

Dispersión Clásica de Schwarzschild: Un Cambio de Variable Alternativo Classical Schwarzschild scattering: an alternative change of variable

Esmeralda Ortiz ^a, Isaac Fernández ^{a,*}, Omar Pedraza ^a, L. A. López ^a

^a Área Académica de Matemáticas y Física, Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5, Col. Carboneras, C.P. 42184, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México.

Resumen

En este trabajo se analiza la sección transversal de dispersión clásica del agujero negro de Schwarzschild mediante una solución numérica que no hace uso del cambio de variable tradicional. Se introduce el nuevo cambio de variable con el objetivo de evitar singularidades y optimizar el uso de recursos computacionales. La implementación, desarrollada en Python, emplea el método de cuadratura de Gauss junto con interpolación polinómica. Los resultados obtenidos demuestran que el cambio propuesto mejora significativamente la precisión y la eficiencia del cálculo, reduciendo los requerimientos computacionales en comparación con el enfoque convencional.

Palabras Clave: Agujero negro, Dispersión, Python, Métodos numéricos.

Abstract

This work analyzes the classical scattering cross section of the Schwarzschild black hole through a numerical approach that does not rely on the traditional change of variable. A new transformation is introduced with the aim of avoiding singularities and optimizing the use of computational resources. The implementation, developed in Python, employs the Gauss quadrature method in conjunction with polynomial interpolation. The results demonstrate that the proposed change significantly improves both the accuracy and efficiency of the computation, while reducing the computational requirements compared to the conventional approach.

Keywords: Black hole, Scattering, Python, Numerical methods.

1. Introducción

A principios del Siglo XX con el nacimiento de la Relatividad General, el ser humano descubrió la existencia de uno de los objetos más interesantes de los que se tenía registro hasta la fecha, los **Agujeros Negros**. El primer aporte que se hizo sobre este tema, fue realizado por Karl Schwarzschild en su artículo titulado “*Sobre el campo gravitacional de un punto de masa según la teoría de Einstein*” (Schwarzschild (1916)), en el cual describe una solución de las ecuaciones de campo de Einstein alrededor de una masa con simetría esférica sin rotación.

Por otra parte, la importancia del estudio de los agujeros negros, ha jugado un papel fundamental en la caracterización de señales de ondas gravitacionales como las detectadas por LIGO y VIRGO (Abbott et al. (2016)). También colaboraciones internacionales como Telescopio del Horizonte de Eventos (Akiyama et al. (2022)) han logrado obtener la primera imagen de un

agujero negro en 2022.

Para obtener propiedades físicas de los agujeros negros, es posible analizar los campos de prueba que los rodean. Por ejemplo, un aspecto importante es el estudio de las trayectorias geodésicas alrededor de los agujeros negros como en (Pedraza et al. (2021)) y ((Cerón-Ángeles et al., 2025)). También se han estudiado la absorción y dispersión de materia y campos, dichos trabajos han aportado importantes aspectos sobre la fenomenología de los agujeros negros, dado que se han estudiado en diversas configuraciones como por ejemplo agujeros negros rodeados de quintaesencia estudiados por (López-Suárez et al. (2025)) y Ramírez et al. (2022).

El estudio de la dispersión en el contexto de los agujeros negros constituye un área de interés relevante dentro de la física teórica y computacional, dado que para obtener la sección diferencial de dispersión de ondas parciales es aplicado el método Runge-Kutta de cuarto a quinto orden o en el caso de la sección

* Autor para correspondencia: fe445676@uaeh.edu.mx

Correo electrónico: or366610@uaeh.edu.mx (Esmeralda Ortiz Márquez), fe445676@uaeh.edu.mx (Isaac-Roberto Fernández Sánchez), omarp@uaeh.edu.mx (Omar Pedraza Ortega), lalopez@uaeh.edu.mx (Luis Alberto López Suárez).

Historial del manuscrito: recibido el 09/06/2025, última versión-revisada recibida el 02/09/2025, aceptado el 03/09/2025, en línea (postprint) desde el 19/09/2025, publicado el 05/01/2026. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v13i26.15289>



diferencial clásica de dispersión se aplica integración numérica en muchos casos.

Como se sabe para un problema de dispersión clásica, las ecuaciones resultantes son susceptibles a indeterminaciones matemáticas en los puntos de retorno, para lo cual resulta conveniente aplicar cambios de variable adecuados para su solución, para así evitar esas singularidades puramente matemáticas y facilitar su solución numérica. Tradicionalmente en la literatura se usa el cambio de variable de $u = \frac{1}{r}$ que facilita el manejo de la integral a calcular para el ángulo de dispersión.

El cambio de variable estándar no es el único que se puede implementar, es posible proponer otros como por ejemplo el propuesto por Gezerlis (2023) para el caso de dispersión clásica con el potencial de Yukawa. De manera análoga, en relatividad general los cambios de coordenadas de Kruskal–Szekeres y de Eddington–Finkelstein eliminan las singularidades de coordenadas presentes en la métrica de Schwarzschild, lo cual, desde el punto de vista de los métodos numéricos, facilita el tratamiento computacional de soluciones cerca del horizonte.

Por lo anteriormente mencionado se propone hacer uso del cambio de variable $v = \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}$, donde r_0 es un punto de retorno, para la resolución numérica del problema de dispersión clásica de un agujero negro de Schwarzschild y contrastar los resultados obtenidos con el cambio de variable usual, además de discutir la conveniencia del uso de cada cambio de variable.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: En la sección 2 se presenta un breve resumen que permite obtener la sección de dispersión clásica. En la sección 3 se introduce y analiza el cambio de variable estándar $u = 1/r$. Posteriormente, en la sección 4, se propone un nuevo cambio de variable v . La sección 5 describe la metodología utilizada para implementar ambos cambios de variable y obtener la sección de dispersión correspondiente. Los resultados se muestran en la sección 6. Finalmente, se presentan las conclusiones generales.

2. Dispersión clásica

Un método ampliamente utilizado para el análisis de la sección transversal de dispersión es la aproximación clásica. En este marco, se considera que, en el régimen de altas frecuencias la propagación de la onda incidente concuerda con las geodésicas nulas del espacio-tiempo, conforme al tratamiento presentado por Collins et al. (1973). También, el potencial efectivo generado por el agujero negro tendrá que cumplir forzosamente que en el infinito, los efectos gravitacionales que ejerce sean nulos, teniendo al menos un máximo de potencial.

Para geodésicas nulas, la densidad Lagrangiana que las describe está dada de la forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \dot{X}^\mu \dot{X}_\mu = 0. \quad (1)$$

Aquí la notación $\dot{X}$ representa una derivada con respecto a τ , donde τ representa un parámetro afín a la geodésica. Considerando también que se trata de un espacio-tiempo con simetría esférica y estacionario entonces su diferencial de línea tiene la siguiente forma:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi), \quad (2)$$

y al obtener los momentos generalizados se puede observar la existencia de constantes de movimiento. Al obtener el momento con respecto a t y con respecto a φ , resulta evidente que corresponden a la energía E y al momento angular L respectivamente.

$$P_t = f(r)\dot{t} = E. \quad (3)$$

$$P_\varphi = r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi} = L. \quad (4)$$

Considerando el movimiento en un plano con $\theta = \pi/2$ y escribiendo el lagrangiano (1) en términos de (3) y (4) se obtiene:

$$E^2 = \dot{r}^2 + V_{eff}(r), \quad (5)$$

donde $V_{eff}(r)$ se define como el potencial efectivo:

$$V_{eff}(r) = \left(\frac{L^2}{r^2}\right)f(r). \quad (6)$$

Por lo que si se considera una relación angular con r , (5) adopta la forma

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}f(r), \quad (7)$$

donde el parámetro de impacto está definido como $b = \frac{L}{E}$. Si se asume que la interacción entre la geodésica y el agujero negro va disminuyendo con la distancia, entonces el movimiento se acerca asintóticamente a una línea recta, donde el ángulo entre la dirección inicial y final de movimiento se describe por (8).

$$\Theta(b) = 2\varphi(b) - \pi. \quad (8)$$

Aquí φ es el ángulo que forma la dirección de la asíntota incidente con la dirección del periápside, como se observa en la Figura 1.

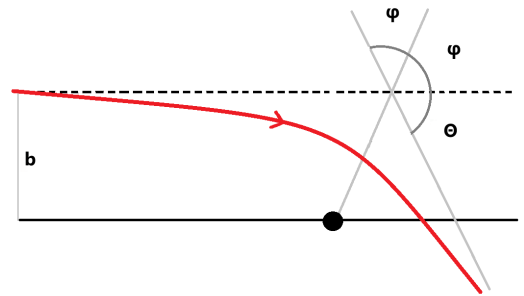


Figura 1: Dispersión de un potencial atractor

Dada las relaciones anteriores, es posible obtener la sección diferencial de dispersión $\sigma(\Theta)$, que mide tanto se ha desviado el haz original respecto a un ángulo sólido ($d\Omega$) por unidad de tiempo por unidad de intensidad y está definido por (9) donde b es el parámetro de impacto (ver Goldstein (1994)).

$$\sigma(\Theta) = \sum_i \frac{b_i}{\sin\Theta} \left| \frac{db}{d\Theta} \right|_i \quad (9)$$

La sumatoria en (9) considera el caso en el que la geodésica nula rota varias veces alrededor del agujero negro antes de dispersarse.

3. Cambio de Variable $u = \frac{1}{r}$

Para poder calcular la sección diferencial de dispersión (9), es necesario obtener una relación entre Θ y b como se muestra en (8). Usualmente, una forma de obtenerla es realizando el cambio de variable $u = \frac{1}{r}$ como es mostrado por Macedo et al. (2015). Aplicando este cambio de variable en (7), se tiene

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - u^2 f(u). \quad (10)$$

Se busca encontrar el ángulo de dispersión, por lo que integrando respecto a u en (10), se tiene:

$$\varphi = \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{1/b^2 - u^2 f(u)}}, \quad (11)$$

donde u_0 y 0 representan las condiciones de frontera, las cuales se establecen a partir de observar el movimiento de la geodésica. Ya que, como se sabe, esta viaja desde el infinito y llega hasta una cierta distancia que garantiza dispersión al interactuar con el agujero negro; si ambas condiciones de frontera se aplican considerando el cambio de variable, resultan en los límites de integración de (11).

Para encontrar el rango de valores adecuado de u_0 hay que buscar el valor máximo de u . Dado que en su punto máximo el potencial efectivo garantiza órbitas circulares inestables (ver Figura 2), implica que en ese punto $u = u_c$, teniendo así que $u_0 \in (0, u_c]$. Entonces, para la obtención de u_c se minimiza (10) por lo que tomando la segunda derivada e igualando a cero se obtiene

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = -\frac{u^2}{2} \frac{df(1/u)}{du} - u f(1/u) = 0. \quad (12)$$

Por medio de (12) se puede obtener una $u = u_c$, la cual al ser considerada en (11) se obtiene el valor del parámetro de impacto crítico (b_c).

Ahora bien, fijando $u = u_0$ en (10) es posible obtener una relación entre u_0 y b_0 de la siguiente forma:

$$\varphi = \int_0^{u_0(b)} \frac{du}{\sqrt{u_0(b)^2 f(u_0(b)) - u^2 f(u)}}. \quad (13)$$

Analizando (13) es notorio que el cambio de variable, si bien ayuda en algunos aspectos como una convergencia más temprana, arrastra una singularidad cuando u tiende a u_0 .

4. Cambio de variable $v = \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}$

Cuando se desea calcular una integral definida de forma numérica, una de las complicaciones que pueden presentarse es que el integrando tenga una singularidad en uno o en ambos límites de integración (como en la integral dada en (13)). En tales casos, para poder calcular la integral es necesario emplear un cambio de variable adecuado que elimine la o las singularidades presentes, el cual, por supuesto, depende fuertemente de la estructura del integrando. Particularmente, en Gezerlis (2023) se estudian varios ejemplos de este tipo de integrales y se proponen distintos cambios de variable para su tratamiento. Específicamente, en problemas de dispersión se sugiere la introducción del cambio de variable v .

El cambio de variable propuesto para solucionar el problema de dispersión es $v = \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}$, esta versión de cambio de variable simplifica la integral pues se usan límites de integración fijos y también evita indeterminaciones cuando r toma valores cercanos a r_0 , facilitando así la resolución numérica del problema. El punto de retorno (ver Figura 2) que se presenta en este cambio de variable toma sus valores en el rango de $r_0 \in [r_c, \infty)$.

Al aplicar el cambio de variable v sobre (7), nuevamente se obtiene φ , en este caso debido a la forma de la variable.

$$\varphi = \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{\frac{r_0^2}{4b^2 v^2} - \frac{(1-v^2)^2}{4v^2} f(v)}}, \quad (14)$$

esta integral (14) se puede simplificar más al escribir el parámetro de impacto en términos del punto de retorno r_0 , obteniendo

$$\varphi = \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{\frac{f(r_0)}{4v^2} - \frac{(1-v^2)^2}{4v^2} f(v)}}. \quad (15)$$

Nótese que en este caso no es necesario minimizar ninguna expresión, ya que el propio cambio de variable exige que se sepa desde el principio el valor de r_0 , por lo que es necesario tomar un camino alternativo para obtener dicho valor. El camino más adecuado es partiendo del potencial efectivo (6), que debe de cumplir la condición $V_{eff}(r_0) = E^2$ para un valor de b dado.

Para este trabajo se considera la solución de un agujero negro de Schwarzschild, con elemento de línea dado por (2) donde la función $f(r)$ es:

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (16)$$

donde M es la masa del agujero negro.

Remplazando $f(r)$ en (6) se puede obtener el comportamiento del potencial efectivo. En la Figura (2), se observa los valores que puede tomar r según su nivel energía. El máximo de potencial es aquel que representa a las órbitas circulares inestables con radio r_c , a todas las demás r 's después de este punto se les denomina los puntos de retorno r_0 .

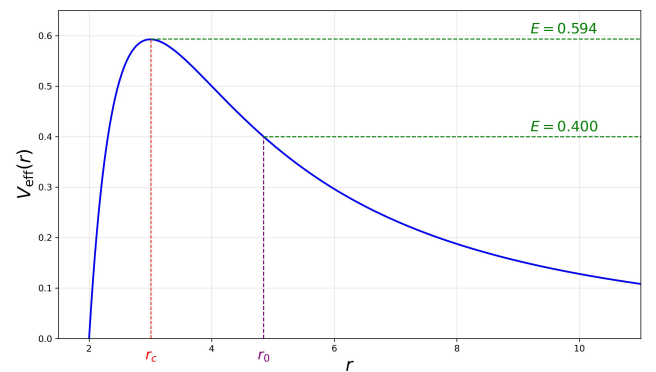


Figura 2: Potencial efectivo para Schwarzschild, con $M = 1$ y $L = 4$

Para la solución de Schwarzschild es posible obtener que $u_c = 1/3M$ y $b_c = 3\sqrt{3}M$, pero no es así para soluciones más complejas.

5. Metodología

Debido a la posible dificultad que puede implica obtener una solución analítica para las expresiones mencionadas previamente, la exploración de distintos métodos numéricos resulta necesaria, ya que permiten aproximaciones precisas.

En este trabajo, el problema central radica en la integración numérica, para la cual la cuadratura de Gauss - Legendre se presenta como una opción altamente viable, puesto que se basa en la aproximación del valor de la integral por medio de una suma ponderada de una función evaluada en puntos dentro del intervalo de integración y ha demostrado eficacia en investigaciones relacionadas a gravitación, ofreciendo resultados de alta precisión.

Si bien la solución numérica facilita la resolución de integrales complejas, no quita el hecho de tener que cuidar aspectos como la singularidad o convergencia, ya que, si la integral presenta una singularidad en algún punto del intervalo de integración o exhibe una tasa de convergencia lenta puede causar que el programa tenga salidas no numéricas en conjunto con advertencias tipo “RuntimeWarning” o errores tipo “ZeroDivisionError” entre muchos otros. Existen distintos tipos de singularidades como: singularidad en el límite superior, singularidad en el límite inferior, singularidad en algún punto del intervalo. De acuerdo a los diferentes tipos de singularidades expresadas, es necesario recurrir a un cambio de variable específico.

5.1. Cambio de Variable $u = \frac{1}{r}$

Para la solución numérica de la integral de (13) es necesario obtener una lista de los valores máximos de la variable u para así evaluar el límite superior u_0 de integración. Como ya se ha mencionado, se parte de (10), definiendo así la ecuación cúbica a resolver $2Mb^2u^3 + b^2u^2 - 1 = 0$, es necesario fijar a b en función de M con el valor inicial de $3\sqrt{3}M$ y se puede variar hasta un valor final de $10M$, para cada valor de b se resuelve la ecuación cúbica usando la función de Numpy: `np.roots`.

5.2. Cambio de Variable $v = \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}$

A diferencia del cambio de variable anterior donde es necesario obtener u_0 , para este caso es necesario hacer un análisis de los puntos de retorno r_0 desde (5) obteniendo $r^3 - b^2r + 2Mb^2 = 0$, en la que análogamente al caso anterior se definió a b en términos de M con los mismos valores iniciales y finales, y de igual forma se resolvió haciendo uso de `np.roots`.

5.3. Integración por Cuadratura de Gauss

Para la resolución de las integrales planteadas (13) y (15), se hace uso del método conocido como *Cuadratura de Gauss* ya que éste, a diferencia de otros, como el método del trapecio o el de Simpson, no requiere que los puntos de evaluación se distribuyan uniformemente ya que éste utiliza nodos optimizados y pesos asociados maximizando la exactitud del resultado.

En general el método permite una aproximación de alta precisión de integrales definidas, tal que;

$$\int_c^d f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i). \quad (17)$$

Lo que se consigue realizando un cambio de variable tal que el intervalo de integración sea $[-1,1]$ como se muestra en la segunda parte de (17), una vez llevado a este intervalo es necesario establecer los nodos, los cuales se calculan usando las raíces de los polinomios de Legendre de grado n ($P_n(x)$). El cambio de variable que logra llevar la integral al intervalo $[-1,1]$ está dado de la forma:

$$x = \frac{d-c}{2}\xi + \frac{d+c}{2}, \quad (18)$$

lo cual implica que

$$\int_c^d f(x)dx = \frac{d-c}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{d-c}{2}\xi + \frac{d+c}{2}\right)d\xi. \quad (19)$$

En este trabajo se utiliza la función `quad` que se encuentra en la librería `SciPy`, donde en dicha función es posible definir elementos como los límites de integración, los parámetros del integrando así como la función de peso entre otros. Dada la naturaleza del problema no fue necesaria la implementación de una función de peso para la ponderación del problema, así mismo se consideraron nodos igualmente espaciados determinados por el paso implementado.

5.4. Derivada

Para poder obtener la sección diferencial de dispersión (9), es necesario obtener a $\frac{db}{d\Theta}$, para ello se usa el método de ajuste polinómico.

Para el método, se realiza un ajuste polinómico ponderado de grado trece, a los datos de b y Θ obtenidos de la Integración por Cuadratura de Gauss (ya sea para u o v), el cual da un conjunto de datos (x_i, y_i) con errores asociados σ_i puede estimar los coeficientes a_k de un polinomio de grado $n-1$ minimizando la suma de los errores cuadráticos ponderados de la forma:

$$S(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i} \left[y_i - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_i^k \right]^2. \quad (20)$$

Minimizando respecto a cada parámetro a_k y forzando que el gradiente tome el valor de cero, es posible obtener un sistema de ecuaciones lineales como se muestra (21).

$$\sum_{j=0}^{n-1} A_{kj} a_j = b_k, \quad (21)$$

donde los elementos de A_{kj} , denominada como la matriz de diseño y b_k un vector independiente están dados

$$A_{kj} = 2 \sum_{i=1}^N \frac{x_i^{k+j}}{\sigma_i}, \quad b_k = 2 \sum_{i=1}^N \frac{y_i x_i^k}{\sigma_i}. \quad (22)$$

Este sistema se resuelve haciendo uso de la función de `numpy: linalg.solve(A, b)` la cual en esencia utiliza el método de factorización $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$, con $\mathbf{L}$ una matriz triangular inferior y $\mathbf{U}$ una matriz triangular superior, con las cuales simplifica el problema solucionando en su lugar:

- $\mathbf{Lc} = \mathbf{b}$ por sustitución hacia adelante.
- $\mathbf{Ua} = \mathbf{c}$ por sustitución hacia atrás.

Finalmente se aplica una derivación parcialmente simbólica utilizando los coeficientes del polinomio ajustado usando reglas normales de derivación y evaluando en los mismos puntos.

También es posible hacer uso del método de diferencia central para obtener la derivada $\frac{db}{d\Theta}$, sin embargo no da el mejor resultado puesto que solo se evalúan las diferencias de los valores de Θ calculados, por lo que existe un rango donde este método no proporciona información, lo cual exige considerar un mayor número de puntos para su mejor aplicación.

5.5. Número de puntos tomados y tiempo de ejecución

Dado que en el cálculo se obtiene Θ para cada b y en consecuencia la sección diferencial, es importante tener en cuenta que el número de puntos elegido para la ejecución del cálculo repercute directamente en la forma de las soluciones obtenidas.

Con intención de obtener la sección de dispersión se ejecutó el programa *Schwarchild_u* con los pasos 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001. Al obtener un buen resultado para la variable u con el paso 0.0001 se probaron los mismos pasos para la variable v con el programa *Schwarchild_v* midiendo el tiempo total de ejecución del programa y la calidad de la curva de la sección diferencial de dispersión según se aumentaba o disminuía el número de puntos para comparar dichos resultados con los dos cambios de variable.

Una vez obtenida la comparación directa punto a punto se tomó como referencia la mejor gráfica producida por el programa *Schwarchild_u* para la automatización de todo el proceso para la variable v tomando un espectro de número de puntos mucho más grande con pasos: $0.n$, $0.0n$, $0.00n$ y $0.000n$ con $1 \leq n \leq 9$ (ver programa *Automatizacion*), con la intención de obtener aquel paso con el cual el proceso fuese optimizado comparando las gráficas, midiendo tanto el error relativo promedio como el tiempo total de ejecución y generando gráficas de error relativo alrededor de toda la curva.

6. Resultados

En las Figuras 3 y 4 se muestran las secciones de dispersión obtenidas mediante los cambios de variable u y v , respectivamente. Es posible denotar que un incremento en el número de pasos conduce a una representación más suave de la curva que representa la sección de dispersión, lo cual es particularmente más notorio en la región correspondiente a los ángulos $140^\circ < \Theta < 180^\circ$, donde las divergencias presentan un comportamiento más pronunciado a menor número de pasos. No fue hasta el paso de 0,0001 que se presenta en ambas variables una curva suave similar a las reportadas por otros autores, por ejemplo López and Pedraza (2023) o Macedo et al. (2015)

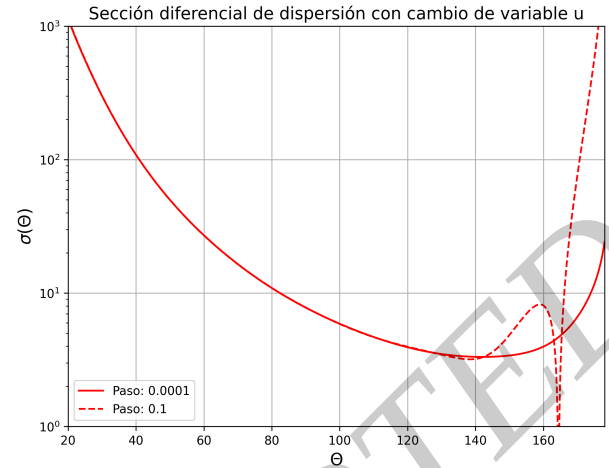


Figura 3: Sección diferencial de dispersión con un paso de 0.1 y 0.0001 para el cambio de variable u .

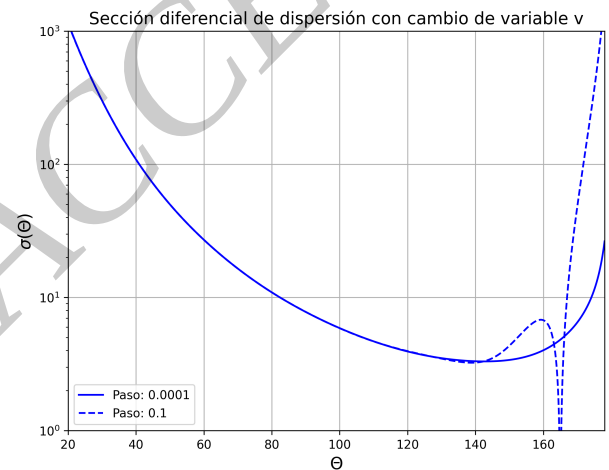


Figura 4: Sección diferencial de dispersión con un paso de 0.1 y 0.0001 para el cambio de variable v .

En la tabla 1 se muestra el tiempo de ejecución para ambas variables, con diferentes pasos. Es posible observar que en el caso de cambio de v el tiempo es menor. Por lo que se puede considerar que el cambio de variable v puede ser una adecuada elección para estudiar soluciones con mayor número de parámetros como carga, parámetro del estado de quintaesencia, de materia oscura, etc.

	variable u	variable v
Paso	Tiempo (s)	
0.1	1.4986	1.4267
0.01	1.8413	1.4354
0.001	6.7539	2.3165
0.0001	53.6730	11.0706

Tabla 1: Tiempos de ejecución para ambos cambios de variable. Obtenidos con un procesador Intel Core i5 13^a, 13500H, RAM 16 GB.

Finalmente, se realizó un análisis considerando diferentes valores del número de pasos n (véase Tabla 2) siendo $n = 4$ el

que muestra menor error. Utilizando la variable u como referencia, se calculó el error relativo promedio entre las secciones de dispersión obtenidas a partir de las variables u y v . Como se muestra en la Figura 5, el error relativo tiende a incrementarse por ángulos grandes, pero en términos generales, dicho error es menor al 0.5 %.

Paso	Error (%)	Tiempo(s)
0.004	0.16	0.8459
0.005	0.26	0.7724
0.0007	0.30	1.9254

Tabla 2: Mejores ejecuciones de la variable v con respecto a u . Obtenidos con un procesador Intel Core i5 13^a, 13500H, RAM 16 GB.

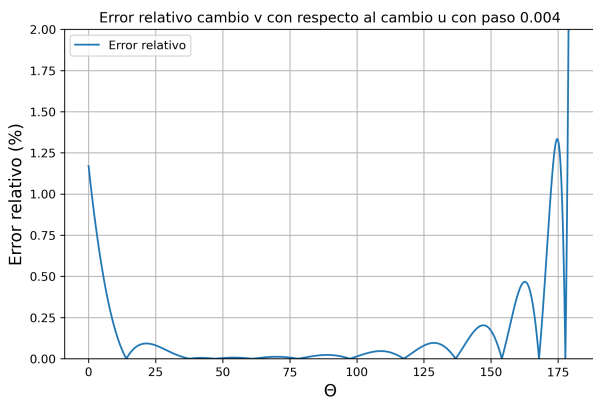


Figura 5: Gráfica de error relativo con $n = 4$.

7. Conclusiones

En esta contribución se ha obtenido la sección de dispersión clásica de un agujero negro de Schwarzschild mediante un enfoque numérico que incorpora un cambio de variable denotado por v , con el propósito de evaluar una alternativa al cambio de variable estándar u . La implementación se realizó en Python, utilizando el método de cuadratura de Gauss combinado con interpolación polinómica.

Los resultados muestran que el cambio de variable v , permite calcular la integral de Θ (8) (necesaria para determinar la sección de dispersión) de forma más eficiente que el cambio tradicional u . En particular, el cambio requiere una menor cantidad

de puntos de integración para alcanzar resultados adecuados, lo cual se traduce en una reducción significativa del costo computacional. Por lo anteriormente mencionado, se sugiere que el cambio de variable v constituye una alternativa robusta al enfoque convencional, manteniendo la precisión de los resultados y mejorando la eficiencia del cálculo numérico.

Así este enfoque podría extenderse a otros problemas de dispersión de diferentes escenarios de agujeros negros con un mayor número de parámetros, donde la optimización de recursos computacionales es de particular interés.

El repositorio de Github con todos los programas referenciados se encuentra en:

<https://github.com/Esmeom/Schwarzschild>

Referencias

- Abbott, B. P. et al. (2016). GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence. *Phys. Rev. Lett.*, 116(24):241103.
- Akiyama, K. et al. (2022). First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way. *Astrophys. J. Lett.*, 930(2):L12.
- Cerón-Ángeles, V. E., Pedraza-Ortega, O., Escorcía-Ramírez, R. G., and Téllez-Tovar, L. O. (2025). Geodésicas de un agujero negro de schwarzschild modificado. *Pádi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, 1(Especial):8–13.
- Collins, P. A., Delbourgo, R., and Williams, R. M. (1973). On the elastic schwarzschild scattering cross section. *Journal of Physics A: Mathematical, Nuclear and General*, 6(2):161–169.
- Gezerlis, A. (2023). *Numerical Methods in Physics with Python*. Cambridge University Press, 2nd edition.
- Goldstein, H. (1994). *Classical Mechanics*. Editorial Reverté, 2da edición edición.
- López, L. A. and Pedraza, O. (2023). Effects of quintessence on scattering and absorption sections of black holes. *Indian J. Phys.*, 97(1):285–294.
- López-Suárez, L. A., Téllez-Tovar, L. O., Cerón-Ángeles, V. E., and Pedraza-Ortega, O. (2025). Secciones de dispersión y absorción de hayward con quintaesencia. *Pádi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, 12(24):116–121.
- Macedo, C. F. B., de Oliveira, E. S., and Crispino, L. C. B. (2015). Scattering by regular black holes: Planar massless scalar waves impinging upon a Bardeen black hole. *Phys. Rev. D*, 92(2):024012.
- Pedraza, O., López, L. A., Arceo, R., and Cabrera-Munguía, I. (2021). Geodesics of Hayward black hole surrounded by quintessence. *Gen. Rel. Grav.*, 53(3):24.
- Ramírez, V., López, L. A., Pedraza, O., and Ceron, V. E. (2022). Scattering and absorption cross sections of Schwarzschild anti de Sitter black hole with quintessence. *Can. J. Phys.*, 100(2):112–118.
- Schwarzschild, K. (1916). Sobre el Campo Gravitacional de un Punto de Masa Segun la Teoria Einsteiniana. *Royal Prussian Academy of Sciences*.