas de los leptones ni la matriz de mezcla U_{PMNS} , siendo el experimento quien nos proporciona el valor numérico de estas cantidades.

Una iniciativa fenomenológica por comprender este problema comienza con Haral Frisch (Fritzsch (1977, 2000)), quien dio origen al llamado formalismo de texturas que se enfoca en buscar estructuras simples, con ceros en algunas entradas, de las matrices de masa tal que puedan predecir satisfactoriamente la jerarquía de masas, obtener las expresiones analíticas para la matriz U_{PMNS} y predecir los ángulos de mezcla.

El modelo texturas con 2-ceros que se considera en este trabajo se valida al construir una función, que llamaremos $\chi^2(X)$, de esta se deben encontrar valores permisibles de los parámetros X libres del modelo tal que esta función tome valores entre 0 y 1. En el caso particular del formalismo de texturas en el sector leptónico (Barranco et al. (2010); Ludl and Grimus (2014)), la función $\chi^2(X)$ tiene una gran dificultad proveniente de una pesada y complicada manipulación algebraica de las expresiones involucradas, las cuales, hacen inaccesible un análisis teórico y, por lo tanto, nos obliga a realizarlo numéricamente.

En este trabajo consideraremos un algoritmo de optimización bio-inspirado para el análisis numérico, en particular trabajaremos con una variante del algoritmo de Optimización por Enjambre de Partículas, PSO por sus siglas en inglés (Cuevas et al. (2021); Kennedy and Eberhart (1995); Wiley and Sons (2007); Clerc and Kennedy (2002); Martínez-Guerrero et al. (2024)), para encontrar las regiones permitidas de los seis parámetros y las dos fases provenientes del modelo de texturas utilizado, y realizaremos un análisis gráfico de los elementos de las matrices de masa correspondientes.

El presente documento se encuentra dividido de la siguiente manera: en la sección 2, considerando neutrinos de Dirac, se presenta cómo de forma teórica los neutrinos adquieren masa, la jerarquía normal y la jerarquía inversa así como la matriz U_{PMNS} . En la sección 3, se muestra el formalismo de texturas utilizado, el proceso de diagonalización respectivo, se calcula de forma analítica la U_{PMNS} y se obtiene la función $\chi^2(A_e, A_\nu, E_e, E_\nu, \phi_1, \phi_2)$ a optimizar. En la sección 4 se describe el algoritmo utilizado para el cálculo numérico, en la Sección 5 se exponen y analizan los resultados numéricos y finalmente la Sección 6 está reservada para las conclusiones.

2. El sector leptónico de Yukawa del Modelo Estándar con neutrinos de Dirac

En el contexto del ME, los leptones son descritos por una composición de dos componentes: la levógira (L) y la dextrógira (R). Matemáticamente, son descritas por funciones etiquetadas por l_L , ν_L y l_R . Las componentes izquierdas bajo el grupo

$SU(2)$ trasforman como dobletes y las derechas como singletes. En la versión original del ME no se incluye la componente derecha para los neutrinos ocasionando que no se consideren partículas masivas.

La existencia de la masa de los neutrinos requiere ir más allá del ME, en este trabajo introduciremos el término ν_R como singlete en $SU(2)$, lo que modifica al sector leptónico de Yukawa del ME. Omitiendo las contribuciones de Majorana, el lagrangiano de Yukawa tiene la forma:

$$\mathcal{L}_Y = -\bar{L}'_L (Y^l \phi l'_R + Y^\nu \tilde{\phi} \nu'_R) + \text{h.c.}, \quad (1)$$

donde $\bar{L}'_L = (\nu'_L, l'_L)^T$, $\phi = (\varphi^\pm, \varphi^0)$ y Y^f ($f = l, \nu$) representa las matrices 3×3 de Yukawa, éstas generan las masas de los neutrinos, y el término h.c hace referencia al hermítico conjugado.

Realizando el siguiente cambio de base, a través de las relaciones:

$$l'_R = U_R^L l_R, \quad \nu'_R = U_R^\nu \nu_R,$$

de la ecuación (1) se obtiene el lagrangiano de masas, el cual tiene la forma:

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -\bar{l}_L \bar{M}^l l_R - \bar{\nu}_L \bar{M}^\nu \nu_R + \text{h.c.}, \quad (2)$$

donde $M^f = (\frac{\nu}{\sqrt{2}} Y^f)$, ($f = l, \nu$) es conocida como la matriz de masa, esta se puede diagonalizar de manera general por una transformación biunitaria (Friedberg et al. (2006)):

$$\bar{M}^f = U_L^{f\dagger} M^f U_R^f = \text{Diag}(\lambda_1^f, \lambda_2^f, \lambda_3^f), \quad (3)$$

donde λ_i^f son los eigenvalores de la matriz de masa. Considerando está matriz hermítica, las matrices $U_{L,R}$ son unitarias y cumplen $U_L^f = U_R^f = U^f$ y la matriz de mezcla U_{PMNS} se construyen a partir de las matrices de rotación U^f bajo la relación:

$$U_{PMNS} = U^{\nu\dagger} U^l. \quad (4)$$

Como puede observarse, no se pueden conocer de forma teórica las entradas de esta matriz, siendo el experimento quien realiza esta labor.

2.1. Jerarquía de masas

Dentro del formalismo matemático utilizado para explicar el fenómeno de las oscilaciones de neutrinos la dependencia de las masas de los neutrinos está dada por la diferencia de los cuadrados de sus masas, que es conocido como el parámetro Δm_{ij}^2 ($= m_i^2 - m_j^2$)¹, lo que implica que existan dos escenarios posibles para su ordenamiento, conocidos como: Jerarquía Normal (NH) y Jerarquía Inversa (IH).

2.1.1. Jerarquía Normal (NH)

En esta configuración de las masas de los neutrinos, el estado de masa más ligero es ν_1 seguido por ν_2 , y el más pesado es ν_3 . Esto significa que $m_{\nu_e} < m_{\nu_\mu} < m_{\nu_\tau}$ (Esteban et al. (2020); Gonzalez-Garcia et al. (2022)). Los valores experimentales para Δm_{12} , Δm_{31} , y demás parámetros utilizados en este trabajo, se muestran en la Tabla (1).

¹En este trabajo se utilizará la siguiente notación de índices $1 = e$, $2 = \mu$ y $3 = \tau$

2.1.2. Jerarquía Inversa (IH)

En esta configuración, el estado de masa más ligero es ν_3 seguido por ν_1 , y el más pesado es ν_2 . Esto significa que $m_{\nu_\tau} < m_{\nu_e} < m_{\nu_\mu}$ (Esteban et al. (2020); Gonzalez-Garcia et al. (2022)). Los valores experimentales para Δm_{12} , Δm_{31} , y demás parámetros utilizados en este trabajo, se muestran en la Tabla (1).

Tabla 1: Valores experimentales ajustados con sus incertidumbres para jerarquía normal (NH) y jerarquía inversa (IH).

Parámetro	Ajuste $\pm 1\sigma$
Δm_{12}^2	$7,41^{+0,21}_{-0,20} \times 10^{-5} \text{ eV}^2$
Δm_{31}^2 (NH)	$+2,511^{+0,028}_{-0,027} 10^{-3} \text{ eV}^2$
Δm_{31}^2 (IH)	$-2,498^{+0,032}_{-0,025} 10^{-3} \text{ eV}^2$
$\sum m_\nu$ (NH)	$< 0,256 \text{ eV}$
$\sum m_\nu$ (IH)	$< 0,261 \text{ eV}$
J	$33,59 \pm 0,6 \times 10^{-3}$

2.2. La matriz de mezcla U_{PMNS}

De manera general, la matriz U_{PMNS} (ecuación (4)) que contiene información sobre la probabilidad de transición de los neutrinos cuando se propagan libremente y/o participan en procesos de interacción débil y se puede escribir como:

$$U_{PMNS} = \begin{pmatrix} U_{e\nu_e} & U_{e\nu_\mu} & U_{e\nu_\tau} \\ U_{\mu\nu_e} & U_{\mu\nu_\mu} & U_{\mu\nu_\tau} \\ U_{\tau\nu_e} & U_{\tau\nu_\mu} & U_{\tau\nu_\tau} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Experimentalmente, se ha medido el valor numérico de los nueve elementos de la matriz, y están definidos por un rango de valores, dados por (Zyla et al. (2020)):

$$\begin{aligned} |U_{e\nu_e}| &= 0,803 \rightarrow 0,845, & |U_{e\nu_\mu}| &= 0,514 \rightarrow 0,578, & |U_{e\nu_\tau}| &= 0,143 \rightarrow 0,155, \\ |U_{\mu\nu_e}| &= 0,244 \rightarrow 0,498, & |U_{\mu\nu_\mu}| &= 0,502 \rightarrow 0,693, & |U_{\mu\nu_\tau}| &= 0,632 \rightarrow 0,768, \\ |U_{\tau\nu_e}| &= 0,272 \rightarrow 0,517, & |U_{\tau\nu_\mu}| &= 0,473 \rightarrow 0,672, & |U_{\tau\nu_\tau}| &= 0,623 \rightarrow 0,761. \end{aligned}$$

De la ecuación (4) se puede ver que, la matriz U_{PMNS} es unitaria y, por lo tanto, es posible parametrizarla en términos de 3 ángulos y una fase. La parametrización que se utiliza en este trabajo es la *parametrización estándar* definida por los ángulos θ_{12} , θ_{13} , θ_{23} y la fase δ_{13} a través de la siguiente multiplicación de matrices:

$$U_{PMNS} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_{23} & S_{23} \\ 0 & -S_{23} & C_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{13} & 0 & S_{13} e^{-i\delta_{13}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_{13} e^{i\delta_{13}} & 0 & C_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{12} & S_{12} & 0 \\ -S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $C_{ij} = \cos \theta_{ij}$ y $S_{ij} = \sin \theta_{ij}$.

El valor numérico de estos ángulos se da a través de las siguientes expresiones (Branco et al. (1999)):

$$S_{13} = |U_{e\nu_\tau}|, \quad (6)$$

$$S_{12} = \frac{|U_{e\nu_\mu}|}{\sqrt{1 - |U_{e\nu_\tau}|^2}}, \quad (7)$$

$$S_{23} = \frac{|U_{\mu\nu_\tau}|}{\sqrt{1 - |U_{e\nu_\tau}|^2}}, \quad (8)$$

$$J = C_{12} S_{12} C_{13}^2 S_{13} C_{23} S_{23} \sin \delta_{13}. \quad (9)$$

3. Matrices de masa del tipo texturas de 2 ceros

Una matriz de masa del tipo texturas de 2 ceros tiene la siguiente estructura matricial:

$$M_q = \begin{pmatrix} E_f & D_f & 0 \\ D_f^* & C_f & B_f \\ 0 & B_f^* & A_f \end{pmatrix}; \quad f = l, \nu. \quad (10)$$

y cuyos eigenvalores λ_i^f definen las masas m_i^f de los leptones $\lambda_i^f = |m_i^f|$ y los valores experimentales de las masas de los leptones cargados tienen los siguientes valores (Zyla et al. (2020)):

$$m_e = 0,51099895000 \pm 0,00000015 \text{ MeV},$$

$$m_\mu = 105,6583755 \pm 0,0000023 \text{ MeV},$$

$$m_\tau = 1776,86 \pm 0,12 \text{ MeV}.$$

Ahora, para los neutrinos consideramos que los eigenvalores que representan las masas de estos respetan las relaciones:

$$\sum m^\nu = m_1^\nu + m_2^\nu + m_3^\nu, \quad (11)$$

$$\sum m_\nu^{NH} = m_0^\nu + \sqrt{\Delta m_{12}^2 + (m_0^\nu)^2} + \sqrt{|\Delta m_{31}^2| + (m_0^\nu)^2}, \quad (12)$$

$$\sum m_\nu^{IH} = m_0^\nu + \sqrt{|\Delta m_{31}^2| + (m_0^\nu)^2} + \sqrt{|\Delta m_{31}^2| + \Delta m_{12}^2 + (m_0^\nu)^2}. \quad (13)$$

Para encontrar las matrices U^f que diagonalizan a la matriz de masas M_f , (siguiendo el procedimiento presentado en Fritzsch (2000)). M_f se factoriza como el producto de una matriz ortogonal O_f y una matriz de fases P_f de la forma:

$$M_f = P_f^\dagger \bar{M}_f P_f, \quad (14)$$

donde

$$P_f = \text{diag} \left(1, e^{i\phi_{Df}}, e^{i(\phi_{Df} + \phi_{Bf})} \right). \quad (15)$$

La matriz ortogonal $\bar{M}_f$ se escribe como:

$$\bar{M}_f = \begin{pmatrix} E_f & |D_f| & 0 \\ |D_f| & C_f & |B_f| \\ 0 & |B_f| & A_f \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Los invariantes ante transformaciones de similitud son:

$$\text{Tr}(M^{f\dagger} M^f) = (m_1^f)^2 + (m_2^f)^2 + (m_3^f)^2, \quad (17)$$

$$\text{Det}(M^{f\dagger} M^f) = (m_1^f)^2 (m_2^f)^2 (m_3^f)^2, \quad (18)$$

$$\frac{1}{2} [\text{Tr}(M^{f\dagger} M^f) - \text{Tr}(M^{f\dagger} M^f)] = (m_1^f)^2 (m_2^f)^2 + (m_1^f)^2 (m_3^f)^2 + (m_2^f)^2 (m_3^f)^2. \quad (19)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, para $|B_f|$, $|D_f|$ y C_f expresar en términos de E_f y A_f se tiene:

$$|B_f| = \sqrt{\frac{(A_f - \eta_1 m_1^f)(A_f - \eta_2 m_2^f)(A_f - \eta_3 m_3^f)}{E_f - A_f}}, \quad (20)$$

$$|D_f| = \sqrt{\frac{(E_f - \eta_1 m_1^f)(E_f - \eta_2 m_2^f)(E_f - \eta_3 m_3^f)}{A_f - E_f}}, \quad (21)$$

$$C_f = -(A_f + E_f - \eta_1 m_1^f - \eta_2 m_2^f - \eta_3 m_3^f). \quad (22)$$

Para la jerarquía normal se utilizaron los valores, $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 1$; mientras que para la jerarquía inversa $\eta_1 = \eta_2 = 1$ y $\eta_3 = -1$.

Los elementos de la matriz O_f , que diagonalizan a $\bar{M}_f$ son:

$$\begin{aligned} (O_f)_{11} &= \left[1 + \frac{(E_f - \eta_1 m_1^f)(A_f - E_f)}{(\eta_2 m_2^f - E_f)(\eta_3 m_3^f - E_f)} + \frac{(E_f - \eta_1 m_1^f)(A_f - \eta_2 m_2^f)(\eta_3 m_3^f - A_f)}{(\eta_2 m_2^f - E_f)(\eta_3 m_3^f - E_f)(A - \eta_1 m_1^f)} \right]^{-1/2}, \\ (O_f)_{22} &= \left[1 + \frac{(E_f - \eta_1 m_1^f)(\eta_3 m_3^f - E_f)}{(\eta_2 m_2^f - E_f)(A_f - E_f)} + \frac{(A_f - \eta_1 m_1^f)(\eta_3 m_3^f - A_f)}{(A_f - E_f)(A_f - \eta_2 m_2^f)} \right]^{-1/2}, \\ (O_f)_{33} &= \left[1 + \frac{(A_f - E_f)(\eta_3 m_3^f - A_f)}{(A_f - \eta_2 m_2^f)(A_f - \eta_1 m_1^f)} + \frac{(E_f - \eta_1 m_1^f)(\eta_2 m_2^f - E_f)(\eta_3 m_3^f - A_f)}{(\eta_3 m_3^f - E_f)(A_f - \eta_2 m_2^f)(A_f - \eta_1 m_1^f)} \right]^{-1/2}, \\ (O_f)_{2i} &= \frac{\eta_1 m_1^f - E_f}{|D_f|} (O_f)_{1i}, \quad i = 1, 2, 3. \\ (O_f)_{3i} &= \frac{|B_f|}{\eta_1 m_1^f - A_f} (O_f)_{2i}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los elementos de la matriz U_{PMNS} predichos por el modelo de texturas con 2 ceros son:

$$\begin{aligned} U_{PMNS}^T &= U_L^{\nu\dagger} U_L^l = O_\nu^T (P_\nu P_l^\dagger) O_l, \\ (U_{PMNS}^T)_{i\alpha} &= (O_\nu)_{1i} (O_l)_{1\alpha} + (O_\nu)_{2i} (O_l)_{2\alpha} e^{i\phi_1^f} \\ &\quad + (O_\nu)_{3i} (O_l)_{3\alpha} e^{i(\phi_1^f + \phi_2^f)}, \end{aligned} \quad (23)$$

donde las fases están definidas por: $\phi_1 = \phi_{D\nu} - \phi_{Dl}$, $\phi_2 = \phi_{B\nu} - \phi_{Bl}$,

La ecuación (23) nos proporciona expresiones analíticas de los elementos de matriz, la U_{PMNS}^{th} considerando el modelo de texturas con 2 ceros, donde se tiene una dependencia explícita de los parámetros $A_e, A_\nu, E_e, E_\nu, \phi_1$ y ϕ_2 . Para encontrar el rango permitido de estos parámetros que reproduzcan los valores experimentales de la U_{PMNS} con su margen de error correspondiente se utiliza un criterio de χ^2 , el cual se establece por:

$$\begin{aligned} \chi^2(A_e, A_\nu, E_e, E_\nu, \phi_1, \phi_2) &= \frac{\left(|U_{\nu\mu}^T| - |U_{\nu\mu}^E| \right)^2}{\sigma_{U_{\nu\mu}}^2} \\ &\quad + \frac{\left(|U_{\nu\tau}^T| - |U_{\nu\tau}^E| \right)^2}{\sigma_{U_{\nu\tau}}^2} + \frac{\left(|U_{\mu\tau}^T| - |U_{\mu\tau}^E| \right)^2}{\sigma_{U_{\mu\tau}}^2} + \frac{(J^T - J^E)^2}{\sigma_J^2}, \end{aligned} \quad (24)$$

donde el super índice “T” denota que el término correspondiente de la matriz U_{PMNS}^T (ecuación (23)) proviene de la parte del modelo de texturas y el super índice “E” denota la parte experimental con incertidumbre $\sigma_{U_{kl}}^2$. En lo que sigue se buscarán las regiones de los parámetros $A_e, A_\nu, E_e, E_\nu, \phi_1$ y ϕ_2 , tal que el valor de:

$$\frac{\chi^2(A_e, A_\nu, E_e, E_\nu, \phi_1, \phi_2)}{4} \leq 1. \quad (25)$$

Para dicha empresa utilizaremos un algoritmo tipo PSO.

4. Algoritmo PSO modificado

La Optimización por Enjambre de Partículas, PSO por sus siglas en inglés, forma parte de los algoritmos bio-inspirados, estos fueron implementados gracias a la constante observación de los organismos de nuestro entorno, su objetivo es imitar la

forma en que la naturaleza es capaz de resolver problemas y tomar decisiones según el entorno que los rodea.

Fue propuesto por primera vez en el *International Conference on Neural Networks* de 1995 (Kennedy and Eberhart (1995)), la intención original de este algoritmo fue simular las elegantes y casi impredecibles coreografías que vemos en el vuelo y en la caza de una bandada de aves, estas son capaces de realizar maniobras aéreas y ajustar su velocidad en el aire con gran precisión.

El algoritmo PSO toma una población de partículas que se mueven en un espacio de búsqueda que está definido por la función que se desea optimizar, tienen una posición inicial aleatoria y una velocidad en el espacio. En cada iteración, las partículas actualizan su velocidad tomando en cuenta su propia experiencia y la información de las demás partículas de la población, combinadas con un término de inercia y una función de aceleración, con esta información toman una nueva posición en el espacio de búsqueda. Este proceso se repite hasta alcanzar un número máximo de iteraciones y el algoritmo nos devuelve la mejor solución encontrada (Cuevas and Rodríguez (2020), Cuevas et al. (2021)).

4.1. Condiciones iniciales

Se define un conjunto de N partículas iniciales distribuidas uniformemente aleatorias en el espacio de búsqueda, tal que cada partícula inicial $\mathbf{x}_i^0 = \{x_{i,1}^0, x_{i,2}^0, \dots, x_{i,d}^0\}$ se encuentre dentro de los valores localizados en el límite inferior lb y superior ub , tomando en cuenta un espacio d -dimensional (Wiley and Sons (2007)). Estos límites, en general, son distintos para cada dimensión y están determinados por la naturaleza del problema.

La posición inicial de cada partícula está definida como:

$$x_{ij}^0 = lb_j + \text{rand}_{ij}(ub_j - lb_j), \quad i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, d. \quad (26)$$

donde x_{ij}^0 corresponde al valor inicial de la partícula i -ésima en la dimensión j -ésima; lb_j y ub_j representan el límite inferior y superior para la dimensión j -ésima, además rand_{ij} es un valor aleatorio uniformemente distribuido en el rango $[0, 1]$ correspondiente a la partícula i -ésima en la dimensión j -ésima.

Además del número de partículas N , la dimensión d y los límites ub y lb se define el número máximo de iteraciones k_{max} , los demás parámetros están relacionados con la velocidad y se explicarán posteriormente.

Cada partícula se mueve en el espacio de búsqueda de acuerdo a cierta velocidad $\mathbf{v}_{ij}$ a la que también se le da un valor inicial, para este trabajo se usó una velocidad nula para cada partícula (Cuevas et al. (2021)), esto es:

$$\mathbf{v}_{ij}^0 = 0, \quad (27)$$

donde $\mathbf{v}_{ij}^0$ corresponde al valor inicial de la velocidad de la partícula i -ésima en la dimensión j -ésima.

Para este trabajo se usó una población de 10,000 partículas, un espacio de dimensión $d = 6$ y tomamos $k_{max} = 60$ como nuestro número máximo de iteraciones. La aleatoriedad es muy importante, por lo que se usó una semilla para la generación de números aleatorios en función del tiempo de la computadora en microsegundos y las actividades realizadas antes de correr el programa.

4.2. Evolución del algoritmo

El ajuste de las posiciones de las partículas $\mathbf{x}_i^{k+1}$ está determinado por el vector velocidad $\mathbf{v}_{ij}^{k+1}$, está toma en cuenta la velocidad de la iteración anterior $\mathbf{v}_{ij}^k$, el factor cognitivo y social, junto con el término de inercia y aceleración (Wiley and Sons (2007)). Nuestra velocidad se define como:

$$\mathbf{v}_{ij}^{k+1} = \alpha \left[\omega \mathbf{v}_{ij}^k + c_1 \left(\text{rand}_{ij} \left(\mathbf{p}_{ij}^k - \mathbf{x}_{ij}^k \right) \right) + c_2 \left(\text{rand}_{ij} \left(\mathbf{g}_j^k - \mathbf{x}_{ij}^k \right) \right) \right], \quad (28)$$

donde tenemos cuatro términos importantes:

- **Velocidad previa** ($\omega \mathbf{v}_{ij}^k$): Se considera como la memoria de la última dirección en la que la partícula se encontraba en movimiento, nos ayuda a evitar cambios drásticos de dirección.
- **Factor cognitivo** (c_1): Este término emula la memoria individual de la posición donde la partícula encontró su mejor valor, según el problema, en el espacio de búsqueda.
- **Término social** (c_2): Representa la influencia que tiene una partícula en toda la población. Esto hace que la partícula tome la dirección de la mejor partícula de toda la población.
- **Aceleración** (α): Este término nos ayuda a equilibrar la exploración y explotación de las partículas. La exploración es la capacidad de explorar diferentes regiones del espacio de búsqueda y la explotación es la capacidad de concentrar la búsqueda en un área prometedora para refinar la solución.

La evolución de la posición de cada partícula depende de la velocidad de esta, el ajuste está definido como:

$$\mathbf{x}_{ij}^{k+1} = \mathbf{x}_{ij}^k + \mathbf{v}_{ij}^{k+1}, \quad (29)$$

donde $\mathbf{v}_{ij}^{k+1}$ representa la nueva velocidad de la partícula $\mathbf{x}_{ij}^k$, calculada con la ecuación (28).

Con esta nueva posición cada partícula es evaluada en la función objetivo ($\mathcal{F}$). Esta es una función matemática que toma como entrada un conjunto de parámetros (la posición de la partícula) y devuelve un valor escalar, donde el número de parámetros de entrada corresponde a las dimensiones del espacio de búsqueda (Clerc and Kennedy (2002)). Esta función representa el criterio que se desea optimizar, cada partícula de la población explora el espacio evaluándose contra esta función. El proceso de evaluación se muestra en la ecuación (30).

$$fx_i = \mathcal{F}(\mathbf{x}_i^k). \quad (30)$$

La calidad de las partículas y por ende, del algoritmo puede ser determinada con este paso. A cada partícula se le asocia su valor en la función objetivo, conocido como fitness. La mejor partícula del grupo se le conoce como la mejor solución global (g_{fit}) y los mejores valores fitness individuales, conocidos como mejor solución local (p_{best}), son registrados en la memoria de cada partícula.

Para este trabajo, el vector de posición y la función objetivo vienen dados por:

$$\mathbf{x}_{ij}^k = x_{ij}^k(A_e, A_v, E_e, E_v, \phi_1, \phi_2), \quad (31)$$

$$fx_i = \frac{\chi^2(A_e, A_v, E_e, E_v, \phi_1, \phi_2)}{4}. \quad (32)$$

donde $A_e, A_v, E_e, E_v, \phi_1, \phi_2$ hacen referencia a los parámetros libres del modelo de texturas con 2 ceros y el criterio chi-cuadrado χ^2 se ha definido previamente mediante la ecuación (24).

Después de registrar el valor de χ^2 y los parámetros $A_e, A_v, E_e, E_v, \phi_1, \phi_2$, las partículas toman una nueva posición en el espacio de búsqueda según la expresión (29) para ser nuevamente evaluadas en la función objetivo. Este proceso iterativo se realiza con el fin de obtener parámetros de mejor calidad al minimizar la función objetivo. Al final de las iteraciones, la mejor partícula global (g_{best}) es considerada como la solución del problema de optimización.

4.3. Terminación del algoritmo

El algoritmo termina su ejecución cuando el valor de χ^2 se encuentra bajo una cota definida. Para este trabajo, se utilizó el criterio definido en la ecuación (25), que asegura que la solución cumpla con las restricciones del criterio chi-cuadrado.

Por otro lado, si no se cumple este criterio, el algoritmo también se detiene al alcanzar el número máximo de iteraciones, $k_{max} = 60$ para este trabajo, esto para evitar que el algoritmo entre en un ciclo interminable.

Algorithm 1 Pseudocódigo del PSO modificado

```

1: PASO 1: Configuración de parámetros iniciales.
    $N, d, lb, ub, k, k_{max}, c1, c2, \omega, \kappa$ 
2: PASO 2: Valores iniciales para la posición y velocidad de las partículas.
3: for  $i = 1, i < N; i++$  do
4:    $x_{ij}^0 = lb_j + \text{rand}_{ij}(ub_j - lb_j)$ 
5:    $v_{ij}^0 = 0$ 
6: end for
7: PASO 3: Evaluación de las partículas iniciales en la función objetivo.
8: for  $i = 1, i < N; i++$  do
9:    $\mathbf{fx}_i^k = f(\mathbf{x}_i^k)$ 
10: end for
11: PASO 4: Registro de las mejores partículas (global y local).
12: for  $i = 1, i < N; i++$  do
13:    $\mathbf{g} = \min(\mathbf{fx}_i^k)$ 
14: end for
15: for  $i = 1, i < N; i++$  do
16:    $\mathbf{p}_i^k = \mathbf{x}_i^k$ 
17:    $\mathbf{fp}_i^k = \mathbf{fx}_i^k$ 
18: end for
19: PASO 5: Cálculo de la nueva velocidad y posición para las partículas.
20: for  $i = 1, i < N; i++$  do
21:   for  $j = 1, j < d; j++$  do
22:      $\mathbf{v}_{ij}^{k+1} = \mathbf{v}_{ij}^{k+1}(\mathbf{v}_{ik}^k, c1, c2, \alpha, \omega)$ 
23:   end for
24: end for
25: PASO 6: Evaluación de las nuevas partículas en la función objetivo.
26: for  $i = 1, i < N; i++$  do
27:   for  $j = 1, j < d; j++$  do
28:      $\mathbf{fx}_i^{k+1} = f(\mathbf{x}_i^{k+1})$ 
29:   end for
30: end for
31: PASO 7: Registro de las mejores partículas (global y local).
32: for  $i = 1, i < N; i++$  do
33:    $\mathbf{g} = \min(\mathbf{fx}_i^k)$ 
34: end for
35: for  $i = 1, i < N; i++$  do
36:    $\mathbf{p}_i^k = \mathbf{x}_i^k$ 
37:    $\mathbf{fp}_i^k = \mathbf{fx}_i^k$ 
38: end for
39: PASO 8: Evaluación del criterio de chi cuadrada
40: for  $i = 1, i < N; i++$  do
41:   for  $j = 1, j < d; j++$  do
42:      $\mathbf{g}_i^{\text{fit}} = f(\mathbf{g}_i)$ 
43:   end for
44: end for

```

5. Resultados

Los parámetros libres $A_l, A_\nu, E_l, E_\nu, \phi_1$ y ϕ_2 del modelo de texturas con dos ceros, se acomodan como las componentes en un vector $\vec{X}$, de la siguiente forma: $\vec{X} = (A_l, A_\nu, E_l, E_\nu, \phi_1, \phi_2)$

un punto de un espacio abstracto de seis dimensiones.

Para la jerarquía normal (NH) los parámetros están restringidos de acuerdo a:

$$m_e \leq E_l \leq m_\mu \leq A_l \leq m_\tau, \quad m_{\nu_e} \leq E_\nu \leq m_{\nu_\mu} \leq A_\nu \leq m_{\nu_\tau}.$$

Para la jerarquía inversa (IH) los parámetros están restringidos tal que:

$$m_e \leq A_l \leq m_\mu, \quad -m_\tau \leq E_l \leq m_e,$$

$$m_{\nu_e} \leq A_\nu \leq m_{\nu_\mu}, \quad -m_{\nu_\tau} \leq E_\nu \leq m_{\nu_e}.$$

Las fases de las dos últimas entradas del vector $\vec{X}$, se encuentran en los intervalos:

$$0 \leq \phi_1 \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi_2 \leq 2\pi.$$

Con la ayuda del algoritmo PSO, se encontraron en total 35,000 puntos $\vec{X}$ que cumplen la condición dada en la ecuación (25), la mitad de ellos corresponden a la jerarquía normal y la otra mitad para la jerarquía inversa.

5.1. Análisis de los elementos $|B_f|, |D_f|$ y C_f

Para el caso de los leptones cargados y los leptones neutros con una jerarquía normal (NH), nuestros resultados son análogos con los presentados en (Miranda-Romagnoli et al. (2022)), esto es:

- El elemento $|B_f|$ ($f = l, \nu$) se pueden aproximar a una elipse con parámetros a, b y c dados por:

$$a = \frac{m_{f_3} - m_{f_2}}{2}, \quad b = \sqrt{1 - \tilde{\gamma}} a, \quad c = \sqrt{\tilde{\gamma}} a, \quad (33)$$

donde $\tilde{\gamma}$ es definido como:

$$\tilde{\gamma} = \sqrt{\frac{2m_{f_1}}{m_{f_3} + m_{f_2}}}.$$

- El elemento $|D_f|$ ($f = l, \nu$) cuando se proyecta al plano $A_f - D_f$, la curva correspondiente va como $\frac{1}{\sqrt{A_f}}$.
- Finalmente, el elemento C_f ($f = l, \nu$) define un plano con vector normal dado por $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

Los resultados a resaltar en este trabajo, se dan para el caso de los leptones neutros con una jerarquía de masas invertida (IH) y se muestran en las siguientes subsecciones:

5.1.1. Análisis de $|B_\nu|$

El elemento $|B_\nu|$ está definido a través de la ecuación:

$$|B_\nu| = \sqrt{\frac{(A_\nu - m_{\nu_e})(A_\nu - m_{\nu_\mu})(A_\nu + m_{\nu_\tau})}{E_\nu - A_\nu}}, \quad (34)$$

matemáticamente corresponde a función de los parámetros A_ν y E_ν . En la Figura (1a) se muestran las curvas de nivel respectivas cuando $E_\nu = -m_{\nu_\tau}, E_\nu = 0, E_\nu = m_{\nu_\tau}$ y $E_\nu \rightarrow m_{\nu_e}$ respecto al parámetro A_ν normalizado según el neutrino más pesado (m_{ν_μ}), además se encuentra analíticamente la curva de nivel respectiva. Dicho análisis se presenta a continuación:

- Cuando $E_v = -m_{v_\tau}$, el elemento $|B_v|$ puede ser describirse por medio de una circunferencia centrada en $(\frac{m_{v_e} + m_{v_\mu}}{2}, 0)$ y con radio

$$\frac{m_{v_\mu} - m_{v_e}}{2}.$$

- Cuando $E_v = 0$, la función correspondiente al elemento $|B_v|$ concuerda a una elipse horizontal con centro en $(\frac{m_{v_e} + m_{v_\mu}}{2}, 0)$ y demás elementos a y b de la elipse dados por:

$$a = \gamma, \quad b = \gamma \sqrt{\frac{m_{v_\mu} - m_{v_\tau}}{m_{v_\mu}}}, \quad (35)$$

donde γ está definida como:

$$\gamma = \frac{m_{v_\mu} - m_{v_e}}{2}. \quad (36)$$

- Cuando $E_v = m_{v_\tau}$, el elemento $|B_v|$ se ajusta a otra elipse horizontal centrada ahora en $(\frac{m_{v_e} + m_{v_\mu}}{2}, 0)$ y demás elementos a y b dados por:

$$a = \gamma, \quad b = \gamma \sqrt{\frac{m_{v_\mu} + m_{v_\tau}}{m_{v_\mu} - m_{v_\tau}}}, \quad (37)$$

con γ dado por la expresión (36).

- Cuando $E_v \rightarrow m_{v_e}$, la función que describe al elemento $|B_v|$ corresponde a una circunferencia con centro en $(\frac{m_{v_\mu} - m_{v_\tau}}{2}, 0)$ y radio

$$\frac{m_{v_\mu} + m_{v_\tau}}{2}.$$

Además de mostrar las curvas de nivel, en la Figura (1a) se presentan los datos experimentales correspondientes a los valores de B_v normalizados. Puede observarse una tendencia de los datos experimentales a las curvas $E_v = -m_{v_\tau}$, $E_v = 0$ y $E_v = m_{v_\tau}$, es decir, los datos experimentales de $|B_v|$ están mayormente concentrados en $|B_{v_{\text{norm}}}| < 0,01$.

5.1.2. Análisis de $|D_v|$

El elemento $|D_v|$ está definido a través de la ecuación:

$$|D_v| = \sqrt{\frac{(E_v - m_{v_e})(E_v - m_{v_\mu})(E_v + m_{v_\tau})}{A_v - E_v}}, \quad (38)$$

nuevamente está definido en función de los parámetros A_v y E_v . En la Figura (1b) se grafican las curvas de nivel de $|D_v|$ normalizado para valores de E_v positivos, negativos e igual a cero.

Dado que $m_{v_e} \leq A_v \leq m_{v_\mu}$ y de los valores numéricos para m_{v_μ} y m_{v_e} observamos que $m_{v_\mu} \approx m_{v_e}$, por lo tanto, podemos considerar $A_v \approx m_{v_\mu}$ y las curvas de nivel corresponden a rectas paralelas al eje de las abscisas. El análisis de éstas, se presenta a continuación:

- Para los valores, $E_v = -m_{v_\tau}, m_{v_e}$ la recta que representa al elemento $|D_v|$ es $|D_v| = 0$.
- Cuando $E_v = 0$, el elemento, $|D_v|$ se puede representar con una recta cuya ordenada al origen es $\sqrt{m_{v_e} m_{v_\tau}}$.

- Cuando $E_v = m_{v_\tau}$, el elemento, $|D_v|$ se ajusta a una recta con ordenada al origen $\sqrt{2m_{v_\tau}(m_{v_e} - m_{v_\tau})}$.

En la Figura (1b), se muestran además los datos experimentales de $|D_v|$ normalizados restringiéndose aquellos que tienen valores de E_v igual a $E_v = -m_{v_\tau}$, $E_v = 0$, $E_v = m_{v_\tau}$ y $E_v \rightarrow m_{v_e}$, se observa una tendencia a las envolventes cuando $E_v = -m_{v_\tau}$ y $E_v = 0$, es decir, los datos experimentales de D_v están concentrados para $|D_{v_{\text{norm}}}| > 0,5$.

5.1.3. Análisis de C_v

El elemento C_v está definido a través de la ecuación:

$$C_v = -(A_v + E_v - m_{v_e} - m_{v_\mu} + m_{v_\tau}). \quad (39)$$

En la Figura (1c) se grafican las curvas de nivel de C_v normalizado para valores de E_v positivos, negativos e igual a cero, dicho análisis se presenta a continuación:

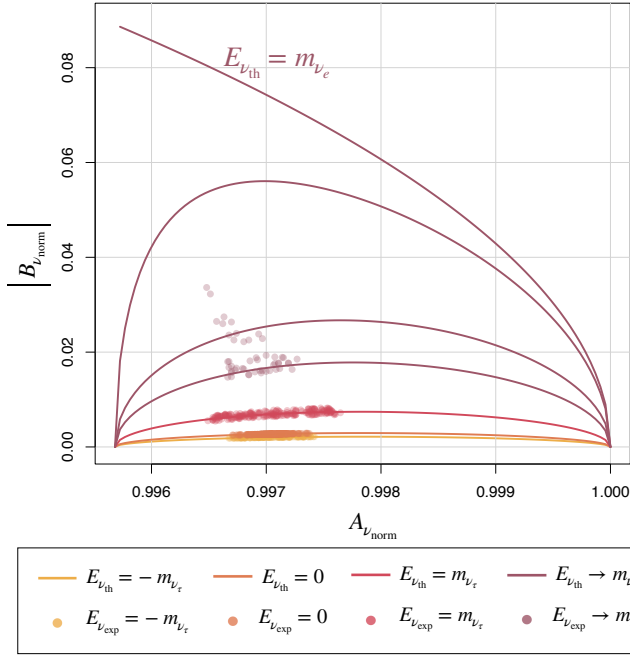
- Cuando $E_v = -m_{v_\tau}$, la función que representa al elemento C_v corresponde a una recta con pendiente 0 y ordenada al origen m_{v_e} .
- Cuando $E_v = 0$, es posible ajustar al elemento C_v con una recta con pendiente 0 y ordenada al origen $(m_{v_e} - m_{v_\tau})$.
- Cuando $E_v = m_{v_\tau}$, el elemento C_v corresponde a una recta con pendiente 0 y ordenada al origen $m_{v_e} - 2m_{v_\tau}$.
- Cuando $E_v = m_{v_e}$, la función que describe al elemento C_v es una recta de pendiente 0 y ordenada al origen $-m_{v_\tau}$.

En la Figura (1c) se incluyen además los datos experimentales de D_v normalizados y se grafican aquellos para los cuales $E_v = -m_{v_\tau}$, $E_v = 0$, $E_v = m_{v_\tau}$ y $E_v \rightarrow m_{v_e}$, notamos que hay una tendencia de los datos a las curvas $E_v = m_{v_\tau}$. Los datos experimentales de C_v están concentrados para $C_{v_{\text{norm}}} = -\frac{m_{v_\tau}}{m_{v_e}}$.

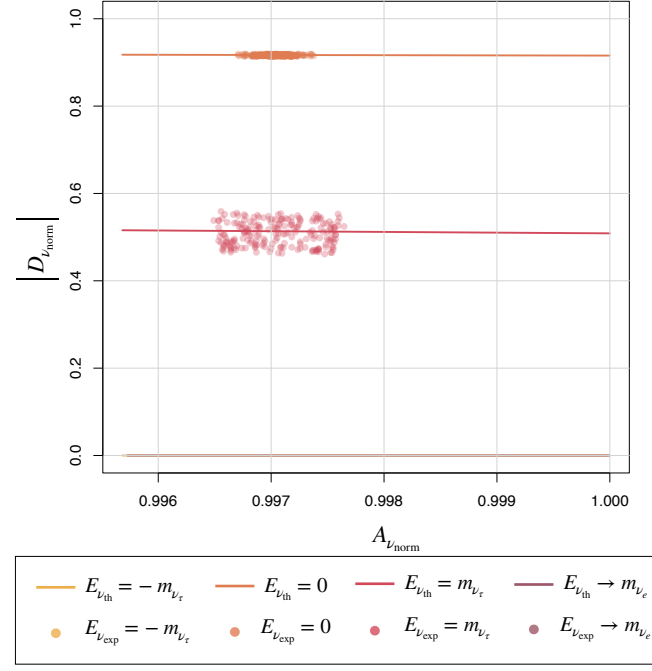
5.2. Análisis numérico combinado

En esta sección se presenta un análisis combinado para todos los elementos normalizados de la matriz de masa, esto es, A_v/m_{v_μ} , $|B_v|/m_{v_\mu}$, C_v/m_{v_μ} , $|D_v|/m_{v_\mu}$ y E_v/m_{v_μ} , para esto se grafican los siete mil quinientos puntos encontrados (eje X) contra el valor absoluto de los parámetros normalizados (eje y), las gráficas correspondientes se muestran en las Figuras (2a) y (2b). Puede observarse que los parámetros C_v/m_{v_μ} y E_v/m_{v_μ} cubren casi de manera uniforme el espacio permitido (Figura 2a), empero el parámetros A_v/m_{v_μ} es muy cercano a 1, el elemento $|B_v|/m_{v_\mu}$ muy cercano a cero y el termino $|D_v|/m_{v_\mu}$ se encuentran restringido Figura 2(b). Por lo anterior podemos establecer que:

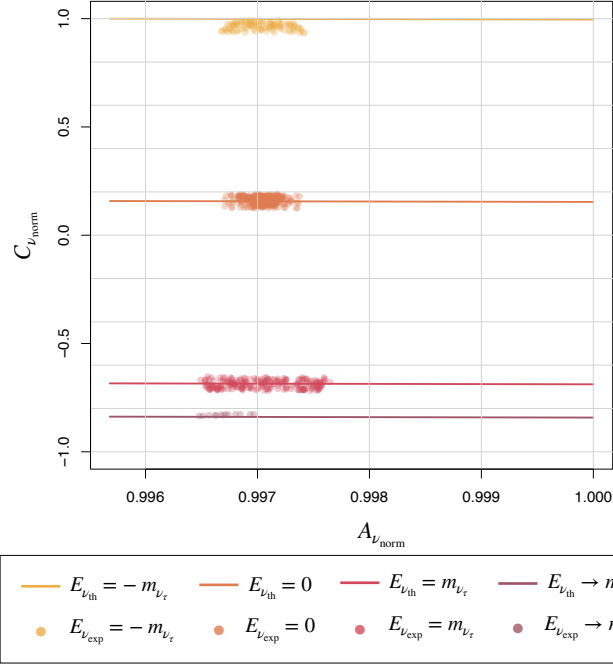
$$|A_v| \gg |D_v| \gg E_v.$$



(a) Relación entre $B_{\nu_{\text{norm}}}$ y $A_{\nu_{\text{norm}}}$ bajo diferentes condiciones para E_ν . Las curvas comienzan alrededor de $A_{\nu_{\text{norm}}} \approx 0,996$ y se extienden hasta $A_{\nu_{\text{norm}}} = 1$, mientras que $B_{\nu_{\text{norm}}}$ varía desde 0 hasta aproximadamente 0,08.

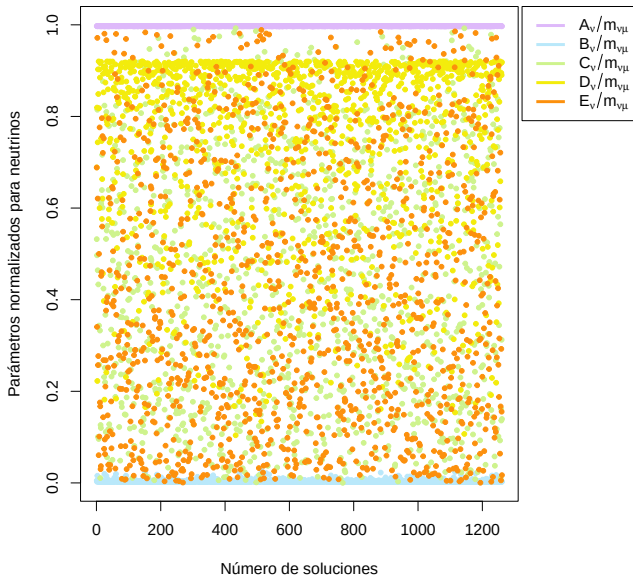


(b) Relación entre $D_{\nu_{\text{norm}}}$ y $A_{\nu_{\text{norm}}}$ bajo diferentes condiciones para E_ν . Las curvas comienzan alrededor de $A_{\nu_{\text{norm}}} \approx 0,996$ y se extienden hasta $A_{\nu_{\text{norm}}} = 1$, mientras que $D_{\nu_{\text{norm}}}$ varía desde 0 hasta aproximadamente 0,085.



(c) Relación entre $C_{\nu_{\text{norm}}}$ y $A_{\nu_{\text{norm}}}$ bajo diferentes condiciones para E_ν . Las curvas comienzan alrededor de $A_{\nu_{\text{norm}}} \approx 0,996$ y se extienden hasta $A_{\nu_{\text{norm}}} = 1$, mientras que $C_{\nu_{\text{norm}}}$ varía desde aproximadamente $-0,8$ hasta 1.

Figura 1: Las subfiguras a), b) y c) muestran las curvas de nivel que representan los valores teóricos permitidos para B_ν (arriba-izquierda), D_ν (arriba-derecha), y C_ν (abajo-centro) normalizados según el neutrino más pesado (m_{ν_μ}). Las curvas representan distintos escenarios teóricos indicados por las líneas de colores. Los puntos de color corresponden a los datos experimentales.



(a) Sector de neutrinos completo.

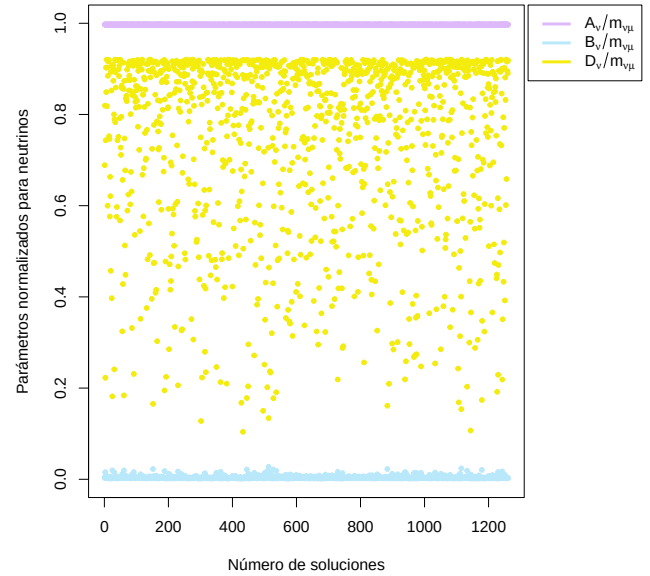
(b) Sector de neutrinos sin datos C_ν y E_ν normalizados.

Figura 2: Las subfiguras a) y b) muestran todas las soluciones encontradas contra los valores experimentales de los parámetros encontrados: A_ν , B_ν , C_ν y D_ν y A_ν , B_ν y D_ν respectivamente (izquierda y derecha).

6. Conclusiones

En este trabajo se ha considerado un formalismo de texturas paralelas para las matrices de masa de los leptones cargados y leptones neutros, en especial del tipo de dos ceros texturas, un criterio de chi cuadrada se implementó para restringir el rango de los parámetros libres del modelo. A través de un algoritmo PSO modificado se encontró este rango de forma numérica que este de acuerdo con todas las restricciones impuestas por la U_{PMNS} . Se analiza de forma gráfica los elementos $|B_u|/m_t$, $|B_d|/m_b$, C_u/m_t , C_d/m_b , $|D_u|/m_t$ y $|D_d|/m_b$ Figuras (1a, 1b y 1c). A partir de un análisis combinado, Figuras (2a y 2b) se establecen la siguiente relaciones entre los elementos de la matriz de masa:

$$|A_\nu| \gg |D_\nu| \gg E_\nu.$$

Referencias

- Barranco, J., Gonzalez Canales, F., and Mondragon, A. (2010). Universal Mass Texture, CP violation and Quark-Lepton Complementarity. *Phys. Rev. D*, 82:073010.
- Branco, G. C., Lavoura, L., and Silva, J. P. (1999). *CP Violation*, volume 103. Clerc, M. and Kennedy, J. (2002). The particle swarm - explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(1):58–73.
- Cuevas, E., Fausto, F., Gálvez, J., and Rodríguez, A. (2021). *Computación metaheurística inspirada*. AlphaEditorial.
- Cuevas, E. and Rodríguez, A. (2020). *Metaheuristic Computation with Matlab*. CRC Press, Inc.
- Esteban, I. et al. (2020). The fate of hints: updated global analysis of three-flavor neutrino oscillations. *Journal of High Energy Physics*, 2020(9).
- Friedberg, S., Insel, A., and Spence, L. (2006). *Linear Algebra*. Prentice Hall, fourth edition.

- Fritzsch, H. (1977). Calculating the cabibbo angle. *Physics Letters B*, 70:436–440.
- Fritzsch, Harald y Xing, Z.-z. (2000). Mass and flavor mixing schemes of quarks and leptons. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 45:1–81.
- Fukuda, e. a. (1998). Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. *Physical Review Letters*, 81(8):1562–1567.
- Glashow, S. L. (1961). *Partial Symmetries of Weak Interactions*. *Nucl. Phys.*, 22:579–588.
- Gonzalez-Garcia, M. et al. (2022). Three-flavour global analyses of neutrino oscillation experiments. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 2022(8).
- Kanemura, S., Sakurai, K., and Sugiyama, H. (2016). Probing models of dirac neutrino masses via the flavor structure of the mass matrix. *Physics Letters B*, 758:465–472.
- Kennedy, J. and Eberhart, R. (1995). Particle swarm optimization. *Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks*, 4:1942–1948.
- King, S. F. (2004). Neutrino mass models. *Rept. Prog. Phys.*, 67:107–158.
- Ludl, P. O. and Grimus, W. (2014). A complete survey of texture zeros in the lepton mass matrices. *JHEP*, 07:090. [Erratum: *JHEP* 10, 126 (2014)].
- Martínez-Guerrero, E., Lagos-Eulogio, P., Miranda-Romagnoli, P., Noriega-Papaqui, R., and Seck-Tuoh-Mora, J. C. (2024). Historical elite differential evolution based on particle swarm optimization algorithm for texture optimization with application in particle physics. *Applied Sciences*, 14(19).
- Miranda-Romagnoli, P., Noriega-Papaqui, R., and Pontón-Gallardo-Rodríguez, A. (2022). Implicaciones de una textura de dos ceros en las matrices de masa de los quarks. *PADI Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingeniería del ICBI*, 10(19):113–119.
- Mohapatra, R. N. et al. (2007). *Theory of neutrinos: A White paper*. *Rept. Prog. Phys.*, 70:1757–1867.
- Salam, A. (1968). *Weak and Electromagnetic Interactions*. *Conf. Proc. C*, 680519:367–377.
- Weinberg, S. (1967). *A Model of Leptons*. *Phys. Rev. Lett.*, 19:1264–1266.
- Wiley, J. and Sons, L. (2007). *Particle Swarm Optimization*. John Wiley Sons, Ltd.
- Zyla, P. et al. (2020). *Review of particle physics*. *Prog. Theor. Exp. Phys.*, 2020(8).