



## Recta de Wallace-Simson y triángulos pedal Wallace-Simson's line and pedal triangles

J. Olmedo-Lopez <sup>a,\*</sup>, F. Barrera-Mora <sup>a</sup>

<sup>a</sup>Área Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Pachuca, Hidalgo, México.

### Resumen

En la primera parte de este trabajo empleamos GeoGebra para identificar patrones geométricos, lo que nos permitió formular y demostrar el Teorema 2.5. Un caso de especial interés es el estudio del punto medio E de un segmento perteneciente a la recta de Wallace-Simson de un triángulo equilátero. Al examinar el lugar geométrico descrito por E cuando dicha recta varía, conjeturamos y probamos que se trata de una elipse, resultado que motivó gran parte de este trabajo.

En la segunda parte, retomamos y extendimos contribuciones clásicas de Sturm y Steiner (siglo XIX). A partir de estos desarrollos, obtuvimos una nueva demostración del teorema de Wallace-Simson como corolario. Además, el análisis detallado de las pruebas motivó una búsqueda en la que se encontró que el Teorema de Pitágoras es equivalente a la fórmula de adición para el seno y el coseno.

**Palabras Clave:** Recta de Wallace-Simson, Triángulo pedal, GeoGebra, AlphaGeometry.

### Abstract

In the first part of this work, we employed GeoGebra to identify geometric patterns, which enabled us to formulate and prove Theorem 2.5. A case of particular interest is the study of the midpoint, E, of a segment belonging to the Wallace-Simson line of an equilateral triangle. By analyzing the locus described by E as this line varies, we proved that it is an ellipse—a result that motivated a significant portion of this research.

In the second part, we revisited and extended classical contributions by Sturm and Steiner (19th century). From these developments, we derived a novel proof of the Wallace-Simson theorem as a corollary. Furthermore, a detailed analysis of the proofs prompted an investigation which revealed that the Pythagorean Theorem is equivalent to the addition formulas for the sine and cosine functions.

**Keywords:** Wallace-Simson line, Pedal triangle, GeoGebra, AlphaGeometry.

### 1. Introducción

Podría afirmarse que el inicio de las matemáticas como disciplina estructurada y formal se remonta a Los Elementos de Euclides (Euclid, 1956, Vol. 1, 2, 3), una obra fundamental en la que se presentan resultados que han perdurado hasta nuestros días. Ejemplos notables de estos son: la Proposición 20, Libro IX que establece la infinitud de los números primos y la Proposición 47, Libro I, conocido como el Teorema de Pitágoras. De acuerdo con Hardy (Hardy, 2005, pp 18-21) estos son dos de los resultados más importantes en matemáticas.

A lo largo del tiempo el desarrollo de la geometría ha pasado por épocas de gran auge, siendo una de las más significativas la incorporación de ideas algebraicas en la solución de proble-

mas geométricos. Estas ideas se han extendido y evolucionado dando lugar a desarrollos del calibre de la Geometría Algebraica, una rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de las propiedades geométricas y aritméticas de las soluciones de sistemas de ecuaciones polinómicas mediante herramientas algebraicas.

Con el advenimiento de herramientas digitales, el estudio de la geometría euclidiana ha experimentado un impulso relevante y renovador. Por un lado, sistemas de geometría dinámica como GeoGebra han abierto un amplio abanico de posibilidades para abordar, tanto problemas clásicos como nuevos, Santos-Trigo *et al.* (2021), permitiendo visualizaciones interactivas y exploraciones dinámicas que ayudan a la identificación de patrones. Estos avances no solo facilitan la comprensión de con-

\*Autor para correspondencia: josmar.olmedo.lopez@gmail.com

**Correo electrónico:** josmar.olmedo.lopez (Josmar Olmedo-Lopez), fbarrera10147@gmail.com (Fernando Barrera-Mora).

**Historial del manuscrito:** recibido el 10/05/2025, última versión-revisada recibida el 20/09/2025, aceptado el 27/10/2025, en línea (postprint) desde el 21/11/2025, publicado el 05/07/2026. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v14i27.15131>



ceptos geométricos, sino que pueden fomentar la creatividad en la resolución de problemas. Por otro lado, la evolución y desarrollo de sistemas de geometría como AlphaGeometry, un sistema basado en la llamada Inteligencia Artificial que combina técnicas de razonamiento geométrico y algebraico para resolver problemas tipo olimpiada, (International Mathematics Olympiad) AlphaProof y AlphaGeometry (2024), abre desafíos que no pueden soslayarse en cuanto a lo que el aprendizaje de la geometría demanda. Este tipo de herramientas representa un salto cualitativo en el aprendizaje y desarrollo de la geometría, ya que no solo automatizan procesos, pues ofrecen nuevas perspectivas y enfoques para abordar desafíos matemáticos. En este trabajo, mostramos cómo las herramientas digitales —desde plataformas interactivas como GeoGebra hasta sistemas avanzados como AlphaGeometry— pueden revolucionar el estudio y la enseñanza de la geometría. Estas tecnologías no solo facilitan la exploración de conceptos geométricos, sino que también abren nuevas perspectivas para la formulación y resolución de problemas, enriqueciendo tanto la investigación como el aprendizaje.

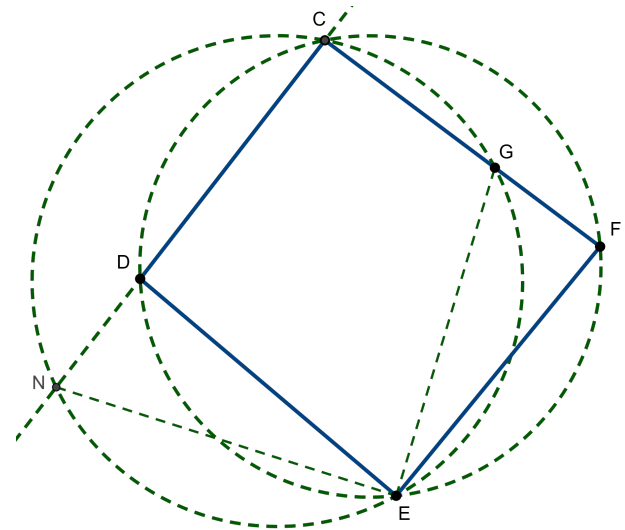


Figura 1: Lema 2.1

*Demostración.* El resultado se obtiene notando que los cuadriláteros  $CDEF$  y  $CNEG$  son cíclicos y comparten un ángulo, es decir,  $\angle DCG = \angle DCF$  y éste, sumado con  $\angle NEG$  o con  $\angle DEF$  da como resultado  $\pi$ , de lo cual se obtiene la afirmación del lema.  $\square$

## 2. Recta de Wallace-Simson y lugares geométricos.

**Teorema 2.1.** (Wallace-Simson) *Sea  $ABC$  un triángulo y  $\Omega$  su circuncírculo. Si  $D \in \Omega$ ;  $E, F$  y  $G$  son los pies de perpendiculares desde  $D$  a los lados de  $ABC$  o sus prolongaciones, entonces  $E, F$  y  $G$  son colineales. Además, si la línea  $DF$  interseca a  $\Omega$  en  $M$ , entonces  $MB$  es paralela a  $EF$ .*

La recta que estamos llamando de Wallace-Simson, tradicionalmente se atribuye a Robert Simson (1687-1768), aunque no hay evidencias históricas que respalden su autoría. Por otro lado, investigaciones de los siglos XIX y XX, como las citadas por (Coxeter, 1967, p. 41), sugieren que el primer registro documentado del teorema que refiere a la citada recta, aparece en un artículo de William Wallace de 1797. Por esta razón decidimos usar el término recta de Wallace-Simson y al resultado que garantiza su existencia le llamamos el Teorema de Wallace-Simson. Dado que la recta de Wallace-Simson juega un rol importante en la discusión de este trabajo y considerando que éste tiene entre sus hipotéticos lectores a estudiantes y público en general, consideramos de importancia incluir un par de demostraciones. La primera es la del Teorema 2.1, mientras que la segunda es una consecuencia directa del Teorema 3.2, el cual tiene importancia en la discusión del triángulo pedal.

**Lema 2.1.** *Sean,  $CDEF$  un cuadrilátero cíclico,  $N$  la intersección de la circunferencia que pasa por  $E, G$  y  $C$  con la recta  $CE$  y  $G$  un punto sobre el segmento  $CF$  diferente  $C$  y  $F$ . Entonces  $\angle NED = \angle GEF$ .*

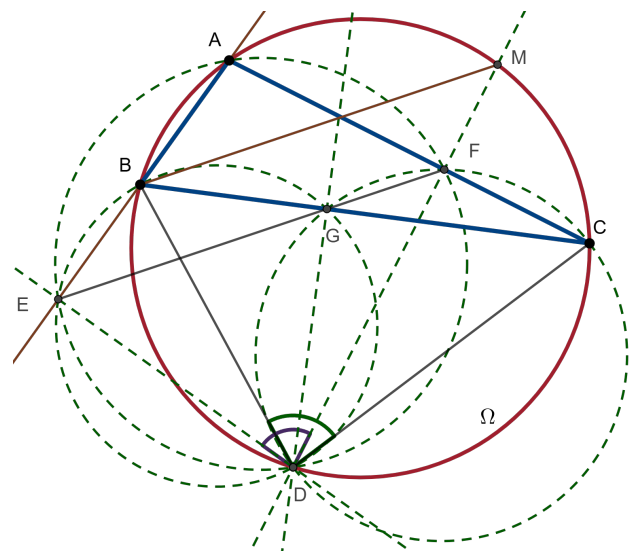


Figura 2: Existencia de la recta de Wallace-Simson

*Demostración.* Demostrar que  $E, F$  y  $G$  son colineales equivale a probar que  $\angle BGE = \angle CGF$ . Por la construcción de las perpendiculares desde  $D$  se tiene que los cuadriláteros  $DEBG$ ,  $DGFC$  y  $DFAE$  son cíclicos. De esto obtenemos que  $\angle CGF = \angle CDF$  y  $\angle BGE = \angle EDB$ . La demostración se termina si probamos que  $\angle EDB = \angle CDF$ , que es consecuencia del Lema 2.1 aplicado a los cuadriláteros  $DBAC$  y  $DEAF$ . Para demostrar

que  $MB$  es paralela a  $EF$ , por lo ya probado, notemos que los ángulos  $\angle MBC$  y  $\angle CDM$  son congruentes a  $\angle EGB$ , y de esto se obtiene la afirmación.  $\square$

**Definición 2.1.** La recta del Teorema 2.1 es llamada recta de Wallace-Simson y en este trabajo será denotada por  $\mathcal{L}$ .

**Observación 2.1.** Nótese que la Recta de Wallace-Simson depende del punto  $D \in \Omega$ , que la determina, por lo que al variar  $D$  en  $\Omega$  se obtiene una familia de rectas.

Continuamos la discusión explorando propiedades que se derivan de la recta de Wallace-Simson en un triángulo equilátero. De manera más precisa, dado el triángulo equilátero  $ABC$  y la circunferencia que lo circunscribe (ver Figura 3), tomamos un punto  $D$  sobre ésta, a partir del cual se construye  $\mathcal{L}$ . Ahora, elegimos un segmento sobre esta recta y su punto medio,  $E$ . Para ilustrar el método tomaremos dos puntos de la recta de Wallace-Simson y su punto medio. Con estos elementos se tiene el siguiente resultado

**Teorema 2.2.** Si  $ABC$  es un triángulo equilátero,  $\Omega$  su circuncírculo,  $D \in \Omega$ ,  $\mathcal{L}$  la recta de Wallace-Simson determinada por  $D$ , y  $E$  el punto medio del segmento  $S_1S_2$ , con  $S_1$  y  $S_2$  dos de las intersecciones de  $\mathcal{L}$  con los lados del triángulo, entonces el lugar geométrico de  $E$  cuando  $D$  se mueve sobre  $\Omega$  es una elipse.

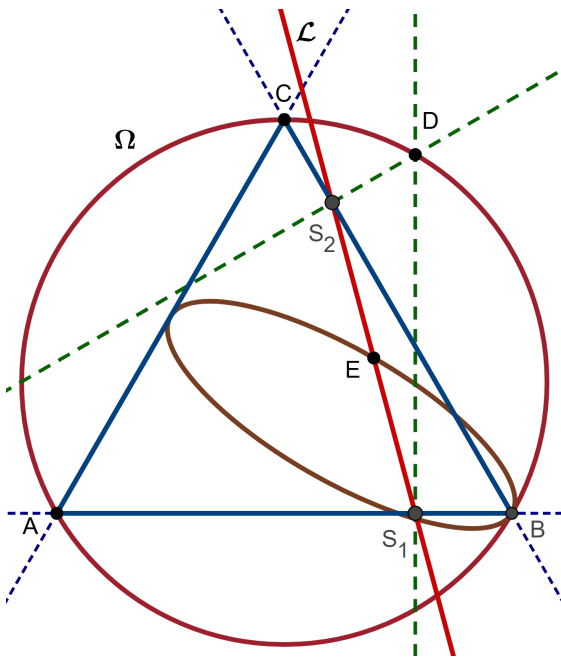


Figura 3: Lugar geométrico del punto  $E$

**Demostración.** Sin perder generalidad supondremos que uno de los vértices del triángulo es el origen de coordenadas y otro está en la parte positiva del eje horizontal. De manera más precisa, podemos suponer que los vértices del triángulo son  $A = (0, 0)$ ,  $B = (a, 0)$  y  $C = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$ . Con esto y algunos cálculos se tiene que la ecuación de  $\Omega$  es:

$$x^2 + y^2 - ax - \frac{a}{\sqrt{3}}y = 0. \tag{1}$$

Debemos probar que para cada  $D \in \Omega$ , las coordenadas de  $E$ , satisfacen la ecuación de una elipse, que será determinada tomando cinco posiciones específicas del punto  $D$ . Los correspondientes puntos son:

$$\begin{aligned} D_1 = (0, 0) &\rightarrow E_1 = \left(\frac{3a}{8}, \frac{\sqrt{3}a}{8}\right), \\ D_2 = (a, 0) &\rightarrow E_2 = (a, 0), \\ D_3 = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right) &\rightarrow E_3 = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{4}\right), \\ D_4 = \left(0, \frac{a}{\sqrt{3}}\right) &\rightarrow E_4 = \left(\frac{a}{4}, \frac{\sqrt{3}a}{4}\right), \\ D_5 = \left(a, \frac{a}{\sqrt{3}}\right) &\rightarrow E_5 = \left(\frac{7a}{8}, \frac{\sqrt{3}a}{8}\right). \end{aligned}$$

Los primeros tres puntos son los vértices del triángulo que dan lugar a tres posiciones del punto  $E$ , el cuarto y quinto son la intersección de la circunferencia con las rectas  $x = 0$  y  $x = a$  respectivamente. Como ejemplo consideramos el punto  $D = (0, 0)$ , para el cual, efectuando cálculos, el punto  $E$  tiene coordenadas  $\left(\frac{3a}{8}, \frac{\sqrt{3}a}{8}\right)$  que es el punto  $E_1$ , siguiendo un procedimiento análogo se obtienen los restantes puntos. Recordemos que la ecuación general de una cónica esta dada por:

$$Lx^2 + Mxy + Ny^2 + Rx + Py + Q = 0, \tag{2}$$

la cual, sin perder generalidad, se puede suponer de la forma

$$x^2 + mxy + ny^2 + rx + py + q = 0. \tag{3}$$

Determinaremos cual es la cónica que pasa por los puntos  $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5$ , para lo cual se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} \frac{3a^2}{64}m + \frac{3\sqrt{3}a^2}{64}n + \frac{3a}{8}r + \frac{\sqrt{3}a}{8}p + q &= -\frac{9a^2}{64} \\ ar + q &= -a^2 \\ \frac{3a^2}{16}m + \frac{\sqrt{3}a^2}{8}n + \frac{a}{2}r + \frac{\sqrt{3}a}{4}p + q &= -\frac{a^2}{4} \\ \frac{3a^2}{16}m + \frac{\sqrt{3}a}{16}n + \frac{a}{4}r + \frac{\sqrt{3}a}{4}p + q &= -\frac{a^2}{16} \\ \frac{3a^2}{64}m + \frac{7\sqrt{3}a}{64}n + \frac{7a}{8}r + \frac{\sqrt{3}a}{8}p + q &= -\frac{49a^2}{64}. \end{aligned} \tag{4}$$

Resolviendo para  $q$  de la segunda ecuación, sustituyendo en las restantes y eliminando denominadores en (4) se obtiene:

$$\begin{aligned} 3a^2m + 3\sqrt{3}a^2n - 40ar + 8\sqrt{3}ap &= 55a^2 \\ 3a^2m + 2\sqrt{3}a^2n - 8ar + 4\sqrt{3}ap &= 12a^2 \\ 3a^2m + \sqrt{3}a^2n - 12ar + 4\sqrt{3}ap &= 15a^2 \\ 3a^2m + 7\sqrt{3}a^2n - 8ar + 8\sqrt{3}ap &= 15a^2. \end{aligned} \tag{5}$$

El sistema (5) se puede resolver usando [SageMath](#), dando como resultado:

$$m = \frac{7}{3}, \quad n = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad r = -\frac{7}{4}a, \quad p = -\frac{17}{4\sqrt{3}}a, \quad q = \frac{3}{4}a^2.$$

Con estos valores, la ecuación que estamos estudiando es:

$$x^2 + \frac{7}{3}y^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}xy - \frac{7}{4}ax - \frac{17}{4\sqrt{3}}ay + \frac{3}{4}a^2 = 0. \quad (6)$$

Es bien conocido el criterio para clasificar cónicas a partir de la ecuación general de segundo grado en dos variables, es decir, si  $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$  representa una cónica general, esta representa una elipse si  $B^2 - 4AC < 0$ . Con esto se verifica directamente que (6) representa una elipse. Para demostrar que el lugar geométrico descrito por  $E$  es una elipse, basta justificar que las coordenadas de  $E$  satisfacen (6). Recordemos que  $E$  es el punto medio de  $S_1$  y  $S_2$  los cuales son las intersecciones de perpendiculares a dos lados del triángulo  $ABC$ , desde el punto  $D$  (ver Figura 3). Si  $D = (u, v)$ , entonces la ecuación de la perpendicular a la recta  $y = 0$ , prolongación del segmento  $AB$ , que pasa por el punto  $D$  está descrita por:

$$x = u \quad (7)$$

y la recta perpendicular a  $y = -\sqrt{3}(x - a)$ , la prolongación del segmento  $BC$ , que pasa por el punto  $D$  está dada por:

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - u) + v. \quad (8)$$

Las coordenadas de  $S_1$  son  $S_1 = (u, 0)$  y para encontrar las coordenadas de  $S_2$  resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} y &= -\sqrt{3}(x - a) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{3}}(x - u) + v, \end{aligned} \quad (9)$$

obteniendo:

$$S_2 = \left( \frac{3a + u - \sqrt{3}v}{4}, \frac{\sqrt{3}(a - u + \sqrt{3}v)}{4} \right).$$

Como  $E$  es punto medio de  $S_1$  y  $S_2$  se llega a:

$$E = \left( \frac{3a + 5u - \sqrt{3}v}{8}, \frac{\sqrt{3}(a - u + \sqrt{3}v)}{8} \right).$$

Para verificar que las coordenadas de  $E$  satisfacen la Ecuación (6), escribimos explícitamente el punto  $D$

$$D = \left( \frac{a}{2} \pm \frac{12\sqrt{3}av + 9a^2 - 36v^2}{6}, v \right), \quad (10)$$

la verificación se realiza a través de SageMath. □

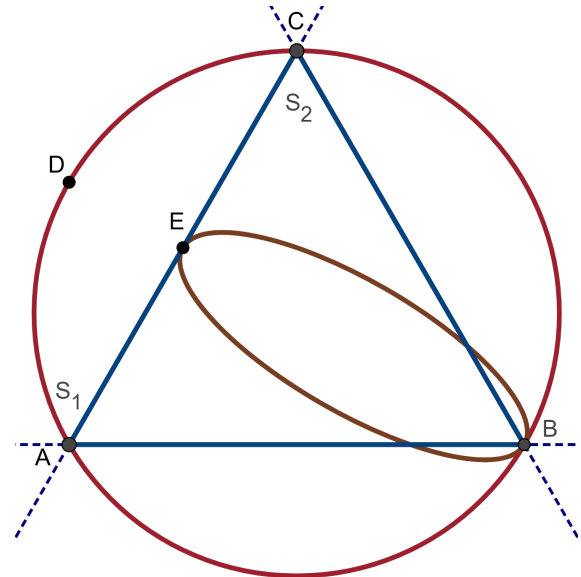


Figura 4: Lugar Geometrico descrito por  $E$ .

Hasta este punto hemos llegado a la construcción que se muestra en la Figura 4. En ésta se tomó a  $E$  como punto medio de  $S_1$  y  $S_2$ . Construcciones análogas se obtienen al tomar puntos medios de cualesquiera parejas de puntos que son intersección de la recta de Wallace-Simson con el triángulo, de hecho en la Figura 5 se ilustran las elipses que se obtienen de estas construcciones. La justificación de que se trata de elipses se obtiene realizando los cálculos al tomar las dos combinaciones restantes de puntos sobre la recta de Wallace-Simson y el triángulo. Con este procedimiento se obtiene que las nuevas elipses de la Figura 5 están dadas por (11) y (12).

$$x^2 + \frac{7}{3}y^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}xy - \frac{a}{4}x - \frac{a}{3\sqrt{3}}y = 0, \quad (11)$$

$$x^2 + \frac{1}{9}y^2 - ax - \frac{a}{6\sqrt{3}}y + \frac{a^2}{4} = 0. \quad (12)$$

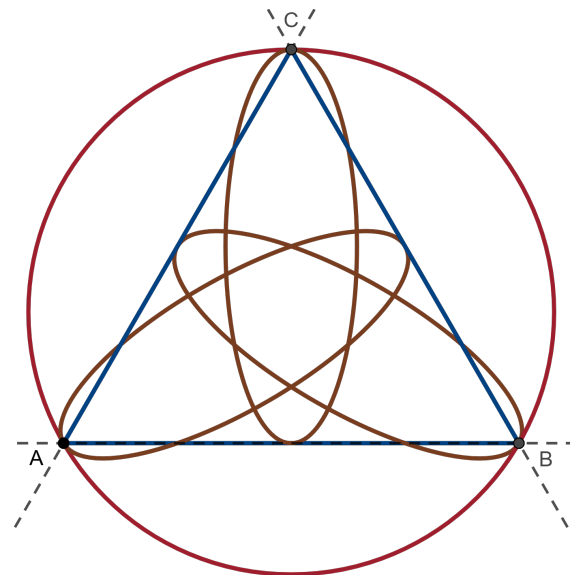


Figura 5: Tres Elipses

Se verifica de manera análoga a lo hecho para la elipse de ecuación dada en (6), que (11) y (12) representan elipses. Una nota interesante es observar que estas mismas elipses las podemos obtener de la siguiente manera: se obtiene la elipse representada por (11), rotando un ángulo de  $\frac{5}{3}\pi$  a la elipse de (6) y después trasladándola  $\frac{a}{2}$  unidades hacia la izquierda, con respecto al vértice  $B$  del triángulo. La elipse de (12) la obtenemos al rotar a la elipse de (6) un ángulo  $\frac{4}{3}\pi$  y trasladándola  $a$  unidades hacia la izquierda con respecto al mismo vértice  $B$ . En esta última construcción aparecen seis puntos interesantes que son vértices de triángulos equiláteros (ver Figura 6).

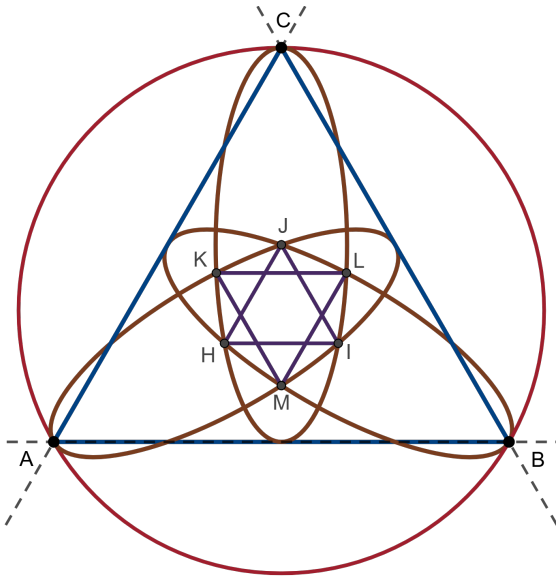


Figura 6: Dos Triángulos Especiales

**Teorema 2.3.** El triángulo  $H I J$  (ver Figura 6) es equilátero con medida de sus lados igual a  $\frac{a}{4}$ .

*Demostración.* Con ayuda de GeoGebra y SageMath se obtienen los vértices y sus coordenadas:

$$H = \left(\frac{3}{8}a, \frac{\sqrt{3}}{8}a\right), \quad I = \left(\frac{5}{8}a, \frac{\sqrt{3}}{8}a\right), \quad J = \left(\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}a}{4}\right).$$

Probaremos que  $H, I, J$  forman un triángulo equilátero de lado  $\frac{a}{4}$ , para lo cual calcularemos la distancia de  $H$  a  $I$ :

$$\begin{aligned} d(H, I) &= \sqrt{\left(\frac{5}{8}a - \frac{3}{8}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{8}a - \frac{\sqrt{3}}{8}a\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2}{8}a\right)^2} \\ &= \frac{1}{4}a. \end{aligned}$$

De manera similar se verifica que  $d(I, J) = d(H, J) = \frac{a}{4}$ .  $\square$

**Teorema 2.4.** El triángulo  $K L M$  es equilátero y sus lados miden  $\frac{2}{7}a$ .

*Demostración.* Con ayuda de GeoGebra y SageMath se obtienen los vértices de este triángulo, dichos vértices tienen por coordenadas:

$$K = \left(\frac{5}{14}a, \frac{3\sqrt{3}}{14}a\right), \quad L = \left(\frac{9}{14}a, \frac{3\sqrt{3}}{14}a\right), \quad M = \left(\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{14}a\right).$$

Probaremos que, en efecto  $K, L, M$  son vértices de un triángulo equilátero de lado  $\frac{2}{7}a$ . Para justificar esta afirmación calcularemos la distancia de  $K$  a  $L$ .

$$\begin{aligned} d(K, L) &= \sqrt{\left(\frac{9}{14}a - \frac{5}{14}a\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{14}a - \frac{3\sqrt{3}}{14}a\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{4}{14}a\right)^2} \\ &= \frac{2}{7}a. \end{aligned}$$

De manera similar se verifica que  $d(L, M) = d(H, M) = \frac{2}{7}a$ .  $\square$

Después de esta observación, volvemos la atención a una elipse en particular, más concretamente la que representa (12). Elegimos a esta, ya que en su ecuación no aparece el término  $xy$ . Un aspecto interesante es describir los elementos que la determinan, es decir, las longitudes de sus semiejes, así como la ubicación de sus focos. Notemos que el eje mayor es la altura del triángulo  $ABC$ , trazada desde el vértice  $C$ , y en consecuencia el centro de la elipse es el punto medio de esta altura. Resta por determinar el semieje menor y la posición de los focos. Como es tradición, las longitudes de los semiejes serán denotadas por  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  respectivamente y la distancia del centro de la elipse a los focos por  $\mathbf{c}$ . Observemos que, completando cuadrados, (12) es equivalente a:

$$\frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{\frac{a^2}{48}} + \frac{\left(y - \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2}{\frac{3a^2}{16}} = 1. \tag{13}$$

De la Ecuación (13) tenemos que:

$$\mathbf{a} = \frac{a}{4\sqrt{3}}, \quad \mathbf{b} = \frac{a\sqrt{3}}{4},$$

y para determinar  $\mathbf{c}$  usamos la ecuación  $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$ , que describe la relación entre las longitudes de los semiejes de la elipse y la distancia focal, obteniendo

$$\mathbf{c} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Con esta información obtenemos que los focos están dados por:

$$F_1 = \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{4} + \frac{a}{\sqrt{6}}\right), \quad F_2 = \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{4} - \frac{a}{\sqrt{6}}\right);$$

y la longitud del semieje menor la obtenemos de:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{a} &= 2\left(\frac{a}{4\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{a}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Note que la longitud del semieje menor es un tercio de la del semieje mayor, que es la mitad de la altura del triángulo  $ABC$ .

La discusión hasta este punto muestra resultados al tomar a  $E$  como el punto medio del segmento  $S_1S_2$ , sin embargo, es posible generalizar esta construcción al dividir el segmento  $S_1S_2$  con una razón dada  $r$ , es decir, en general se tiene:

**Teorema 2.5.** *Sea  $ABC$  un triángulo equilátero y  $\Omega$  su circuncírculo. Si  $E$  es un punto del segmento  $S_1S_2$  que lo divide en una razón dada  $r$ , entonces el lugar geométrico descrito por  $E$  cuando  $D$  se mueve sobre  $\Omega$  es una elipse de ecuación:*

$$x^2 + \frac{r^2 + 2r + 4}{3r^2}y^2 + \frac{2(\sqrt{3}r + \sqrt{3})}{3r}xy - \frac{4ar + 3a}{2(r+1)}x - \frac{4\sqrt{3}ar^2 + 7\sqrt{3}ar + 6\sqrt{3}a}{6(r^2 + r)}y + \frac{2a^2r + a^2}{2(r+1)} = 0. \quad (14)$$

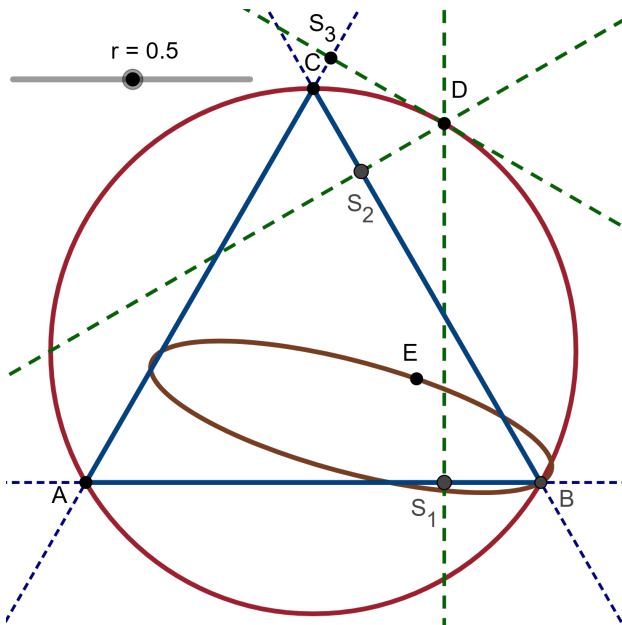


Figura 7: Teorema 2.5 con  $r = \frac{1}{2}$

*Demostración.* Al igual que en las demostraciones anteriores haremos uso de SageMath para realizar los cálculos necesarios. Como se mostró en la prueba del Teorema 2.2, con  $D = (u, v)$  sobre la circunferencia de Ecuación (1), los puntos  $S_1$  y  $S_2$  están dados por:

$$S_1 = (u, 0), \quad S_2 = \left( \frac{3a + u - \sqrt{3}v}{4}, \frac{\sqrt{3}(a - u + \sqrt{3}v)}{4} \right).$$

Ahora, dado  $r \in \mathbb{R}$ , el punto  $E$  tiene coordenadas:

$$E = \left( \frac{4u + r(3a + u - \sqrt{3}v)}{4(r+1)}, \frac{r\sqrt{3}(a - u + \sqrt{3}v)}{4(r+1)} \right) \quad (15)$$

Se verifica con SageMath que  $E$  satisface la Ecuación (14).  $\square$

La Figura 7 ilustra el resultado del Teorema 2.5 para  $r = \frac{1}{2}$ .

Una construcción de la figura en el Teorema 2.5 puede visualizarse [aquí](#).

### 3. Algunos Teoremas de la Geometría Euclídeana en los siglos XIX y XX

Si bien es cierto que a partir del Siglo XVIII, gran parte del desarrollo matemático se concentró en áreas como el análisis, las ecuaciones diferenciales, el álgebra, la topología, la geometría diferencial, por mencionar unas cuantas, en lo que concierne a la geometría euclídeana también hubo avances. Ejemplos relevantes de esto se tienen con resultados como los Teoremas de Morley (1899), de Feuerbach (1822), de Miquel (1838) y de Johnson (1916). EL resultado que inspiró lo que estamos presentando en esta sección es el teorema de Sturm-Steiner (1826), para un triángulo, Teorema 3.2.

#### 3.1. Triángulo Pedal

El resultado que motivó la discusión en este trabajo es el Teorema de Wallace-Simson, en este sentido, es natural buscar una demostración del mismo adicional a las ya existentes. En tal búsqueda y explorando con las herramientas Geogebra y Sage, entre otras, obtuvimos la siguiente conjetura: *El área del triángulo pedal de un punto  $P$  permanece constante si  $P$  se mueve sobre una circunferencia concéntrica a la que circunscribe al triángulo  $ABC$ .* A la luz de esta conjetura es natural preguntarse: ¿Cuál es el triángulo pedal que se menciona allí? Más aún, ¿Qué relación hay entre esta conjetura y el Teorema de Wallace-Simson? En la siguiente definición se precisa lo que es el triángulo pedal de un triángulo respecto de un punto.

**Definición 3.1.** (Johnson, 2013, Definition 189) *El triángulo pedal de un punto  $P$  con respecto a un triángulo  $ABC$ , es aquel cuyos vértices son los pies de las perpendiculares trazadas desde el punto  $P$  a los lados del triángulo.*

Originalmente la Definición 3.1 se da considerando el punto en el interior del triángulo o sobre sus lados, sin embargo ésta se puede extender a cualquier punto del plano que contiene al triángulo, considerando no solo los lados, sino las prolongaciones de éstos.

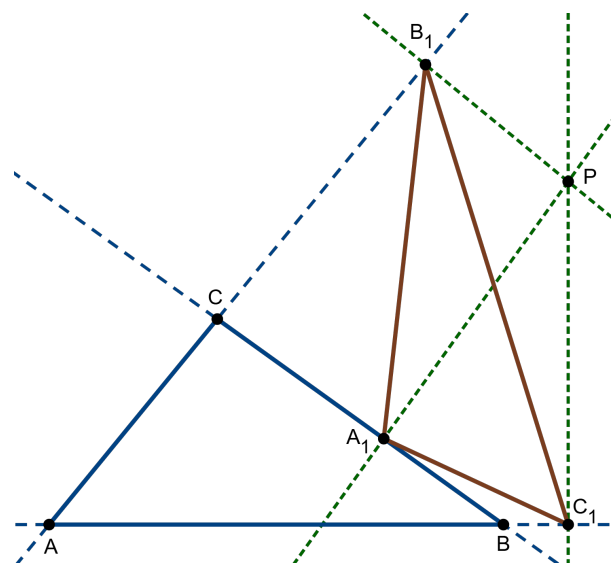


Figura 8: Triángulo pedal con respecto del punto  $P$  fuera del triángulo

Responder la segunda interrogante es algo más complicado, pues, de entre los tantos intentos realizados, la idea más cercana consistía en lo siguiente: Si la conjetura es cierta, basta ver que pasa con el área del triángulo pedal al tomar el punto  $P$  sobre la circunferencia que circunscribe al triángulo  $ABC$ , todo apuntaba a que en este caso el triángulo se degeneraba, es decir, su área era cero, entonces, la cuestión radicaba en demostrar la conjetura. Después de algunos intentos fallidos se decidió consultar fuentes con la finalidad de saber si este resultado ya había sido publicado, el resultado de dicha búsqueda fue el hallazgo del libro **Geometry by its History**, cuyo autor es Ostermann (2012), más concretamente en las páginas 217-222 de tal libro, se aborda este resultado y se da una demostración de la conjetura anteriormente mencionada. El autor frasea de la siguiente manera:

**Teorema 3.1.** (Ostermann, 2012, Theorem 7.28) *The area  $\mathcal{A}'$  of the pedal triangle  $DEF$  remains constant if  $P$  moves on circles concentric to the circumcircle of  $ABC$ . More precisely, this area is given by*

$$\mathcal{A}' = \frac{\mathcal{A}}{4} \left( 1 - \frac{d^2}{R^2} \right), \quad (16)$$

where  $R$  is the radius of the circumcircle,  $d$  the distance  $PO$  and  $\mathcal{A}$  the area of  $ABC$ .

Como mencionamos, la prueba de este teorema se encuentra en (Ostermann, 2012, pags 221 y 222), sin embargo al revisar con detalle dicha demostración, concluimos que no es lo suficientemente clara, además de que (16) no aplica para puntos  $P$  fuera del circuncírculo del triángulo  $ABC$ , esto se debe a que el autor toma como base un artículo de Steiner (1826) el cual hace la demostración solo para puntos interiores al triángulo. Por otro lado, Sturm en (Padovani, 2009, pags 166-173) menciona la prueba del resultado para puntos en el exterior y da una fórmula para calcular el área del triángulo pedal en función de los ángulos del triángulo original, aunque desafortunadamente, pasa por alto un detalle bastante importante que trataremos de esclarecer para que este teorema sea lo más general posible. En este sentido, enunciamos el teorema de la siguiente manera.

**Teorema 3.2.** *Dado el triángulo  $ABC$  de circuncentro  $O$ , circunradio  $R$  y área  $\mathcal{A}$ , para cualquier punto  $P$  en el plano, el área,  $\mathcal{A}'$  del triángulo pedal de  $P$  con respecto al triángulo  $ABC$  está dada por:*

$$\mathcal{A}' = \frac{\mathcal{A}}{4} \left| 1 - \frac{d^2}{R^2} \right|, \quad (17)$$

en donde  $d$  es la distancia de  $O$  a  $P$ . Además, si  $P$  pertenece a una circunferencia concéntrica al circuncírculo del triángulo  $ABC$ , entonces  $\mathcal{A}'$  es constante.

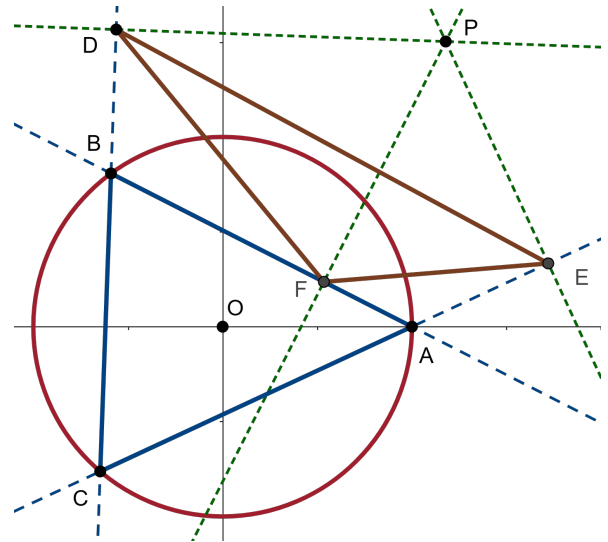


Figura 9: Área del triángulo pedal.

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el circuncentro del triángulo  $ABC$  es el origen de coordenadas y que el vértice  $A$  tiene coordenadas  $(R, 0)$ , con esto, los vértices restantes  $B$  y  $C$ , están dados por:  $B = R(\cos(\theta), \sin(\theta))$  y  $C = R(\cos(\phi), \sin(\phi))$ , para ciertos ángulos  $\theta$  y  $\phi$ . Sea  $P = (x, y)$  un punto cualquiera en el plano y pongamos  $d = \|P\|$ , norma de  $P$ . Luego, el pie  $D$  de la perpendicular desde  $P$  a la prolongación de  $BC$  es:

$$D = B + \mu(C - B), \quad (18)$$

en donde  $\mu = \frac{\langle P - B, C - B \rangle}{|C - B|^2}$  (producto interno de  $P - B$  con  $C - B$ ). Análogamente, obtenemos expresiones para  $E$  (pie en  $AC$ ) y  $F$  (pie en  $AB$ ).

$$E = A + \lambda(C - A) \quad (19)$$

y

$$F = A + \rho(B - A), \quad (20)$$

con  $\lambda = \frac{\langle P - A, C - A \rangle}{|C - A|^2}$  y  $\rho = \frac{\langle P - A, B - A \rangle}{|B - A|^2}$ . Luego, usando un resultado conocido de álgebra lineal, el área  $\mathcal{A}'$  está dada por:

$$\mathcal{A}' = \frac{1}{2} \|(E - D) \times (F - D)\|. \quad (21)$$

Aplicando la bilinealidad del producto cruz y las expresiones para  $E - D$  y  $F - D$  en (21) se obtiene:

$$\begin{aligned} (E - D) \times (F - D) &= [A - B + \lambda(C - A) - \mu(C - B)] \times \\ &\quad [A - B + \rho(B - A) - \mu(C - B)] \\ &= -\mu(A - B) \times (C - B) \\ &\quad + \lambda(C - A) \times (A - B) \\ &\quad + \lambda\rho(C - A) \times (B - A) \\ &\quad - \lambda\mu(C - A) \times (C - B) \\ &\quad - \mu(C - B) \times (A - B) \\ &\quad - \mu\rho(C - B) \times (B - A). \end{aligned} \quad (22)$$

Si definimos:  $u = B - A$ ,  $v = C - A$  y  $w = C - B = v - u$ , entonces  $2\mathcal{A} = \|u \times v\|$ . Con esto, aplicando propiedades del producto cruz y reagrupando, la parte derecha de (22) se transforma en:

$$\begin{aligned} \mu u \times v + \lambda u \times v - \lambda \rho u \times v - \lambda \mu u \times v - \mu u \times v + \mu \rho u \times v \\ = [\lambda(1 - \rho) + \mu(\rho - \lambda)]u \times v. \end{aligned} \quad (23)$$

El resultado final se obtiene de una simplificación con SageMath, es decir, efectuando cálculos con la herramienta mencionada se obtiene:

$$\begin{aligned} \lambda(1 - \rho) + \mu(\rho - \lambda) &= \frac{R^2 - x^2 - y^2}{4R^2} \\ &= \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{d^2}{R^2} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Con esto, sustituyendo (24) en (23) y a su vez, (23) en (21), obtenemos (17). Finalmente,  $\mathcal{A}'$  solo varía con  $d = x^2 + y^2$ , por lo que  $\mathcal{A}'$  permanece constante cuando  $P$  pertenece a una circunferencia concéntrica al circuncírculo del triángulo  $ABC$ . □

Ahora, con toda franqueza podemos enunciar y demostrar el siguiente:

**Corolario 3.1** (Wallace-Simson). *Si  $P$  es un punto sobre el circuncírculo del triángulo  $ABC$ , entonces los pies de las perpendiculares trazadas desde  $P$  a los lados (o sus prolongaciones) del triángulo  $ABC$  son colineales.*

*Demostración.* Sabemos, por el Teorema 3.2, que el área del triángulo pedal  $\mathcal{A}'$ , respecto  $P$ , está dada por

$$\mathcal{A}' = \left| \frac{\mathcal{A}}{4} \left( 1 - \frac{d^2}{R^2} \right) \right|.$$

Si  $P$  pertenece al circuncírculo, entonces  $d = R$ , y de esta condición  $\mathcal{A}' = 0$ , lo cual implica que el triángulo pedal se degenera a un segmento, concluyendo de esto que los pies de las perpendiculares son colineales. □

### 3.2. El Teorema de Pitágoras y las fórmulas de adición para el seno y el coseno

En el análisis de la prueba del Teorema 3.1 propuesta en Ostermann (2012), al probar algunos de los lemas establecidos allí, surgió la idea para dar una prueba del Teorema de Pitágoras, que se había incluido. A sugerencia de los revisores se hizo una exploración más detallada del Teorema de Pitágoras y sus demostraciones, Loomis (1968), llegando a la conclusión que, éste es equivalente a las fórmulas de adición para el seno y el coseno. Por esta razón, y dado que no es común encontrar este resultado en la literatura, consideramos que podría tener alguna utilidad desde el punto de vista didáctico.

**Teorema 3.3.** *Las fórmulas de adición para el seno y el coseno equivalen al Teorema de Pitágoras.*

*Demostración.* Supongamos válido el Teorema de Pitágoras, entonces se cumple la ecuación

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1, \quad (25)$$

para todo  $x$ . Mostraremos que las fórmulas de adición se cumplen.

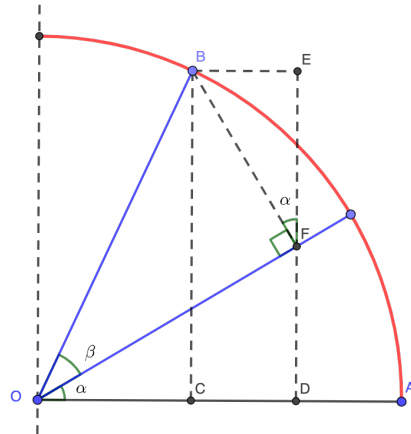


Figura 10: Fórmulas de adición

En la Figura 10, el arco de circunferencia tiene radio uno y se han representado los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ . A partir de esto se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} BF &= \sin(\beta), \\ OF &= \cos(\beta). \end{aligned} \quad (26)$$

Los triángulos  $DOF$  y  $BEF$  son semejantes, por lo que  $\cos(\alpha) = \frac{EF}{BF} = \frac{EF}{\sin(\beta)}$ , lo que implica

$$EF = \cos(\alpha) \sin(\beta). \quad (27)$$

Procedimientos análogos llevan a:

$$\begin{aligned} FD &= \sin(\alpha) \cos(\beta), \\ OD &= \cos(\alpha) \cos(\beta) \\ BE &= \sin(\alpha) \sin(\beta). \end{aligned} \quad (28)$$

También se tiene  $CD = BE$ . Usando la Ecuación (25) llegamos a:

$$\begin{aligned} \cos^2(\alpha + \beta) &= 1 - \sin^2(\alpha + \beta) \\ &= 1 - (EF + FD)^2 \\ &= 1 - EF^2 - 2(EF)(FD) - FD^2 \\ &= 1 - \sin^2(\beta) \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \cos^2(\beta) - 2(EF)(FD) \\ &= \sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) \\ &\quad - \sin^2(\beta) \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \cos^2(\beta) - 2(EF)(FD) \\ &= \sin^2(\beta)(1 - \cos^2(\alpha)) + \cos^2(\beta)(1 - \sin^2(\alpha)) \\ &\quad - 2(EF)(FD) \\ &= (\sin(\beta) \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cos(\beta))^2 \\ &= (\cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\beta) \sin(\alpha))^2. \end{aligned} \quad (29)$$

De (29) obtenemos  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\beta) \sin(\alpha)$ . La fórmula,  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha)$  se deriva de forma análoga, usando que  $\sin^2(\alpha + \beta) = 1 - \cos^2(\alpha + \beta)$ .

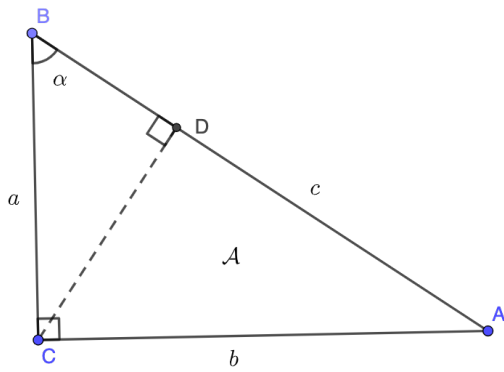


Figura 11: Teorema de Pitágoras

Para demostrar el recíproco, consideramos el triángulo rectángulo  $ABC$ , Figura 11. Si trazamos la altura desde el vértice  $C$  y llamamos  $D$  al punto de intersección de  $AB$  con dicha altura, obtenemos los triángulos  $BCD$  y  $ACD$ . Nótese que los triángulo  $BCD$  y  $ABC$  son semejantes, ya que comparten el ángulo  $\alpha$  y ambos tienen un ángulo recto. Análogamente, el triángulo  $ABC$  es semejante al triángulo  $ACD$ , por compartir un ángulo de medida  $90^\circ - \alpha$  y uno recto. Luego, si  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$  denotan las áreas de los triángulos  $ABC$ ,  $BCD$  y  $ACD$  respectivamente, se obtiene:

$$\mathcal{A} = \frac{c^2}{4} \operatorname{sen}(2\alpha), \quad \mathcal{A}_1 = \frac{a^2}{4} \operatorname{sen}(2\alpha) \quad \text{y} \quad \mathcal{A}_2 = \frac{b^2}{4} \operatorname{sen}(2\alpha), \quad (30)$$

que son consecuencia de la fórmula de adición para el seno. Ahora, de la propiedad aditiva del área obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2, \\ \frac{c^2}{4} \operatorname{sen}(2\alpha) &= \frac{a^2}{4} \operatorname{sen}(2\alpha) + \frac{b^2}{4} \operatorname{sen}(2\alpha), \\ c^2 &= a^2 + b^2, \end{aligned} \quad (31)$$

que es la Ecuación de Pitágoras. □

#### 4. Conclusiones

En este trabajo se empleó GeoGebra como herramienta principal para explorar propiedades geométricas del triángulo pedal asociado a un punto  $P$  respecto a un triángulo  $ABC$ , con énfasis en su relación con la recta de Wallace-Simson. Un elemento a destacar es el rol que puede jugar un sistema de geometría dinámica como GeoGebra, para explorar elementos del

pensamiento matemático (identificar y representar la información, resolver casos particulares, identificar regularidades y formular conjeturas). Parte del trabajo giró en torno a fundamentar propiedades del triángulo pedal. En este contexto se tiene la siguiente construcción: Dado un triángulo  $A_0B_0C_0$  y un punto  $P$  en el plano de éste, se construye el triángulo pedal respecto de  $P$ , denotándolo por  $A_1B_1C_1$ ; de manera recursiva se construye el  $n$ -ésimo triángulo pedal respecto de  $P$ , denotándolo por  $A_nB_nC_n$ . Dada esta construcción surgen preguntas tales como: ¿Qué propiedades tiene esta sucesión de triángulos? ¿Es periódica o estacionaria? En Alexander (1993) se han expuesto algunos resultados concernientes a las preguntas planteadas, sin embargo en trabajos a futuro planeamos examinar cuidadosamente la segunda pregunta.

#### Agradecimientos

El segundo autor de este trabajo agradece que esta investigación haya sido subvencionada por el Proyecto de Investigación de referencia PID2022-139007NBI00 aprobado por el MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ FEDER, UE.

#### Referencias

Alexander, J. A. (1993). The symbolic dynamics of the sequence of pedal triangles. *Mathematics Magazine*, *MAA*, 66(3):147–158.

AlphaProof, T. y AlphaGeometry, T. (2024). Ai achieves silver-medal standard solving international 178 mathematical olympiad problems. *DeepMind blog*, 179:45.

Coxeter, H. (1967). *Geometry revisited*. The Mathematical Association of America.

Euclid (1956). *The Thirteen Books of the Elements*. Dover Publications Inc New York.

Feuerbach, K. W. (1822). *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks...* Riegel & Wießner, Nürnberg.

Hardy, G. H. (2005). A mathematician’s apology. *First Electronic Edition, Version, 1*.

Johnson, R. A. (1916). A circle theorem. *American Mathematical Monthly*, 23(4):161–162.

Johnson, R. A. (2013). *Advanced euclidean geometry*. Courier Corporation.

Loomis, E. S. (1968). *The Pythagorean Proposition, Classics in Mathematics Education Series*. ERIC.

Miquel, A. (1838). Théorèmes de géométrie. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 3:485–487.

Morley, F. (1899). On the intersections of the trisectors of the angles of a triangle. *Journal of Mathematics*, 25:185–191.

Ostermann, A. (2012). *Geometry by Its History*. Springer.

Padovani, F. (2009). *Collected works of charles françois sturm*. Springer Science & Business Media.

Santos-Trigo, M., Barrera-Mora, F., y Camacho-Machín, M. (2021). Teachers’ use of technology affordances to contextualize and dynamically enrich and extend mathematical problem-solving strategies. *Mathematics*, 9(793):21.

Steiner, J. (1826). Einige geometrische sätze.