DESDE 2013
https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/icbi/issue/archive
Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI
ISSN: 2007-6363

Publicación semestral, Vol. 13, No. Especial (2025) 85–89

Sobre funciones vectoriales cuadráticas y sus gradientes
On quadratic vector functions and their gradients

B. A. Itzá-Ortiz[a,*], E. E. Rodríguez-Torres[a]

[a]Área Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Pachuca, Hidalgo, México.

Resumen

En este artículo discutimos la función vectorial cuadrática $\phi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + x^T b + c$, primero con entradas reales y posteriormente se presenta su versión en entradas complejas. Debido a que es conocido que el gradiente de la versión real es básicamente la parte simétrica de la matriz A, en este artículo se propone una noción del gradiente de una función vectorial de modo que el gradiente de una función vectorial cuadrada compleja sea también básicamente la parte hermitiana de la correspondiente matriz compleja A.

Palabras Clave: Gradiente, funciones vectoriales, números complejos, derivada de Wirtinger.

Abstract

In this article, we discuss the quadratic vector function $\phi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + x^T b + c$, first with real entries and then presenting its version with complex entries. Since it is known that the gradient of the real version is essentially the symmetric part of the matrix A, this article proposes a notion of the gradient of a vector function such that the gradient of a complex quadratic vector function is also essentially the hermitian part of the corresponding complex matrix A.

Keywords: Gradient, vector functions, complex numbers, Wirtinger derivative.

Introducción

En algunas aplicaciones de las matemáticas, es bien sabido que los números complejos suelen no poseer una interpretación estricta en nuestro mundo real. Por ejemplo, en los cursos de cálculo, cuando en un problema de optimización algunas de las soluciones resultan ser números complejos, estas se descartan (Spivak, 2018). A pesar de ello, el desarrollo de la teoría de los números complejos y de las funciones de variable compleja, constituye una rama de investigación activa dentro de las matemáticas, dando resultados bellos y a veces sorprendiendo por sus aplicaciones en otras áreas de las ciencias teóricas y aplicadas (Kreutz-Delgado, 2009).

Por otro lado, es tentador pensar que debido a que los reales es un subconjunto de los complejos, las matemáticas obtenidas con números complejos generalizan a aquellas con los números reales. Sin embargo, esto no es del todo correcto, como se sabe de los conceptos de diferenciación de funciones de variable compleja y variable real (Jeffrey, 2005; Conway, 2019; Marsden y Hoffman, 1998). Para funciones vectoriales, ocurre algo similar, pues en este contexto es la noción del gradiente para funciones vectoriales reales, definido como el vector de derivadas parciales, no resulta tan directo el encontrar una noción correspondiente para gradientes de funciones vectoriales complejas pues basta con pensar en lo que deba significar tomar una derivada parcial respecto a una variable compleja. Motivados por el buen comportamiento y utilidad del gradiente para funciones vectoriales cuadráticas reales, en este artículo proponemos una versión del gradiente complejo, de modo que el gradiente de funciones vectoriales cuadráticas complejas tengan un comportamiento análogo al de la versión real. Otros autores han propuesto versiones para el gradiente de funciones vectoriales complejas, ver por ejemplo (van den Bos, 1994; Brandwood, 1983). La versión que se presenta en este artículo puede considerarse como elemental desde el punto de vista algebraico, por lo que se pretende que sea autocontenido y de fácil entendimiento para quien ha llevado algún curso de variable compleja. Bajo este entendimiento, se omitirán discusiones de holomorfidad.

Este artículo se divide en dos secciones. En la primera sección se da un breve repaso de números complejos y matrices, así como la notación necesaria para la segunda sección, en donde se discuten los resultados principales.

*Autor para correspondencia: itza@uaeh.edu.mx
Correo electrónico: itza@uaeh.edu.mx (Benjamín Alfonso Itzá Ortiz), erikart@uaeh.edu.mx (Erika Elizabeth Rodríguez Torres)

Historial del manuscrito: recibido el 30/09/2024, última versión-revisada recibida el 22/11/2024, aceptado el 27/11/2024, publicado el 26/04/2025. **DOI:** https://doi.org/10.29057/icbi.v13iEspecial.13877

1. Nociones básicas

Recuerde que un número complejo es aquel de la forma

$$z = a + ib$$

con a y b números reales. Al número a se le conoce como la parte real del número complejo z y se le denota $\mathrm{Re}(z)$, mientras que al número b se le conoce como la parte imaginaria de z y se le denota por $\mathrm{Im}(z)$. El conjugado de un número complejo $z = a + ib$ se denota y define como el número complejo

$$\overline{z} = a - ib.$$

En este trabajo, se denota por $M_{n,m}(\mathbb{R})$ y $M_{n,m}(\mathbb{C})$ a las matrices de $n \times m$ con entradas en los reales y los complejos, respectivamente. En caso de que $m = n$, simplemente diremos que $M_n(\mathbb{R})$ y $M_n(\mathbb{C})$ consisten de las matrices de $n \times n$ con entradas reales y complejas, respectivamente. Pueden considerarse a las matrices de $n\times n$ como una generalización de los números reales y complejos, ya que estos pueden ser considerados como el caso particular de las matrices de 1×1. Asimismo, se identifica a $\mathbb{R}^n$ con $M_{n,1}(\mathbb{R})$, de modo que una n-ada $x = (x_1, \dots, x_n)$ de números reales, es también visto como un vector columna $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Similarmente, se identifica a $\mathbb{C}^n$ con $M_{n,1}(\mathbb{C})$, de modo que una n-ada $z = (z_1, \dots, z_n)$ de números complejos, es también visto como un vector columna $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$. Si A es una matriz de $n \times m$ con entradas reales o complejas, su matriz traspuesta A^T es la matriz de $m \times n$ cuya entrada (k, l) es la entrada (l, k) de A. Con la notación A_k denotamos al k-ésimo renglón de A mientras que con A^k denotamos a la k-ésima columna de A. Si A es una matriz con entradas complejas, denotamos por $\overline{A}$ la matriz cuyas entradas son los complejos conjugados de las entradas de A. Finalmente, si A es una matriz con entradas complejas, se define $A^* = \overline{A}^T$.

2. Funciones vectoriales cuadráticas

2.1. *Función Vectorial cuadrática real*

Sean $A \in M_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$. La función vectorial cuadrática $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se define como:

$$\phi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + x^T b + c. \tag{1}$$

2.1.1. *Gradiente de $\phi(x)$*

Recuerde que el gradiente de $\phi(x)$, denotado por $\nabla\phi$, es el campo vectorial de las derivadas parciales de la función vectorial (campo escalar) $\phi(x)$, es decir,

$$\nabla\phi(x) = \left(\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\phi(x)}{\partial x_n}\right).$$

Para el caso de la función vectorial cuadrática ϕ dada en (1), es conocido (Golub y Loan, 2013, P2.1.3 pg. 67) que

$$\nabla\phi(x) = \frac{A + A^T}{2}x + b. \tag{2}$$

Se omitirá el cálculo comprobatorio de (2) dado que este trabajo se enfoca en realizar el cálculo del caso complejo. Así mismo, toda vez que se tratan de cálculos análogos, estos serán omitidos para evitar la repetición de los mismos.

Es satisfactorio notar un par de observaciones:

1. en el caso de que A fuera una matriz de uno por uno $A = (a)$, se recupera el caso de funciones reales conocido, es decir, se tiene que $\phi(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$ y que $\nabla\phi(x) = \phi'(x) = ax + b$.
2. En el caso que la matriz A sea simétrica, es decir, que $A^T = A$, la fórmula del gradiente (2) se reduce a $\nabla\phi(x) = Ax + b$, que es la forma vectorial reminiscente de la derivada de una cuadrática.

Como consecuencia de estas observaciones, es posible concluir que toda matriz simétrica se puede realizar como el gradiente de una forma cuadrática, es decir, las matrices simétricas son gradientes de funciones vectoriales cuadráticas (1) con $b = c = 0$. Más precisamente, si A es simétrica entonces es el gradiente de $\frac{1}{2}x^T Ax$.

El gradiente de una función vectorial real indica la dirección en la que la función crece más rápidamente. Esto es fundamental en optimización, ya que se puede utilizar para encontrar máximos y mínimos locales (Hubbard y Hubbard, 1998). En el caso de funciones vectoriales cuadráticas, la función $\phi(x)$ se utiliza en problemas de optimización cuadrática, donde se busca minimizar $\phi(x)$ sujeta a ciertas restricciones. Estos problemas son comunes en economía, ingeniería y ciencias de la computación. Por ejemplo, en la optimización de portafolios financieros, A puede representar la matriz de covarianza de los retornos de los activos y b puede representar el vector de retornos esperados (Boyd y Vandenberghe, 2004). En mecánica cuántica, $\phi(x)$ puede representar la energía potencial en un sistema de partículas, donde A representa las interacciones entre las partículas y b representa un campo externo. Este enfoque es útil en la simulación de sistemas cuánticos y en el diseño de materiales (Griffiths y Schroeter, 2018). Finalmente, mencionamos que en teoría de control, $\phi(x)$ se utiliza para diseñar sistemas de control óptimos, donde A representa la dinámica del sistema y b representa las entradas de control. Este enfoque es esencial en la ingeniería de sistemas y en la robótica (Ogata, 1970).

Por otro lado, la matriz A puede tener diversas propiedades que influyen en el comportamiento de la función $\phi(x)$. Estas propiedades son cruciales para determinar la naturaleza de los puntos críticos de $\phi(x)$ (Holman, 2010).

2.2. *Función vectorial cuadrática compleja*

Sean $A \in M_n(\mathbb{C})$, $b \in \mathbb{C}^n$ y $c \in \mathbb{C}$. La función vectorial cuadrática $\phi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ se define por

$$\phi(z) = \frac{1}{2}z^* Az + z^* b + c. \tag{3}$$

Notar que una diferencia entre la versión real (1) y la compleja (3) es el uso de la traspuesta x^T en uno y la traspuesta conjugada z^* en el otro.

2.3. Gradiente de $\phi(z)$

Como se comentó en la introducción, la manera de definir la derivada de una función f, ya sea de variable real o compleja, es en cierto modo similar, ya que en ambos casos se utilizan límites de cocientes diferenciales. Sin embargo, las teorías de diferenciación de funciones de variable real y compleja difieren conceptualmente, es decir, no puede decirse de ninguna manera que una generaliza a la otra. Por ejemplo, la función módulo de z al cuadrado, es decir, $f(z) = |z|^2$, es una función que no es diferenciable en ningún punto, salvo en $z = 0$; sin embargo, su restricción a variable real, la función valor absoluto $f(x) = |x|^2$ no es diferenciable en $x = 0$ y sí es diferenciable en cualquier otro punto.

Para nuestros cálculos, emplearemos la llamada derivada de Wirtinger para funciones de variable compleja (Scheidemann, 2023, 1.47 pg. 19). Estas derivadas están definidas por los siguientes operadores en derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{4}$$

Estos operadores tiene relaciones interesantes con la derivada de una función de variable compleja f cuando f es diferenciable. Para dar una idea de esta relación, vamos a probar que una función $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ es diferenciable en z si y solo si $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. Equivalentemente, basta verificar que $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ si y solo si se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Pero esto se sigue considerando las partes real e imaginaria en la ecuación

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u(x,y) + iv(x,y)) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).
\end{aligned}$$

En general, una función de variable compleja puede no ser diferenciable y aún así admitir su derivada de Wirtinger, pues basta que las derivadas parciales de su parte imaginaria y compleja sean de clase C^1, es decir, que admitan derivadas parciales continuas, sin tener que satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por ejemplo, para la función $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ tenemos que $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(2x - i2y) = x - iy = \overline{z}$. y $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(2x + i2y) = x + iy = z$. Otros ejemplos que serán útiles para nuestros propósitos son las derivadas de la función identidad y la función complejo conjugado. Respecto de la parcial de z son:

$$\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(x+iy)}{\partial x} - i\frac{\partial(x+iy)}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(1 - i(i)) = 1,$$

y

$$\frac{\partial \overline{z}}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(x-iy)}{\partial x} - i\frac{\partial(x-iy)}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(1 - i(-i)) = 0.$$

Mientras que las parciales respecto a $\overline{z}$ de dichas funciones son:

$$\frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(x+iy)}{\partial x} + i\frac{\partial(x+iy)}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(1 + i(i)) = 0,$$

y

$$\frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(x-iy)}{\partial x} + i\frac{\partial(x-iy)}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(1 + i(-i)) = 1.$$

Una de las propiedades elementales que satisface cada una de las derivadas de Wirtinger, cuyas demostraciones dejamos al lector, es la regla del producto. Es decir, si f y g son funciones de variable compleja con partes reales e imaginarias de clase C^1, se tiene que

$$\frac{\partial(fg)}{\partial z} = f\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}g \quad \text{y} \quad \frac{\partial(fg)}{\partial \overline{z}} = f\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}g.$$

Es quizá ilustrativo utilizar estas fórmulas como una manera alterna para deducir las derivadas de $|z|^2 = z\overline{z}$, pues $\frac{\partial |z|^2}{\partial z} = z\frac{\partial \overline{z}}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial z}\overline{z} = \overline{z}$ y $\frac{\partial |z|^2}{\partial \overline{z}} = z\frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial z}{\partial \overline{z}}\overline{z} = z$.

Para funciones vectoriales complejas $\sigma\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, es útil que cuando $z = (z_1, \ldots, z_n)$, se denote $z_k = x_k + iy_k$ y entonces se escriba

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_k} - i\frac{\partial \sigma}{\partial y_k}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \overline{z_k}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_k} + i\frac{\partial \sigma}{\partial y_k}\right),$$

de modo que podemos establecer que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial \sigma}{\partial z_n}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \overline{z}} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \overline{z_1}}, \ldots, \frac{\partial \sigma}{\partial \overline{z_n}}\right).$$

Definición 3. *El gradiente sobre funciones vectoriales complejas se define como el operador*

$$\nabla = \overline{\frac{\partial}{\partial z}} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}.$$

De la definición 3, cuando σ es una función vectorial compleja, se tiene que su gradiente puede escribirse como

$$\nabla\sigma(z) = \left(\overline{\frac{\partial \sigma(z)}{\partial z_1}} + \frac{\partial \sigma(z)}{\partial \overline{z_1}}, \ldots, \overline{\frac{\partial \sigma(z)}{\partial z_n}} + \frac{\partial \sigma(z)}{\partial \overline{z_n}}\right).$$

Primero se verifica que el gradiente separa sumas y saca escalares reales.

Proposición 4. *Si ϕ_1 y ϕ_2 son funciones vectoriales complejas y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\nabla(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = \alpha\nabla(\phi_1) + \beta\nabla(\phi_2).$$

Demostración. Se sigue de la linealidad de las derivadas parciales, que el conjugado complejo separa sumas y productos, y que el conjugado de un número real es él mismo. □

Puede ser un poco decepcionante que el gradiente no sea formalmente un operador lineal, pues no saca escalares complejos, solo reales. Sin embargo, para nuestros propósitos, esta propiedad es suficiente.

Puesto que ϕ puede pensarse como la suma de tres funciones, por la proposición 4, basta con sacar por separado el gradiente de las funciones vectoriales $z \mapsto \frac{1}{2}z^*Az$, $z \mapsto z^*b$ y $z \mapsto c$.

Dado que las parciales de funciones contantes es cero, es directo ver que

$$\nabla(c) = 0. \tag{5}$$

Para el gradiente de la función vectorial $z \mapsto z^*b$, asumiendo que $b = (b_1, \dots, b_n)$ y que $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, calculamos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(z^*b)}{\partial z_k} &= \frac{\partial}{\partial z_k}\left(\sum_{s=1}^{n} \overline{z_s} b_s\right) \\
&= \sum_{s=1}^{n} b_s \frac{\partial \overline{z_s}}{\partial z_k} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(z^*b)}{\partial \overline{z_k}} &= \frac{\partial}{\partial \overline{z_k}}\left(\sum_{s=1}^{n} \overline{z_s} b_s\right) \\
&= \sum_{s=1}^{n} b_s \frac{\partial \overline{z_s}}{\partial \overline{z_k}} \\
&= b_k.
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
\begin{aligned}
\nabla(z^*b) &= \left(\overline{\frac{\partial z^*b}{\partial z_1}} + \frac{\partial z^*b}{\partial \overline{z_1}}, \dots, \overline{\frac{\partial z^*b}{\partial z_n}} + \frac{\partial z^*b}{\partial \overline{z_n}}\right) \\
&= (b_1, \dots, b_n) \\
&= b. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Finalmente, suponiendo que $A = (a_{st})$, entonces

$$
z^*Az = \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} \overline{z_t} A_{st} z_s.
$$

Se sigue que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z^*Az}{\partial z_k} &= \frac{\partial}{\partial z_k}\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} \overline{z_s} a_{st} z_t\right) \\
&= \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} a_{st} \frac{\partial(\overline{z_s} z_t)}{\partial z_k} \\
&= \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} a_{st}\left(\overline{z_s}\frac{\partial z_t}{\partial z_k} + \frac{\partial \overline{z_s}}{\partial z_k} z_t\right) \\
&= \sum_{s=1}^{n} a_{sk} \overline{z_s} \\
&= z^*A^k,
\end{aligned}
$$

Por lo que

$$
\frac{\partial z^*Az}{\partial z} = \left(\frac{\partial \phi(z)}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial \phi(z)}{\partial z_n}\right) = z^*A = A^T \overline{z},
$$

y por tanto

$$
\overline{\frac{\partial z^*Az}{\partial z}} = \overline{A^T \overline{z}} = \overline{A}^T \overline{\overline{z}} = A^*z. \qquad (7)
$$

Mientras que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z^*Az}{\partial \overline{z_k}} &= \frac{\partial}{\partial \overline{z_k}}\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} \overline{z_s} a_{st} z_t\right) \\
&= \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} a_{st} \frac{\partial(\overline{z_s} z_t)}{\partial \overline{z_k}} \\
&= \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} a_{st}\left(\overline{z_s}\frac{\partial z_t}{\partial \overline{z_k}} + \frac{\partial \overline{z_s}}{\partial \overline{z_k}} z_t\right) \\
&= \sum_{t=1}^{n} a_{kt} z_t \\
&= A_k z,
\end{aligned}
$$

y entonces

$$
\frac{\partial z^*Az}{\partial \overline{z}} = \left(\frac{\partial \phi(z)}{\partial \overline{z_1}}, \dots, \frac{\partial \phi(z)}{\partial \overline{z_n}}\right) = Az. \qquad (8)
$$

Combinando la proposición 4 con las ecuaciones (5),(6),(7), y (8), hemos probado el resulto siguiente.

Teorema 5. *Si $\phi(z) = \frac{1}{2}z^*Az + z^*b + c$ es una función vectorial cuadrática compleja entonces su gradiente es*

$$
\nabla\phi(z) = \frac{A + A^*}{2} z + b.
$$

Observe que similar al caso real, tenemos las siguientes dos observaciones.

1. Cuando $0 \neq A = (a)$ es una matriz compleja de uno por uno, el gradiente de $\phi(z) = \frac{1}{2}a|z|^2 + b\overline{z} + c$ es $\nabla\phi(z) = \overline{\frac{\partial\left(\frac{1}{2}a|z|^2 + b\overline{z} + c\right)}{\partial z}} + \frac{\partial\left(\frac{1}{2}a|z|^2 + b\overline{z} + c\right)}{\partial \overline{z}} = \overline{\frac{1}{2}a\overline{z}} + \left(\frac{1}{2}az + b\right) = \mathrm{Re}(a)z + b$. Si además $b = 0$, el único punto donde ϕ es diferenciable es en $z = 0$ y en este caso sí se cumple que $\nabla\phi(0) = 0 = \phi'(0)$. Si $b \neq 0$, entonces ϕ no es diferenciable ya que la función complejo conjugado $\overline{z}$ no satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann.
2. El teorema 5 implica que el gradiente de ϕ cuando A es hermitiana, es decir, cuando $A^* = A$, es el reminiscente de la derivada de una función cuadrática pues en tal caso $\nabla\phi(z) = Az + b$.

Similar al caso real, otra consecuencia es que se puede concluir que cualquier matriz hermitiana A es el gradiente de una forma cuadrática compleja $\phi(z) = \frac{1}{2}z^*Az$.

Aunque como se mencionó en la introducción, quizá no es común pensar en aplicaciones de optimización con números complejos, pero dado que señales de valores complejos sí ocurren en aplicaciones de ingeniería y en otras ciencias, la optimización en números complejos es de interés fundamental (Adali *et al.*, 2011; Sorber *et al.*, 2012). Es común que el cálculo de Wirtinger, presentado en este artículo, juegue un rol crucial. Consideremos un problema de optimización cuadrática donde queremos minimizar $\phi(x)$. Supongamos que A es una matriz compleja y b es un vector en $\mathbb{R}^n$. El problema se puede resolver utilizando métodos de gradiente y técnicas de programación cuadrática (Nocedal y Wright, 2006). En la llamada simulación cuántica, la matriz compleja A puede representar el hamiltoniano de un sistema de partículas. La función $\phi(x)$ puede entonces representar la energía total del sistema, y minimizar $\phi(x)$ corresponde a encontrar el estado fundamental del sistema (Sakurai y Napolitano, 2020; Koor *et al.*, 2023). En el diseño de sistemas de control, A puede representar la matriz de estado de un sistema lineal, y b puede representar las entradas de control. La función $\phi(x)$ puede entonces representar un criterio de desempeño que queremos optimizar (Åström y Murray, 2010).

6. Conclusión

En este artículo, se discutió el gradiente de funciones vectoriales cuadráticas. Aunque el caso de variable real es muy conocido, el caso para variable compleja no cuenta, a diferencia del caso real, con un marco estándar. En este trabajo se propone una versión del gradiente de funciones vectoriales complejas que aplicada al caso de funciones vectoriales complejas cuadráticas, recupera algunas propiedades que se consideraron deseables. Estos conceptos son fundamentales en el estudio de matrices y tienen numerosas aplicaciones prácticas.

Agradecimientos

Los autores agradecen los comentarios de los referís que contribuyeron a mejorar el manuscrito.

Referencias

Adali, T., Schreier, P. J., y Scharf, L. L. (2011). Complex-valued signal processing: The proper way to deal with impropriety. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 59(11):5101–5125.

Åström, K. J. y Murray, R. M. (2010). *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton University Press.

Boyd, S. y Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge university press.

Brandwood, D. (1983). A complex gradient operator and its application in adaptive array theory. *IEE Proceedings H Microwaves, Optics and Antennas*, 130(1):11.

Conway, J. B. (2019). *A course in functional analysis*, volumen 96. Springer.

Golub, G. H. y Loan, C. F. V. (2013). *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press.

Griffiths, D. J. y Schroeter, D. F. (2018). *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge University Press.

Holman, J. (2010). Heat transfer, ed. *New Tork: McGraw-Hill*.

Hubbard, J. H. y Hubbard, B. B. (1998). *Vector calculus, linear algebra and differential forms*. Pearson, Upper Saddle River, NJ.

Jeffrey, A. (2005). *Complex analysis and applications*. Chapman and Hall/CRC.

Koor, K., Qiu, Y., Kwek, L. C., y Rebentrost, P. (2023). A short tutorial on Wirtinger Calculus with applications in quantum information.

Kreutz-Delgado, K. (2009). The complex gradient operator and the $\mathbb{CR}$-calculus ece275a - lecture supplement - fall 2005. Disponible en https://arxiv.org/pdf/0906.4835.

Marsden, J. E. y Hoffman, M. J. (1998). *Basic Complex Analysis*. W. H. Freeman, 3 edición.

Nocedal, J. y Wright, S. J. (2006). Quadratic programming. *Numerical optimization*, pp. 448–492.

Ogata, K. (1970). Modern control engineering. *Prentice-Hall Electrical Engineering Series*.

Sakurai, J. J. y Napolitano, J. (2020). *Modern quantum mechanics*. Cambridge University Press.

Scheidemann, V. (2023). *Introduction to complex analysis in several variables*. Compact Textbooks in Mathematics. Birkhauser Verlag AG, Basel, Switzerland, 2 edición.

Sorber, L., Barel, M. V., y Lathauwer, L. D. (2012). Unconstrained optimization of real functions in complex variables. *SIAM Journal on Optimization*, 22(3):879–898.

Spivak, M. (2018). *Calculus on manifolds: a modern approach to classical theorems of advanced calculus*. CRC press.

van den Bos, A. (1994). Complex gradient and hessian. *IEE Proceedings - Vision, Image, and Signal Processing*, 141(6):380.