

Análisis de texturas de cuatro-ceros Four-zeros texture analysis

A. Criollo-Pérez ^a, A. Isidro-Arrazola ^a, R. Noriega-Papaqui ^{a,*}

^aÁrea Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Pachuca, Hidalgo, México.

Resumen

Revisamos el formalismo de texturas bajo la propuesta de H. Fritzsch (Fritzsch and zhong Xing (2000)), detallando la notación que se usa para las matrices de masa M para los quarks, enfocándonos en la textura de 4 ceros. Hacemos un análisis de los productos de las matrices que diagonalizan a la matriz M y comparamos los resultados con la V_{CKM} .

Palabras Clave: Modelo estándar, sector de Yukawa, texturas de 4 ceros, matriz V_{CKM} .

Abstract

We review the texture formalism proposed by H. Fritzsch (Fritzsch and zhong Xing (2000)), detailing the notation used for the mass matrices of quarks M , focusing on the 4-zero texture. We analyze the matrix products that diagonalize the matrix M and compare the results with V_{CKM} .

Keywords: Standard model, Yukawa sector, 4 zeros textures, V_{CKM} matrix.

1. Introducción

El Modelo Estándar (ME) (Steven (1996)) de la física de partículas, es una teoría que describe las interacciones fundamentales conocidas y las partículas elementales que componen toda la materia visible del universo, fué desarrollado entre 1970 y 1973 de manera consistente con la Mecánica Cuántica y la Relatividad Especial logrando explicar procesos que ocurren a una escala de 10^{-16} cm.

Al igual que en Mecánica Cuántica en el ME matemáticamente las partículas son descritas por una función de onda ψ . Las funciones de onda que describen a los fermiones deben de satisfacer la ecuación de Dirac $i\gamma^\mu(\partial + m)\psi = 0$, el elemento m que aparece en la ecuación, se interpreta como la masa de la partícula que describe ψ ; esto genera a través de ecuaciones tipo Euler-Lagrange, un término en el lagrangiano que va como $m\bar{\psi}\psi$ que es conocido como término de masa.

El sector del ME donde se generan los respectivos términos de masa para los quarks y leptones es el sector de Yukawa. En este sector no se presenta un término de masa en si, se presenta un matriz de masa M , una para los quark tipo u , una para los quarks tipo d y una los leptones. Las masas físicas (aquellas que se miden experimentalmente) se interpretan como los eigenvalores de la matriz de masa M .

lores de la matriz de masa M .

En el contexto del ME, la estructura de la matriz de masa para los quarks es completamente desconocida, el único indicio que se tiene es la matriz **Cabibbo Kobayashi Maskawa** V_{CKM} (Olive et al. (2014), Branco et al. (1999)) que cuantifica los procesos débiles del W^+ y los quarks, el cuadrado de cada uno de los nueve elementos de esta matriz representa la probabilidad para que un quark tipo u se convierta en un quark tipo d a través de un W^+ . Del experimento, las masas de los quarks presentan el siguiente patrón $m_u < m_c < m_t$; $m_d < m_s < m_b$; conocido como jerarquía (Olive et al. (2014), Branco et al. (1999)).

Para exponer el problema que abordaremos en este trabajo, debemos tener en cuenta los siguientes puntos de vista para el análisis de las matrices de masa.

1) **Teórico:** En el esquema del ME no es posible conocer la estructura de las matrices de masa, donde por definición las masas de las partículas son los eigenvalores de la matriz de masa.

2) **Experimental:** Son bien conocidos (Olive et al. (2014)) los valores de las masas de los quarks; y los valores de la V_{CKM} .

El objetivo consiste en ligar estos dos puntos de vista llegando así a realizar un análisis fenomenológico.

Este análisis, consiste en proponer estructuras explícitas de las matrices de masa, que resulten consistentes con las relaciones de la matriz de masa M .

* Autor para correspondencia: rnoriega@uaeh.edu.mx

Correo electrónico: arturoc@uaeh.edu.mx (Arturo Criollo-Pérez), alejandroiarrazola@gmail.com (Alejandro Isidro-Arrazola), rnoriega@uaeh.edu.mx (Roberto Noriega-Papaqui)

nes de las masas de los quarks y los elementos de la V_{CKM} . La primera propuesta con buenos resultados fue realizada por Harald Fritzsch en 1978 (Fritzsch (1977), Fritzsch (1978)) introduciendo el concepto de textura, que consiste en colocar ceros en las matrices de masa para encontrar de forma analítica matrices que la diagonalicen. En Criollo and Noriega-Papaqui (2012) se dan las condiciones para que una matriz de masa del tipo texturas tenga eigenvalores positivos, creando así un formalismo más robusto en el contexto de texturas. En este trabajo se retomará la propuesta de texturas de Fritzsch, agregando el esquema presentado en (Criollo and Noriega-Papaqui (2012)) y se plantea como objetivo verificar si la estructura más simple, la textura hermítica de 4-ceros (Fritzsch and zhong Xing (2000)) es viable desde el punto de vista fenomenológico al calcular los valores de la V_{CKM} .

2. Corriente cargada W^\pm

Las interacciones entre el bosón W^\pm y los quarks están dados por el siguiente lagrangiano (Branco et al. (1999))

$$\mathcal{L}_W = -\frac{g_2}{2\sqrt{2}}(J_\omega^\mu W_\mu^- + J_\omega^{\mu\dagger} W_\mu^+), \quad (1)$$

donde $J_\omega^{\mu\dagger}$ está definido como

$$J_\omega^{\mu\dagger} = \sum_{m=1}^3 [\bar{u}'_m \gamma^\mu (1 - \gamma^5) d'_m], \quad (2)$$

en términos de los estados físicos de los quarks

$$\begin{aligned} J_\omega^{\mu\dagger} &= \sum_{m=1}^3 [\bar{u}_m (V_L^{\mu\dagger})_{km} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) (V_L^d)_{km} d_m] \\ &= \sum_{m=1}^3 [\bar{u}_m \gamma^\mu (1 - \gamma^5) (V_{CKM})_{km} d_m], \end{aligned} \quad (3)$$

que nos da la probabilidad de transición de una quark tipo d a un tipo u a través de una corriente cargada W^+ esto se puede expresar en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}, \quad (4)$$

teniendo así para el quark u

$$u = V_{ud}d + V_{us}s + V_{ub}b, \quad (5)$$

la cantidad $|V_{ud}^2|$ es la probabilidad de transición de una quark d a una u a través de un W^+ , así los cuadrados de los nueve elementos de la matriz que aparece en la ecuación (4) son la probabilidad de que un quark tipo d se convierta en un tipo u . Esta matriz es conocida como la matriz **Cabibbo Kobayashi Maskawa**. (V_{CKM}).

Podemos observar que el no alineamiento de las transformaciones unitarias que relacionan los estados de masa para los quarks tipo u y tipo d , genera la presencia de la matriz unitaria V_{CKM} .

$$V_{CKM} = V_L^{u\dagger} V_L^d = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Al considerar matrices de masa hermíticas, los campos izquierdos y derechos transforman bajo una misma matriz de rotación. En este caso, $V_L^{u,d} = V_R^{u,d} = V^{u,d}$. Los valores experimentales de los elementos de la V_{CKM} son (Olive et al. (2014)):

$$\begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix} \simeq \quad (7)$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 0,97427 \pm 0,00015 & 0,22534 \pm 0,00065 & 0,00351^{+0,00015}_{-0,00014} \\ 0,22520 \pm 0,00065 & 0,97344 \pm 0,00016 & 0,0412^{+0,00011}_{-0,00005} \\ 0,00867^{+0,00029}_{-0,00031} & 0,0404^{+0,0011}_{-0,0005} & 0,999146^{+0,000021}_{-0,000046} \end{pmatrix}.$$

En 1983, Lincoln Wolfenstein presentó una parametrización de la matriz V_{CKM} (Wolfenstein (1983)), la cual se desarrolla en potencias de λ (hoy conocido como parámetro de Wolfenstein), donde, se resalta de forma clara, que las transiciones entre generaciones adyacentes son más probables que las transiciones entre generaciones distantes. En esta parametrización la matriz V_{CKM} tiene la forma:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & 0 \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3 & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + O(\lambda^4), \quad (8)$$

donde A es un número real de orden uno (Olive et al. (2014)).

3. Formalismo de texturas

El mecanismo de texturas (Lèvy (1996)) consiste en poner ceros en entradas de las matrices de masa, las texturas se clasifican de acuerdo al número y posición de ceros que contengan, su contabilidad se da de la siguiente manera:

- Ceros en la diagonal mayor suman una unidad.
- Ceros fuera de la diagonal mayor suman media unidad.

En el conteo final se deben incluir las dos matrices de masas de quarks.

3.1. Notación

En esta sección, estableceremos la notación que utilizaremos para denotar los ceros en una matriz, para esto, comencemos escribiendo una matriz simétrica (Criollo and Noriega-Papaqui (2012)) M como :

$$M = \begin{pmatrix} E & D & F \\ D & C & B \\ F & B & A \end{pmatrix}, \quad (9)$$

esta matriz M está bien determinada por 6 letras mayúsculas (A, B, C, D, E, F) y sus respectivas posiciones, a continuación se introduce la siguiente notación.

- $M(X)$ es una matriz con un cero en la letra mayúscula X donde $X = A, B, C, D, E, F$.

- $M(X, Y)$ es una matriz con ceros en las letras mayúscula X, Y donde $X, Y = A, B, C, D, E, F$ y $X \neq Y$.
- $M(X, Y, Z)$ es una matriz con ceros en las letras mayúsculas X, Y, Z donde $X, Y, Z = A, B, C, D, E, F$ y $X \neq Y \neq Z$.

Por ejemplo, $M(F)$ representa una matriz de la forma

$$M(F) = \begin{pmatrix} E & D & 0 \\ D & C & B \\ 0 & B & A \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Con esta notación, todas las texturas hermíticas se pueden ahora clasificar, teniendo los conjuntos de 6 ceros, 4 ceros y 2 ceros existiendo un total de 41 posibilidades. En este trabajo vamos a considerar que las matrices de masa son del tipo texturas simétricas y como las masas de cada tipo de quark se definen como los eigenvalores de las matrices de masa, entonces de las 41 posibles texturas solo nos fijaremos en aquellas que tengan eigenvalores reales, positivos y diferentes, para lograrlo haremos uso del siguiente teorema.

Teorema 1 ¹: Una matriz simétrica M con valores reales tiene un polinomio característico con valores reales, simples y positivos sí y solo sí cumple las condiciones

1. (a) $\det M > 0$,
(b) $\text{tr}M > 0$,
(c) $\text{tr}M^2 < \text{tr}^2 M$.
2. $\text{tr}M^2 < 3\text{tr}^2 M$.
3. $|\text{tr}M(5\text{tr}^2 M - 9\text{tr}M^2) - 5 \det M| < \sqrt{2}(3\text{tr}M^2 - \text{tr}^2 M)^{3/2}$.

Es de nuestro interés las texturas con 4 ceros (Fritzsch and zhong Xing (2003)), las cuales analizaremos con más detalle en la siguiente sección.

4. Texturas de 4 ceros

En este conjunto de matrices tenemos 15 texturas, las cuales se enlistan a continuación.

$$\begin{matrix} M(A, B), & M(A, C), & M(A, D), & M(E, F), \\ M(A, E), & M(A, F), & M(B, C), & M(D, F), \\ M(B, D), & M(B, E), & M(B, F), & M(D, E), \\ M(C, D), & M(C, E), & M(C, F), & \end{matrix} \quad (11)$$

Aplicando el Teorema 1, nos reduce el número de matrices en 3, las cuales son:

$$\begin{matrix} M(B, F) = \begin{pmatrix} E & D & 0 \\ D & C & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \\ M(B, D) = \begin{pmatrix} E & 0 & F \\ 0 & C & 0 \\ F & 0 & A \end{pmatrix}, \\ M(D, F) = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & C & B \\ 0 & B & A \end{pmatrix}. \end{matrix} \quad (12)$$

Nuestro siguiente paso, es encontrar la forma analítica de las matrices V que diagonalicen a las matrices $M(B, F)$, $M(B, D)$ y $M(D, F)$.

4.1. Matrices Diagonalizantes V_q

Podemos observar que las matrices $M(B, F)$, $M(B, D)$ y $M(D, F)$ son diagonales por bloques, un bloque de 2×2 y otro de 1×1 , entonces las matrices diagonalizantes toman la forma ²:

$$\begin{matrix} V(B, F) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ V(D, F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \\ V(B, D) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}. \end{matrix} \quad (13)$$

Donde podemos observar que la forma de estas matrices es similar a matrices de rotación en \mathbb{R}^3 en los planos xy , yz y zx respectivamente. Ahora que ya tenemos la estructura de las matrices V , estamos en condiciones de calcular el ángulo de rotación.

4.2. Ángulos de rotación

El siguiente paso es diagonalizar a la matriz de masa M^q , antes de esto y para facilitar las cosas, introducimos una nueva notación, la cual consiste en asignar al par (B, F) , (B, D) , (D, F) números 1, 2, 3, esto es, al par (B, F) le corresponde el número 1, al par (B, D) el número 2 y a (D, F) el número 3. Así mismo denotaremos a $M(X, Y)$ como $M^{q,x}$ donde $x = 1, 2, 3$ y $q = u, d$ por lo tanto las matrices ahora se denotan como:

$$\begin{matrix} M^{q,1} = M^q(B_q, F_q) = \begin{pmatrix} E_q & D_q & 0 \\ D_q & C_q & 0 \\ 0 & 0 & A_q \end{pmatrix}, \\ M^{q,2} = M^q(D_q, F_q) = \begin{pmatrix} E_q & 0 & 0 \\ 0 & C_q & B_q \\ 0 & B_q & A_q \end{pmatrix}, \\ M^{q,3} = M^q(B_q, D_q) = \begin{pmatrix} E_q & 0 & F_q \\ 0 & C_q & 0 \\ F_q & 0 & A_q \end{pmatrix}, \end{matrix} \quad (14)$$

¹Ver Demostracion en (Criollo and Noriega-Papaqui (2012))

²Podemos obtener las matrices diagonalizantes de manera analítica, el desarrollo lo podemos ver en, (Criollo and Noriega-Papaqui (2012))

y a las matrices V_q las denotaremos como $V_{q,x}$ y toman la forma

$$V_{q,1} = V_q(B_q, F_q) = \begin{pmatrix} \cos \theta_{q,1} & \text{sen } \theta_{q,1} & 0 \\ -\text{sen } \theta_{q,1} & \cos \theta_{q,1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$V_{q,2} = V_q(D_q, F_q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{q,2} & \text{sen } \theta_{q,2} \\ 0 & -\text{sen } \theta_{q,2} & \cos \theta_{q,2} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$V_{q,3} = V_q(B_q, D_q) = \begin{pmatrix} \cos \theta_{q,3} & 0 & \text{sen } \theta_{q,3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \theta_{q,3} & 0 & \cos \theta_{q,3} \end{pmatrix}.$$

Después de un álgebra elaborada se encuentra que, los ángulos de rotación $\theta_{q,1}$, $\theta_{q,2}$ y $\theta_{q,3}$ son:

$$\cos^2 \theta_{q,1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{2D_q}{\lambda_2 - \lambda_1} \right)^2}, \quad (16)$$

$$\cos^2 \theta_{q,2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{2B_q}{\lambda_3 - \lambda_2} \right)^2}, \quad (17)$$

$$\cos^2 \theta_{q,3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{2F_q}{\lambda_3 - \lambda_1} \right)^2}. \quad (18)$$

5. Análisis de las matrices diagonalizantes

En esta sección confrontamos nuestra propuesta con los resultados experimentales. Durante años de arduo trabajo los físicos de partículas han calculado los elementos de la matriz V_{CKM} con una precisión sorprendente. Experimentalmente esta matriz tiene los valores numéricos dados en la Ec.(7) y en el contexto del ME, la matriz V_{CKM} está dada por:

$$(V_{CKM}) = V_u^\dagger \cdot V_d. \quad (19)$$

De la sección anterior y dependiendo de la textura de las matrices de masa, podemos conocer explícitamente a las matrices V_u y V_d por consiguiente se tiene una expresión analítica de la V_{CKM} , la cual depende de parámetros libres $B_u, B_d, D_u, D_d, F_u, F_d$ según sea la elección de cada textura, por lo tanto, el análisis consiste en encontrar los valores apropiados de los parámetros tales que reproduzcan los valores experimentales encontrados para la V_{CKM} . Dicho análisis se realizará de manera gráfica y para realizar esto es conveniente dividirlo en dos casos, cuando se tiene una estructura paralela de las matrices de masa y cuando se tiene una estructura no paralela.

Se dice que tenemos una estructura paralela en las matrices de masa si M_u y M_d son del tipo texturas cada una teniendo los ceros en la misma posición. Cuando M^u y M^d no tienen todos los ceros en la misma posición hablamos de una estructura no paralela.

5.1. Estructura Paralela

En nuestro caso las matrices con estructura paralela son 3 conjuntos los cuales son $\{M^{u,1}, M^{d,1}\}$, $\{M^{u,2}, M^{d,2}\}$ y $\{M^{u,3}, M^{d,3}\}$.

En todos los casos, se puede apreciar que esta estructura predice que 4 elementos de la V_{CKM} son cero, lo cual no corresponde con los resultados experimentales. Por lo tanto estas estructuras se encuentran excluidas.

6. Estructura no-paralela

En este tipo de matrices tenemos los conjuntos $\{M^{u,1}, M^{d,2}\}$, $\{M^{u,1}, M^{d,3}\}$, $\{M^{u,2}, M^{d,1}\}$, $\{M^{u,2}, M^{d,3}\}$, $\{M^{u,3}, M^{d,1}\}$, $\{M^{u,3}, M^{d,2}\}$ a continuación, su análisis.

6.1. Caso $\{M^{u,2}, M^{d,3}\}$

El producto $V_{u,2}^\dagger \cdot V_{d,3}$, tiene la siguiente forma:

$$V_{u,2}^\dagger \cdot V_{d,3} = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, \quad (20)$$

donde se predice un 0 en la componente (1, 2) y ya que el valor de $(V_{CKM})_{exp}$ en esa componente es de $0,22534 \pm 0,00065$; el valor predicho escapa del valor del error permitido ($\pm 0,02$), por lo tanto el producto $V_{u,3}^\dagger \cdot V_{d,2}$ no reproduce todos los valores de $(V_{CKM})_{exp}$ y el conjunto $\{M^{u,2}, M^{d,3}\}$ no es viable para encontrar la forma de las matrices M^q .

6.2. Caso $\{M^{u,3}, M^{d,2}\}$

Por otra parte el producto $V_{u,3}^\dagger \cdot V_{d,2}$ es de la forma:

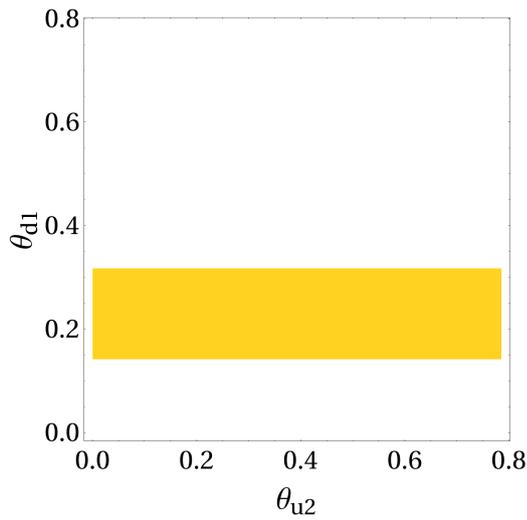
$$V_{u,3}^\dagger \cdot V_{d,2} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, \quad (21)$$

donde se predice un cero en la componente (2, 1). donde el valor de $(V_{CKM})_{exp}$ para esa coordenada es $0,22520 \pm 0,00065$ por lo tanto este producto no reproduce todos los valores de $(V_{CKM})_{exp}$ y el conjunto $\{M^{u,3}, M^{d,2}\}$ queda descartado como propuesta para dar forma a las matrices de masa M^q .

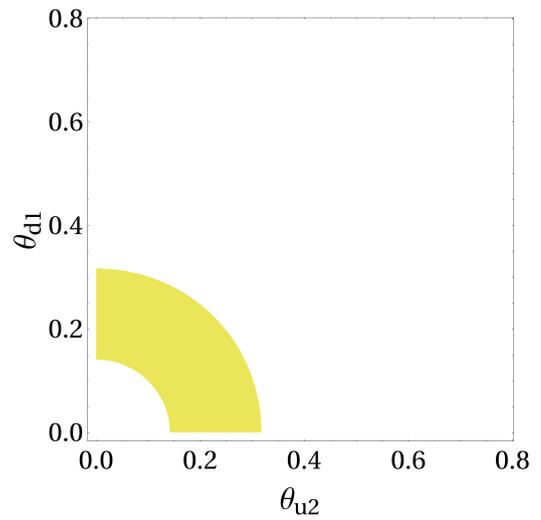
6.3. Caso $\{M^{u,2}, M^{d,1}\}$

La matriz V_{CKM} predicha tiene la forma:

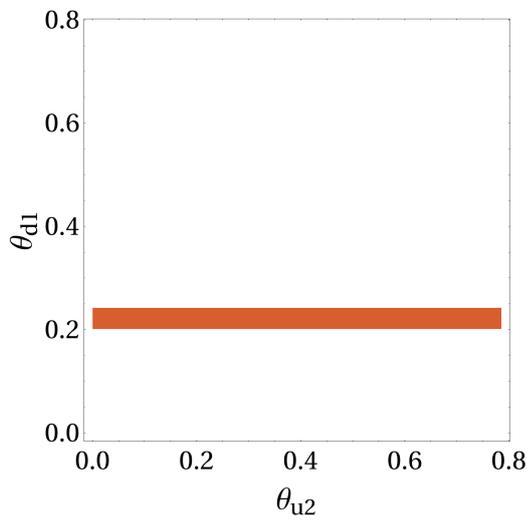
$$V_{u,2}^\dagger \cdot V_{d,1} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{d,1} & \text{sen } \theta_{d,1} & 0 \\ \cos \theta_{u,2} \text{sen } \theta_{d,1} & \cos \theta_{d,1} \cos \theta_{u,2} & -\text{sen } \theta_{u,2} \\ -\text{sen } \theta_{d,1} \text{sen } \theta_{u,2} & \cos \theta_{d,1} \text{sen } \theta_{u,2} & \cos \theta_{u,2} \end{pmatrix} \quad (22)$$



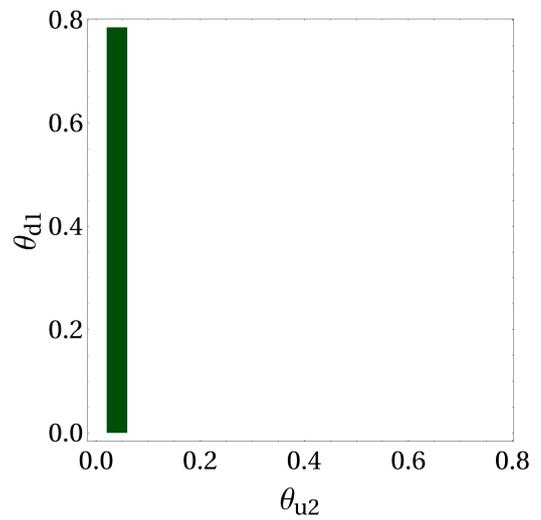
a) Conjunto solución que nace al resolver la ecuación $\cos \theta_{d,1} = z$, con z en el intervalo $[0,96, 0,99]$.



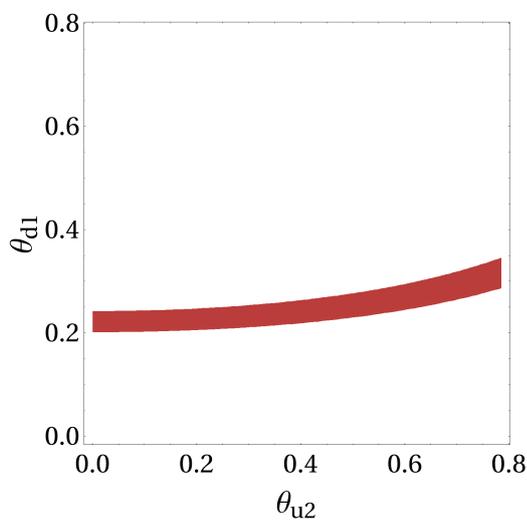
d) Conjunto solución que nace al resolver la ecuación $\cos \theta_{d,1} \sin \theta_{u,2} = z$, con z en el intervalo $[0,96, 0,99]$.



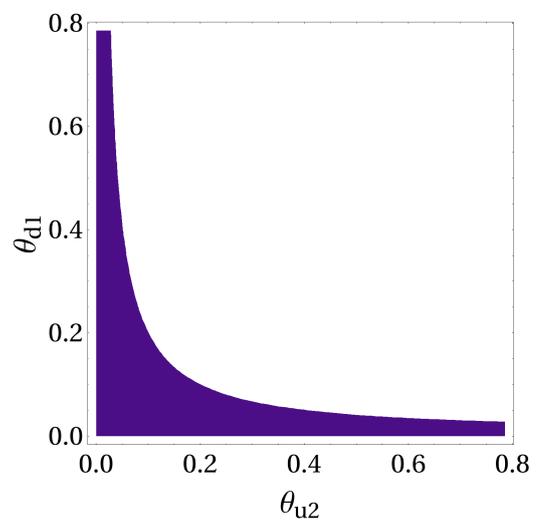
b) Conjunto solución que nace al resolver la ecuación $-\sin \theta_{d,1} = z$, con z en el intervalo $[0,2, 0,24]$.



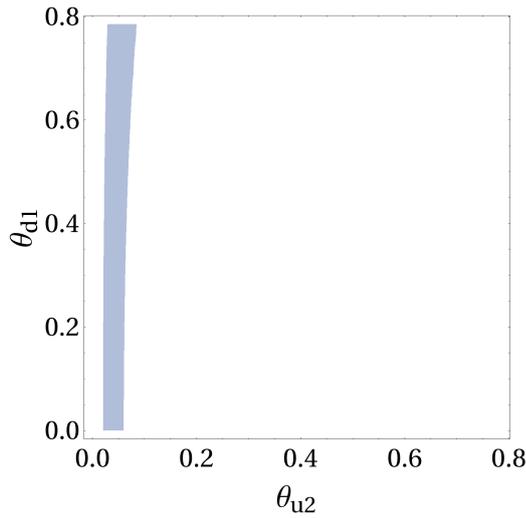
e) Conjunto solución que nace al resolver la ecuación $-\sin \theta_{u,1} = z$, con z en el intervalo $[0,02, 0,06]$.



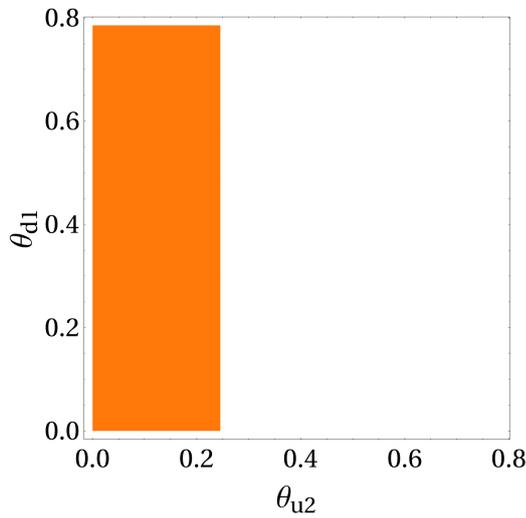
c) Conjunto solución que nace al resolver la ecuación $\cos \theta_{u,2} \sin \theta_{d,1} = z$, con z en el intervalo $[0,2, 0,24]$.



f) Conjunto solución que nace al resolver la ecuación $-\sin \theta_{d,1} \sin \theta_{u,2} = z$, con z en el intervalo $[0, 0,06]$.



g) Conjunto solución que nace al resolver la ecuación $\cos \theta_{d,1} \text{sen } \theta_{u,2} = z$, con z en el intervalo $[0,02, 0,06]$.



h) Conjunto solución que nace al resolver la ecuación $\cos \theta_{u,2} = z$, con z en el intervalo $[0,97, 1]$.

Debemos de encontrar los valores de $\theta_{d,1}$ y $\theta_{u,2}$ que reproduzcan los valores experimentales de la V_{CKM} . Por lo tanto, el sistema de ecuaciones que se forma al igualar componente a componente de las matrices dadas en la Ec.(22) y la Ec. (7) es:

| | | | |
|--------|----------------------------------------------------------|-------------------------|----|
| (1, 1) | $\cos \theta_{d,1} = z$ | $0,96 \leq z \leq 0,99$ | a) |
| (1, 2) | $-\text{sen } \theta_{d,1} = z$ | $0,2 \leq z \leq 0,24$ | b) |
| (2, 1) | $\cos \theta_{u,2} \text{sen } \theta_{d,1} = z$ | $0,2 \leq z \leq 0,24$ | c) |
| (2, 2) | $\cos \theta_{d,1} \text{sen } \theta_{u,2} = z$ | $0,96 \leq z \leq 0,99$ | d) |
| (2, 3) | $-\text{sen } \theta_{u,1} = z$ | $0,02 \leq z \leq 0,06$ | e) |
| (3, 1) | $-\text{sen } \theta_{d,1} \text{sen } \theta_{u,2} = z$ | $0 \leq z \leq 0,02$ | f) |
| (3, 2) | $\cos \theta_{d,1} \text{sen } \theta_{u,2} = z$ | $0,02 \leq z \leq 0,06$ | g) |
| (3, 3) | $\cos \theta_{u,2} = z$ | $0,97 \leq z \leq 1$ | h) |

(23)

La primera columna etiqueta la componente que se igualó de las matrices dadas en la Ec.(22) y la Ec. (7), en la segunda columna, la ecuación correspondiente para las variables $\theta_{d,1}$ y $\theta_{u,2}$, la letra z nos da el rango numérico permitido, el cual se da

en la tercera columna, finalmente la letra de la cuarta columna, etiqueta su gráfica.

Para resolver, las ecuaciones anteriores, se empleará el método gráfico, esto es, se realizarán las gráficas asociadas a las ecuaciones y el conjunto solución es la intersección de todas ellas. Antes de presentar este análisis, se gráfica cada una de las ecuaciones dadas en la Ec.(23).

Para la ecuación que proviene, de igualar las entradas (1, 1), el conjunto solución es una familia de rectas horizontales a lo largo de $\theta_{u,2}$. Ver gráfica a).

Análogamente, la solución que nace al igualar las entradas (1, 2), corresponde a una familia de rectas horizontales y se muestra en gráfica b). Cabe mencionar, que esta región, se encuentra contenida en el conjunto de rectas de la ecuación a).

El conjunto de puntos, que dan solución a la ecuación $\cos \theta_{u,2} \text{sen } \theta_{d,1} = z$ con $0,2 \leq z \leq 0,24$, es una región muy parecida a una familia de exponenciales y se exhibe en la gráfica c).

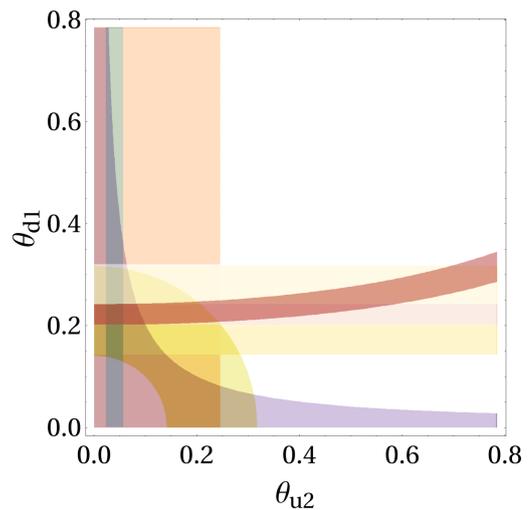
En la gráfica d) se da el conjunto solución de la ecuación $\cos \theta_{d,1} \text{sen } \theta_{u,2} = z$ con $0,96 \leq z \leq 0,99$. La región encontrada consiste en arcos del primer cuadrante de una familia de circunferencias.

Una familia de rectas verticales a lo largo de $\theta_{d,1}$ forman el conjunto solución para la ecuación $-\text{sen } \theta_{u,1} = z$ y su gráfica se muestra en e).

Prosiguiendo con el análisis, en la gráfica f), se da la solución para la ecuación proveniente de igualar las entradas (3, 1). La región correspondiente luce a una familia de hipérbolas en su primer cuadrante.

El conjunto solución de la penúltima ecuación se muestra en g) y la región respectiva es una familia de logaritmos.

Finalmente, una familia de rectas verticales a lo largo de $\theta_{d,1}$ es la región solución para última ecuación. Ver gráfica h).



i) Solución del sistema de ecuaciones que resulta del producto $V_{u,2}^\dagger \cdot V_{d,1}$. Se observa una zona de intersección que va, de 0,025 a 0,075 para $\theta_{u,2}$ y de 0,2 a 0,25 para $\theta_{d,1}$.

En la figura i), se muestran todas las gráficas superpuestas, el conjunto solución es la intersección de todas ellas y corresponde a 0,025 a 0,075 para $\theta_{u,2}$ y 0,2 a 0,25 para $\theta_{d,1}$.

Por lo tanto, de este análisis, vemos que $V_{u,2}^\dagger \cdot V_{d,1}$ reproduce los valores numéricos de ocho elementos de la matriz V_{CKM} dentro de un rango de error permitido y tiene como predicción teórica que el elemento 13 es cero. Nos atrevemos a decir que el conjunto $\{M^{u,2}, M^{u,1}\}$ es una propuesta viable para modelar las matrices de masa M^q ya que (a tercer orden en λ) reproduce la parametrización de Wolfenstein.

6.4. Caso $\{M^{u,1}, M^{d,2}\}$

La V_{CKM} predicha es:

$$V_{u,1}^\dagger \cdot V_{d,2} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{u1} & -\cos \theta_{d2} \sin \theta_{u1} & -\sin \theta_{d2} \sin \theta_{u1} \\ \sin \theta_{u1} & \cos \theta_{d2} \cos \theta_{u1} & \cos \theta_{u1} \sin \theta_{d2} \\ 0 & -\sin \theta_{d2} & \cos \theta_{d2} \end{pmatrix} \quad (24)$$

El sistema de ecuaciones a resolver, se presenta en la Ec. (25), donde la primera columna muestra la coordenada de la componente, en la segunda columna, el sistema de ecuaciones que resulta de igualar el resultado del producto $V_{u,1}^\dagger \cdot V_{d,3}$ con la matriz V_{CKM} , en la tercera columna se observa el dominio de z .

| | | | |
|--------|------------------------------------------|-------------------------|------|
| (1, 1) | $\cos \theta_{u1} = z$ | $0,96 \leq z \leq 0,99$ | |
| (1, 2) | $-\cos \theta_{d2} \sin \theta_{u1} = z$ | $0,2 \leq z \leq 0,24$ | |
| (1, 3) | $-\sin \theta_{u1} \sin \theta_{d2} = z$ | $0 \leq z \leq 0,02$ | |
| (2, 1) | $\sin \theta_{u1} = z$ | $0,2 \leq z \leq 0,24$ | (25) |
| (2, 2) | $\cos \theta_{d2} \cos \theta_{u1} = z$ | $0,96 \leq z \leq 0,99$ | |
| (2, 3) | $\cos \theta_{u1} \sin \theta_{d2} = z$ | $0,02 \leq z \leq 0,06$ | |
| (3, 2) | $-\sin \theta_{d2} = z$ | $0 \leq z \leq 0,02$ | |
| (3, 3) | $\cos \theta_{d2} = z$ | $0,97 \leq z \leq 1$ | |

Realizando un análisis gráfico similar al anterior, se encuentra que el conjunto solución correspondiente va de 0,2 a 0,25 para θ_{u1} y de 0,025 a 0,075 para θ_{d2} . Por lo tanto podemos afirmar que el producto $V_{u,1}^\dagger \cdot V_{d,2}$ reproduce los valores numéricos de ocho elementos de la matriz V_{CKM} dentro de un rango de error permitido y tiene como predicción teórica que el elemento 31 es cero.

7. Conclusiones

El formalismo de texturas, es un procedimiento que tiene como objetivo buscar una forma simple para la matriz de masa M^q , esto se consigue colocando ceros en ciertas entradas de la matriz. Adicionalmente en este trabajo se estudian aquellas texturas con eigenvalores reales, simples y positivos, esto es, aquellas texturas sin ceros en la diagonal principal. De los conjuntos posibles de texturas con estas características analizamos el caso más simple, el de 4 ceros que son: $M(B, F)$, $M(D, B)$ y $M(D, F)$.

Con esta estructura para las matrices de masa M^q , se calcula analíticamente, la forma de las matrices diagonalizantes V_q , estas matrices toman una forma similar a matrices de rotación en \mathbb{R}^3 en los planos xy , yz y xz .

Analizamos todas las combinaciones posibles con las matrices $M^{q,1}$, $M^{q,2}$ y $M^{q,3}$ formando conjuntos de matrices que se pueden clasificar en conjuntos con **estructura paralela**

y conjuntos con **estructura no paralela**. tenemos 3 casos con **estructura paralela** que son $\{M^{u,1}, M^{d,1}\}$, $\{M^{u,2}, M^{d,2}\}$ y $\{M^{u,3}, M^{d,3}\}$, las matrices que diagonalizan a estos conjuntos son $\{V_{u,1}, V_{d,1}\}$, $\{V_{u,2}, V_{d,2}\}$ y $\{V_{u,3}, V_{d,3}\}$ respectivamente.

Los conjuntos de **estructura no paralela** son $\{M^{u,1}, M^{d,2}\}$, $\{M^{u,1}, M^{d,3}\}$, $\{M^{u,2}, M^{d,1}\}$, $\{M^{u,2}, M^{d,3}\}$, $\{M^{u,3}, M^{d,1}\}$, $\{M^{u,3}, M^{d,2}\}$ y las matrices que diagonalizan a estos conjuntos son $\{V_{u,1}, V_{d,2}\}$, $\{V_{u,1}, V_{d,3}\}$, $\{V_{u,2}, V_{d,1}\}$, $\{V_{u,2}, V_{d,3}\}$, $\{V_{u,3}, V_{d,1}\}$ y $\{V_{u,3}, V_{d,2}\}$ respectivamente. Después de realizar un análisis gráfico de todos los productos posibles, encontramos que ninguno de los conjuntos con **estructura paralela** es viable para la forma de las matrices de masa de los quarks.

Para los conjuntos con **estructura no paralela**, encontramos que el conjunto $\{M^{u,1}, M^{d,2}\}$, reproduce los valores numéricos de ocho elementos de la matriz V_{CKM} dentro de un rango de error permitido, y tiene como predicción teórica que el elemento 31 es cero. Por tal motivo, no es una estructura viable como propuesta para las matrices de masa de los quarks.

Para el conjunto $\{M^{u,2}, M^{d,1}\}$ podemos afirmar que, reproduce los valores numéricos experimentales de ocho elementos de la matriz V_{CKM} dentro de un rango de error permitido, y tiene como predicción teórica que el elemento 13 es cero. La región permitida para los parámetros $\theta_{u,2}$ y $\theta_{d,1}$ del modelo van de 0,025 a 0,075 para $\theta_{u,2}$ y de 0,2 a 0,25 para $\theta_{d,1}$. Además, a tercer orden en λ reproduce la parametrización de Wolfenstein de la matriz V_{CKM} .

Agradecimientos

Los autores agradecen al comité organizador por la invitación ha participar en los festejos de los 20 años de la Licenciatura en Física y Tecnología Avanzada y los 10 años de la Maestría en Matemáticas. A los revisores de la Revista Pádi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI sus observaciones y comentarios que enriquecieron este trabajo.

Dedicatoria

La pandemia causada por el virus COVID-19 impactó a la humanidad de una manera sin precedentes, dejando tras de sí una estela de daños irreparables. Sin embargo, la pérdida más devastadora fue, sin duda, el enorme número de vidas que se cobró. Entre ellas, la de Alejandro Isidro Arrazola, un joven profesor de Física cuyo talento, iniciativas y prometedor futuro fueron truncados de manera trágica. Este trabajo está dedicado a su memoria y representa, en esencia, una de las valiosas contribuciones que Alejandro hizo al campo de la Física.

Hasta la vista, amigo

Referencias

Branco, G. C., Lavoura, L., and Silva, J. P. (1999). *CP Violation*, volume 103 of *International series of monographs on physics*. Oxford University Press Inc., Great Clarendon Street, Oxford, 1 edition.

Criollo, A. and Noriega-Papaqui, R. (2012). Symmetric texture-zero mass matrices with positive eigenvalues. Aceptado Pádi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI.

Fritzsch, H. (1977). Calculating the cabibbo angle. *Phys.Lett.*, 70:317.

- Fritzsch, H. (1978). Weak interaction mixing in the six - quark theory. *Phys.Lett.*, 73:317.
- Fritzsch, H. and zhong Xing, Z. (2000). Mass and flavor mixing schemes of quarks and leptons. *Prog.Part.Nucl.Phys.*, 45:1–81.
- Fritzsch, H. and zhong Xing, Z. (2003). Four zero texture of Hermitian quark mass matrices and current experimental tests. *Phys.Lett.*, B555:63–70.
- Lèvy, M. (1996). *Masses Of Fundamental Particles*. Plenum Press.
- Olive, K. et al. (2014). Review of Particle Physics. *Chin.Phys.*, C38:090001.
- Steven, W. (1996). *The Theory of Fields*, volume Vol. II. Cambridge Press.
- Wolfenstein, L. (1983). Parametrization of the kobayashi-maskawa matrix. *Phys. Rev. Lett.*, 51:1945–1947.