

Consenso basado en distancia y ángulo de formación en un sistema multi-agente Distance and formation angle-based consensus in a multi-agent system

J.C. Hernández-Méndez ^a, R.D. Cruz-Morales ^b, E.A. Padilla-García ^c, M. Ramírez-Neria ^d, J. González-Sierra ^{a,*}

^aUPIIH Instituto Politécnico Nacional, Carretera Pachuca—Actopan Kilómetro 1+500, Distrito de Educación, Salud, Ciencia, Tecnología e Innovación, San Agustín Tlaxiaca 42162, México

^bDepartamento de Ingeniería, Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán (FESC), Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Cuautitlán Izcalli 54714, México

^cTecnológico Nacional de México / Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec (TESE), Av. Tecnológico, Valle de Anáhuac, Ecatepec 55210, Estado de México, México

^dInstitute of Applied Research and Technology, Universidad Iberoamericana Ciudad de México, 01219, Álvaro Obregón, Ciudad de México, Mexico.

Resumen

La transición de una industria 4.0 a una 5.0 requiere de sistemas que utilicen el Internet de las Cosas (IoT por sus siglas en inglés de Internet of Things) para compartir información por medio de la nube y de esta manera realizar el proceso requerido. En ese sentido, los sistemas ciber-físicos han permitido que agentes de robots móviles logren una formación aún y cuando estos agentes se encuentran en espacios físicos diferentes. Con base en lo anterior, este trabajo aborda, como prueba de concepto, el consenso basado en distancia y ángulo de formación en un grupo de robots móviles tipo omnidireccional los cuales se ven afectados por perturbaciones externas. Se considera que cada espacio de trabajo cuenta con dos robots móviles. Utilizando la teoría de grafos y la ley fundamental del consenso se demuestra, matemáticamente y por medio de simulaciones numéricas, que los pares de agentes convergen a la misma distancia y ángulo de formación, logrando un consenso.

Palabras Clave: Robot omnidireccional, Consenso, Sistemas ciber-físicos, Formación basada en distancia, Perturbaciones externas.

Abstract

The transition from Industry 4.0 to Industry 5.0 requires systems that utilize the Internet of Things (IoT) to share information through the cloud, thereby facilitating the required processes. In this sense, cyber-physical systems have allowed mobile robot agents to achieve formation even when these agents are located in different physical spaces. Based on the above, this work presents, as a proof of concept, a consensus-based approach utilizing distance and formation angle information in a group of omnidirectional mobile robots affected by external disturbances. Each workspace is considered to have two mobile robots. Using graph theory and the fundamental law of consensus, it is demonstrated, mathematically and through numerical simulations, that pairs of agents converge at the same distance and formation angle, thereby achieving consensus.

Keywords: Omnidirectional robot, Consensus, Cyber-physics systems, Distance-based formation, External disturbances

1. Introducción

El estudio de la coordinación en sistemas multi-agente de robots móviles es un problema que los investigadores han encontrado interesante debido, en primera instancia, a la amplia gama de aplicaciones, y segundo, pero no menos interesante, a la diversidad de retos matemáticos que se pueden encontrar (sincronización, retardos en el envío de la señal, sistemas homogéneos, sistemas heterogéneos, perturbaciones internas y ex-

ternas, evasión de colisiones, formación, marcha, entre otros).

Uno de los primeros problemas que se abordaron fue el del consenso. La idea es sencilla: un grupo de agentes debe comunicarse con sus vecinos, y, con base en el intercambio de información, lleguen a un acuerdo. En el área de robótica móvil, la idea de consenso se refiere a que los robots móviles compartan información y logren alcanzar un acuerdo, el cual consiste en llegar al mismo punto, ya sea en el plano o en el espacio. En

* Autor para correspondencia: jagonzalezsi@ipn.mx

Correo electrónico: jhernandezm2315@alumno.ipn.mx (Jael Cecilio Hernández-Méndez), rdcruz@comunidad.unam.mx (Raúl Dalí Cruz-Morales), erickaxelpadillagarcia@gmail.com (Erick Axel Padilla-García), mario.ramirez@ibero.mx (Mario Ramírez-Neria), jagonzalezsi@ipn.mx (Jaime González-Sierra)

Historial del manuscrito: recibido el 01/07/2025, última versión-revisada recibida el 05/09/2025, aceptado el 03/09/2025, publicado el 25/03/2026. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v14iEspecial.15371>



ese sentido, el trabajo de (Ren y Beard, 2008) fue pionero en establecer reglas necesarias y suficientes para que los agentes de vehículos autónomos logren el consenso.

Después, surgió la idea del control de formación, la cual consiste en que un grupo de agentes sigan una trayectoria predefinida manteniendo una configuración geométrica a través de distancia, ángulos o posiciones relativas. En ese sentido, el control de formación se clasifica en enfoques basados en desplazamientos (posiciones), en distancias y en direcciones relativas (Oh *et al.*, 2015). En el enfoque basado en desplazamientos, se necesita un sistema de coordenadas global que permita medir la posición de cada agente (Wang *et al.*, 2014). Por otra parte, los enfoques de distancia (Zou *et al.*, 2019; Roza *et al.*, 2019) y direcciones relativas (Truong Nguyen *et al.*, 2024; Li *et al.*, 2022) utilizan sensores a bordo, como cámaras o LiDARs para obtener información de sus vecinos.

Estas bases matemáticas sirvieron para que, empresas como Amazon, utilizaran sistemas multi-agente de robots móviles para tareas de logística, seguridad, manejo y transporte de materiales, entre otros (Riquelme, 2024; Wicaksono y Nilkhamhang, 2017; Farrugia y Fabri, 2018). Sin embargo, la transición de una industria 4.0 a una industria 5.0 requiere una sinergia entre el Internet de las Cosas, inteligencia artificial, ciencia de datos y robótica, y, de esta manera, los sistemas evolucionen de una estructura automatizada a una estructura automática (Manjunatha *et al.*, 2024). Un claro ejemplo de esta sinergia son los sistemas ciber-físicos, los cuales, a pesar de estar localizados en diferentes espacios de trabajo, existe una interacción que les permite comunicarse entre sí y realizar la tarea en cuestión (Escobar *et al.*, 2020).

Algunos trabajos que han considerado el uso de sistemas ciber-físicos se encuentran en (Lian *et al.*, 2021; Pikner *et al.*, 2021; Giron-Nieto *et al.*, 2025). Concretamente, en (Lian *et al.*, 2021), se utilizaron los sistemas ciber-físicos para mejorar la eficiencia computacional de la evasión de colisiones y la planificación de rutas en múltiples robots de almacén; en (Pikner *et al.*, 2021) implementaron un sistema de control ciber-físico para que un robot pudiera mover cajas en espacios reducidos; por último, en (Giron-Nieto *et al.*, 2025), se diseña un control de formación para dos grupos de robots localizados en dos espacios de trabajo diferentes y conectados por una red de comunicación.

Inspirados en el trabajo de (Giron-Nieto *et al.*, 2025), la contribución de este trabajo es la de diseñar una estrategia de control robusta que permita que pares de agentes (modelados por robots omnidireccionales de primer orden y sometidos a perturbaciones de patinado y deslizamiento), localizados en diferentes espacios de trabajo, logren, como una primera prueba de concepto, consenso basado en distancia y ángulo de formación. Desde nuestro punto de vista, este tipo de consenso no ha sido abordado en la literatura.

La estructura de este documento es la siguiente. La Sección 2 presenta los preliminares matemáticos necesarios para comprender el tema y se da la descripción del planteamiento del problema. En la Sección 3 se propone la estrategia de control junto con un observador que permite estimar las perturbaciones del sistema. Después, la Sección 4 ilustra, por medio de simulaciones numéricas, cómo un grupo de agentes logran el consenso basado en distancia y ángulo de formación. Finalmente,

la Sección 5 menciona las conclusiones del trabajo y plantea el trabajo a realizar en un futuro.

2. Planteamiento del problema

En la primera parte de esta sección se establecen los preliminares matemáticos que se utilizarán en el documento. Posteriormente, se dará una descripción del problema a resolver.

2.1. Preliminares matemáticos

Un gráfica (o grafo) $\mathcal{G} = \{N, E\}$ que describe la comunicación entre agentes consta de (Godsil y Royle, 2001; Ren y Beard, 2008):

1. Un conjunto de vértices o nodos N el cual corresponde al número de agentes presentes en el sistema.
2. Un conjunto de aristas $E = \{(M_j, M_i) \in N \times N, j \neq i\}$, de pares de nodos ordenados, los cuales indican el flujo de información.

En una gráfica dirigida, la arista (M_j, M_i) implica que el agente M_i recibe información de M_j . Por otra parte, en una gráfica no dirigida, la arista (M_j, M_i) implica que el agente M_i y M_j intercambian información. Además, un camino dirigido es una secuencia de aristas de la forma (i_1, i_2) , (i_2, i_3) , y así sucesivamente.

Dado un grafo de formación $\mathcal{G}$, la matriz Laplaciana asociada a $\mathcal{G}$ esta dada por (Godsil y Royle, 2001; Ren y Beard, 2008)

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \Delta - \mathcal{A}_d,$$

donde $\Delta = \text{diag}\{g_1, \dots, g_n\}$ es la matriz de grados con $g_i = \text{card}\{M_i\}$ y $\mathcal{A}_d$ es la matriz de adyacencia de $\mathcal{G}$ definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (M_j, M_i) \in E, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (1)$$

2.2. Descripción del problema

Sea $M_i = \{R_{a_i}, R_{b_i}\}$, para $i = 1, \dots, n$, un subconjunto compuesto por dos agentes que se mueven en un plano horizontal, con $a_i \neq b_i$, y sea $N = \{M_1, \dots, M_n\}$ el conjunto de todos los subconjuntos M_i . Considere que cada subconjunto de pares de agentes M_i se mueve en un área de trabajo $\mathcal{WS}_i$. Se asume que cada agente R_{b_i} es el líder de cada agente R_{a_i} . Además, cada agente se describe como un robot móvil omnidireccional cuyo modelo cinemático perturbado está dado por (Bárcenas-Presteguí *et al.*, 2025)

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_s &= \bar{R}_s(\theta_s, \delta, L) \mathbf{v}_s + \boldsymbol{\psi}_s(\theta_s, \delta, L, \gamma_s, \rho_s, \mathbf{v}_s, a_{i_s}), \\ s &= a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \end{aligned}$$

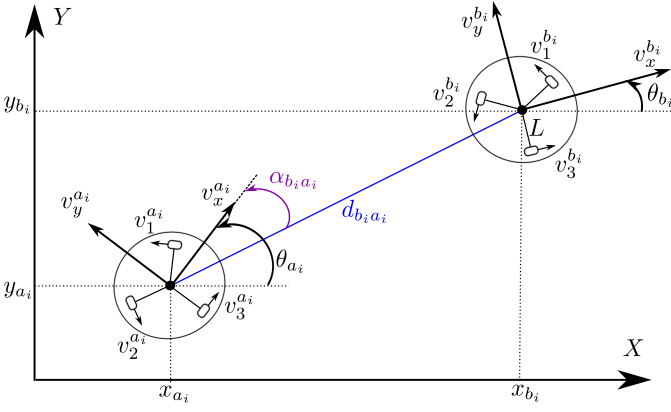


Figura 1: Diagrama del esquema basado en distancia y ángulo de formación entre agentes.

donde $\xi_s = [x_s \ y_s \ \theta_s]^T \in \mathbb{R}^3$ es el vector de estado con $\mathbf{z}_s = [x_s \ y_s]^T \in \mathbb{R}^2$ como la posición en el plano de cada agente, $\theta_s \in \mathbb{R}$ es la orientación del robot con respecto al eje horizontal X , $\mathbf{v}_s = [v_1^s \ v_2^s \ v_3^s]^T \in \mathbb{R}^3$ es la entrada de control correspondiente a la velocidad lineal de las ruedas (existe una matriz que transforma las velocidades de las ruedas a velocidades del cuerpo v_x^s , v_y^s y w^s); $\psi_s = [\psi_x^s \ \psi_y^s \ \psi_\theta^s]^T \in \mathbb{R}^3$ es la perturbación dada por desplazamientos laterales y longitudinales y por el patinado de las ruedas. La matriz $\bar{R}_s$ y el vector ψ_s se definen como

$$\bar{R}_s = R_s^T(\theta_s) \hat{R}_s^{-1}(\delta, L),$$

$$\psi_s = -[\bar{R}_s a_s - \tilde{R}_s(\gamma_s, \rho_s, \theta_s) \hat{R}_s^{-1}(\delta, L)(I_3 - a_s)] \mathbf{v}_s,$$

con

$$R_s^T(\theta_s) = \begin{bmatrix} \cos \theta_s & -\sin \theta_s & 0 \\ \sin \theta_s & \cos \theta_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{R}_s = \begin{bmatrix} \sin \delta & -\cos \delta & -L \\ \sin \delta & \cos \delta & -L \\ -1 & 0 & -L \end{bmatrix},$$

donde $\delta = \frac{\pi}{6}$ y L es la longitud del eje de las ruedas (ver Figura 1). Además, la matriz $\tilde{R}_s$ está definida como

$$\tilde{R}_s(\gamma_s, \rho_s, \theta_s) = \begin{bmatrix} -\gamma_s \sin \theta_s & -\rho_s \cos \theta_s & 0 \\ \gamma_s \cos \theta_s & -\rho_s \sin \theta_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

con $\gamma_s = \tan \alpha_x^s$ y $\rho_s = \tan \alpha_y^s$ siendo los desplazamientos laterales y longitudinales del cuerpo, $c_s = \text{diag}\{c_1^s, c_2^s, c_3^s\}$ con $c_j^s \in [0, 1)$ ($j = 1, 2, 3$), es el coeficiente de patinado de las ruedas que depende de la superficie sobre la que se mueve el robot móvil e I_3 es la matriz de identidad 3×3 .

En el trabajo de (Paniagua Contro et al., 2019), se desarrolló un modelo cinemático de robots móviles diferenciales y omni-direccionales basado en distancia y ángulo de formación entre

agentes sin considerar perturbaciones. En ese sentido, a partir de la metodología propuesta en (Paniagua Contro et al., 2019), se obtuvo el siguiente modelo cinemático basado en distancia y ángulo de formación entre agentes sometido a perturbaciones de deslizamiento y patinado

$$\dot{\eta}_{b_i a_i} = A_{b_i a_i}(\eta_{b_i a_i}) \bar{R}_{a_i} \mathbf{v}_{a_i} + \psi_{b_i a_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

donde $\eta_{b_i a_i} = [d_{b_i a_i} \ \alpha_{b_i a_i} \ \theta_{a_i}]^T \in \mathbb{R}^3$ es el vector de estado, con $d_{b_i a_i}$ como la distancia entre R_{b_i} y R_{a_i} , $\alpha_{b_i a_i}$ es el ángulo de formación de R_{a_i} respecto a R_{b_i} , la matriz $A_{b_i a_i}$ está dada por

$$A_{b_i a_i} = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_{a_i} - \alpha_{b_i a_i}) & -\sin(\theta_{a_i} - \alpha_{b_i a_i}) & 0 \\ -\frac{\sin(\theta_{a_i} - \alpha_{b_i a_i})}{d_{b_i a_i}} & \frac{\cos(\theta_{a_i} - \alpha_{b_i a_i})}{d_{b_i a_i}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y la perturbación total está dada por

$$\psi_{b_i a_i} = A_{b_i a_i} \psi_{a_i} + B_{b_i a_i} \xi_{b_i},$$

con

$$B_{b_i a_i} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{a_i} - \alpha_{b_i a_i}) & \sin(\theta_{a_i} - \alpha_{b_i a_i}) & 0 \\ \frac{\sin(\theta_{a_i} - \alpha_{b_i a_i})}{d_{b_i a_i}} & -\frac{\cos(\theta_{a_i} - \alpha_{b_i a_i})}{d_{b_i a_i}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Comentario 1. Observe que el modelo dado en (2) es un modelo que incluye la interacción entre pares de agentes b_i, a_i . Por lo tanto, la perturbación $\psi_{b_i a_i}$ se refiere a la perturbación total entre los agentes R_{b_i} y R_{a_i} .

El problema de interés consiste en diseñar una estrategia de control robusta tal que

- La distancia entre cada par de agentes de cada subconjunto M_i alcanza consenso en distancia, es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_{b_1 a_1} = \dots = \lim_{t \rightarrow \infty} d_{b_n a_n}.$$

- El ángulo de formación entre cada par de agentes de cada subconjunto M_i alcanza consenso en ángulo de formación, es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_{b_1 a_1} = \dots = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_{b_n a_n}.$$

.

- El ángulo de orientación de cada agente seguidor alcanza consenso en ángulo de orientación, es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_{a_1} = \dots = \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_{a_n}.$$

Comentario 2. En este trabajo se considera que los agentes R_{b_i} se mueven libremente siguiendo trayectorias diferentes. Por supuesto, es posible diseñar leyes de control que permitan a estos agentes seguir trayectorias deseadas.

3. Estrategia de control

Considere el sistema (2) y defina la siguiente retroalimentación

$$\mathbf{v}_{a_i} = \bar{R}_{a_i}^{-1} A_{b_i a_i}^{-1} \bar{\mathbf{v}}_{a_i}. \quad (3)$$

Por lo tanto, sustituyendo (3) en (2), se obtiene el siguiente modelo simplificado

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_{b_i a_i} = \bar{\mathbf{v}}_{a_i} + \boldsymbol{\psi}_{b_i a_i}, \quad (4)$$

el cual es un sistema lineal perturbado.

Suposición 1. Los elementos del vector de perturbación $\boldsymbol{\psi}_{b_i a_i}$ son señales suaves y acotadas satisfaciendo lo siguiente: $\sup_t |\psi_{b_i a_i}^d| \leq \bar{k}_d$, $\sup_t |\psi_{b_i a_i}^\alpha| \leq \bar{k}_\alpha$, y $\sup_t |\psi_{b_i a_i}^\theta| \leq \bar{k}_\theta$ siendo $\bar{k}_d$, $\bar{k}_\alpha$ y $\bar{k}_\theta$ números reales positivos.

Suposición 2. La perturbación total $\boldsymbol{\psi}_{b_i a_i}$ puede modelarse como un elemento de una familia de polinomios de series de Taylor de grado fijo de orden $h - 1$, que satisface $\frac{d^h}{dt^h} \boldsymbol{\psi}_{b_i a_i} \approx 0$.

Con base en lo anterior, se propone un observador para el sistema (4), utilizando la metodología del GPIO (Sira-Ramírez et al., 2017), obteniendo el siguiente sistema, con $h = 3$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_{b_i a_i} = \bar{\mathbf{v}}_{a_i} + \hat{\boldsymbol{\psi}}_1^{b_i a_i} + \Lambda_{3_i}(\boldsymbol{\eta}_{b_i a_i} - \hat{\boldsymbol{\eta}}_{b_i a_i}), \quad (5a)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\psi}}}_1^{b_i a_i} = \hat{\boldsymbol{\psi}}_2^{b_i a_i} + \Lambda_{2_i}(\boldsymbol{\eta}_{b_i a_i} - \hat{\boldsymbol{\eta}}_{b_i a_i}), \quad (5b)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\psi}}}_2^{b_i a_i} = \hat{\boldsymbol{\psi}}_3^{b_i a_i} + \Lambda_{1_i}(\boldsymbol{\eta}_{b_i a_i} - \hat{\boldsymbol{\eta}}_{b_i a_i}), \quad (5c)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\psi}}}_3^{b_i a_i} = \Lambda_{0_i}(\boldsymbol{\eta}_{b_i a_i} - \hat{\boldsymbol{\eta}}_{b_i a_i}), \quad (5d)$$

donde $\Lambda_{0_i}, \Lambda_{1_i}, \Lambda_{2_i}$ y $\Lambda_{3_i} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ son matrices diagonales positivas y corresponden a las ganancias del observador. Definiendo el error de observación como $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{b_i a_i} = \boldsymbol{\eta}_{b_i a_i} - \hat{\boldsymbol{\eta}}_{b_i a_i}$, entonces, la dinámica del error $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{b_i a_i}$, se obtiene a partir de (4) y (5a)-(5d), obteniendo la siguiente ecuación diferencial de cuarto orden

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{b_i a_i}^{(4)} + \Lambda_{3_i} \ddot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}_{b_i a_i} + \Lambda_{2_i} \dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}_{b_i a_i} + \Lambda_{1_i} \dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}_{b_i a_i} + \Lambda_{0_i} \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{b_i a_i} = \frac{d^3}{dt^3} \boldsymbol{\psi}_{b_i a_i} \approx 0. \quad (6)$$

A partir de (6) se obtiene un polinomio de cuarto grado, dado por (Gao, 2003)

$$I_3 s^4 + \Lambda_{3_i} s^3 + \Lambda_{2_i} s^2 + \Lambda_{1_i} s + \Lambda_{0_i} = I_3 (s^2 + \zeta_d \omega_n s^2 + w_n^2)(s + p_d)^2, \quad (7)$$

donde ω_n es la frecuencia natural no amortiguada deseada, ζ_d es el factor de amortiguamiento deseado y p_d es un polo no dominante.

Los polos del sistema tienen que elegirse tal que su parte real se localice en el semi-plano izquierdo del plano complejo s y lo suficientemente alejados del eje imaginario. Esto genera que el error de estimación $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{b_i a_i}$, converja de manera asintótica a una vecindad arbitrariamente pequeña del origen, y, por lo tanto, $\hat{\boldsymbol{\psi}}_1^{b_i a_i} \rightarrow \boldsymbol{\psi}_{b_i a_i}$ y $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{b_i a_i} \rightarrow \boldsymbol{\eta}_{b_i a_i}$, (Sira-Ramírez et al., 2010).

El tratar de determinar una correcta sintonización de éstos parámetros sigue siendo un tema de debate entre los investigadores. Por ejemplo, se puede utilizar la metodología descrita en (Kim et al., 2003) donde, a partir de definir un parámetro, se obtienen las ganancias del observador.

En este trabajo se optó por establecer un factor de amortiguamiento deseado ζ_d y un tiempo de establecimiento deseado

t_{ss} , de tal manera que la frecuencia natural no amortiguada se puede calcular a partir de

$$\omega_n = \frac{4}{\zeta_d t_{ss}}.$$

Posteriormente, para el cálculo de p_d se utiliza la relación, $p_d > 10\zeta_d \omega_n$, de tal manera que p_d sea un polo no dominante.

Comentario 3. Es importante aclarar que en el sistema (5a)-(5d), se ha asumido que una función por partes se aproxima a la entrada de perturbación generalizada. Sin embargo, la complejidad de la perturbación podría implicar el uso de una aproximación de orden mayor tal y como se describe en la Suposición 2.

Una vez definido el observador, se propone un control basado en la técnica de rechazo activo de perturbaciones, la cual consiste en añadir a la estrategia de control la estimación de la perturbación para que en el lazo cerrado, se pueda cancelar. Además, utilizando la Ley fundamental del consenso (Ren y Beard, 2008), la estrategia de control se define como

$$\bar{\mathbf{v}}_{a_i} = -K \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} (\boldsymbol{\eta}_{b_i a_i} - \boldsymbol{\eta}_{b_\ell a_\ell}) - \hat{\boldsymbol{\psi}}_1^{b_i a_i}, \quad (8)$$

donde $K = \text{diag}\{k_d, k_\alpha, k_\theta\}$ es la ganancia del controlador con k_d, k_α y k_θ constantes positivas.

Proposición 1. Considere el sistema (4) en lazo cerrado con el observador (5a)-(5d) y la estrategia de control (8), entonces, se logra consenso en distancia, ángulo de formación y ángulo de orientación siempre y cuando el Laplaciano sea no simétrico.

Prueba 1. Sustituyendo el control (8) en (4), se obtiene el siguiente sistema

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = -(K \otimes I_3)(\mathcal{L} \otimes I_3)\boldsymbol{\eta} + \tilde{\boldsymbol{\psi}}_1, \quad (9)$$

donde $\otimes$ es el producto Kronecker, $\mathcal{L}$ es el Laplaciano asociado a la gráfica de comunicación,

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{b_1 a_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}_{b_n a_n} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_{b_1 a_1} - \hat{\boldsymbol{\psi}}_1^{b_1 a_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\psi}_{b_n a_n} - \hat{\boldsymbol{\psi}}_1^{b_n a_n} \end{bmatrix}.$$

La solución de (9) está dada por

$$\boldsymbol{\eta}(t) = (e^{-K\mathcal{L}(t-t_0)} \otimes I_3)\boldsymbol{\eta}(0) + \int_{t_0}^t (e^{-K\mathcal{L}(t-\tau)} \otimes I_3)\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1 d\tau. \quad (10)$$

Es evidente que si $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1 = 0$, a partir del Lema 2.6 de (Ren y Beard, 2008), si $\mathcal{L}$ es no simétrico, entonces

$$e^{-\mathcal{L}(t-t_0)} \rightarrow \mathbf{1}_n \mathbf{v}^\top \quad \text{conforme } t \rightarrow \infty,$$

donde

$$\mathbf{1}_n = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

y

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

es el vector propio por la izquierda con entradas no negativas de $\mathcal{L}$ asociado al valor propio $\lambda_n = 0$ y que satisface $\mathbf{1}_n^T \mathbf{v} = 1$. Por lo tanto, con base en el Teorema 2.8 de (Ren y Beard, 2008),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\eta}_{b_i a_i}(t) = \sum_{i=1}^n v_i \boldsymbol{\eta}_{b_i a_i}(0),$$

es decir, la distancia entre pares de agentes, el ángulo de formación y su orientación logrará un equilibrio en consenso cuyo valor dependerá del promedio de las condiciones iniciales de aquellos M_i que tengan un camino dirigido a los demás nodos. Además, como se menciona en (Ren y Beard, 2008), si los elementos de la matriz K son mayores a 1, entonces la convergencia de los estados es más rápida en comparación con la solución original.

Ahora, el análisis se considerará que el error de perturbación es diferente de cero, es decir, $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1 \neq 0$. Para este fin, en la solución de (10) sólo se tomará en cuenta las coordenadas $d_{b_i a_i}$ debido a que las otras coordenadas ($\alpha_{b_i a_i}$ y θ_{a_i}) presentan la misma estructura matemática. Por lo tanto, la ecuación (10) toma la siguiente forma

$$\mathbf{d}(t) = \left(e^{-\mathcal{L}(t-t_0)} \right) \mathbf{d}(0) + \int_{t_0}^t \left(e^{-\mathcal{L}(t-\tau)} \right) \tilde{\boldsymbol{\psi}}_1^d d\tau, \quad (11)$$

donde

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_{b_1 a_1} \\ \vdots \\ d_{b_n a_n} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\psi}}_1^d = \begin{bmatrix} \psi_{b_1 a_1}^d - \hat{\psi}_{1_d}^{b_1 a_1} \\ \vdots \\ \psi_{b_n a_n}^d - \hat{\psi}_{1_d}^{b_n a_n} \end{bmatrix}.$$

A partir de (Sira-Ramírez et al., 2010), se sabe que el error de estimación $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1^d$ converge asintóticamente a una vecindad cercana al origen, por lo tanto, se puede asumir que cada elemento del vector del error de estimación está acotado, es decir,

Tabla 1: Parámetros de de deslizamiento y patinado de los agentes R_{b_i} .

i	$c_1^{b_i}$	$c_2^{b_i}$	$c_3^{b_i}$	$\alpha_x^{b_i}$	$\alpha_y^{b_i}$
1	$0.1e^{-0.1t}$	$0.2e^{-0.2t}$	$0.3e^{-0.3t}$	$\frac{\pi}{64}e^{-0.1t}$	$\frac{\pi}{32}e^{-0.2t}$
2	$0.1e^{-0.12t}$	$0.2e^{-0.2t}$	$0.3e^{-0.32t}$	$\frac{\pi}{32}e^{-0.2t}$	$\frac{\pi}{64}e^{-0.1t}$
3	$0.2e^{-0.1t}$	$0.1e^{-0.15t}$	$0.1e^{-0.2t}$	$\frac{\pi}{50}e^{-0.1t}$	$\frac{\pi}{40}e^{-0.2t}$
4	$0.3e^{-0.12t}$	$0.2e^{-0.13t}$	$0.2e^{-0.11t}$	$\frac{\pi}{55}e^{-0.12t}$	$\frac{\pi}{42}e^{-0.15t}$
5	$0.4e^{-1.2t}$	$0.3e^{-1.3t}$	$0.1e^{-1.1t}$	$\frac{\pi}{58}e^{-1.2t}$	$\frac{\pi}{44}e^{-1.5t}$

Tabla 2: Parámetros de de deslizamiento y patinado de los agentes R_{a_i} .

i	$c_1^{a_i}$	$c_2^{a_i}$	$c_3^{a_i}$	$\alpha_x^{a_i}$	$\alpha_y^{a_i}$
1	$0.1e^{-0.1t}$	$0.2e^{-0.2t}$	$0.3e^{-0.3t}$	$\frac{\pi}{64}e^{-0.1t}$	$\frac{\pi}{32}e^{-0.2t}$
2	$0.2e^{-0.12t}$	$0.2e^{-0.1t}$	$0.1e^{-0.15t}$	$\frac{\pi}{32}e^{-0.2t}$	$\frac{\pi}{64}e^{-0.1t}$
3	$0.3e^{-0.1t}$	$0.1e^{-0.15t}$	$0.2e^{-0.12t}$	$\frac{\pi}{70}e^{-0.1t}$	$\frac{\pi}{45}e^{-0.2t}$
4	$0.4e^{-0.1t}$	$0.4e^{-0.11t}$	$0.1e^{-0.16t}$	$\frac{\pi}{65}e^{-2t}$	$\frac{\pi}{48}e^{-3t}$
5	$0.3e^{-t}$	$0.4e^{-1.1t}$	$0.5e^{-1.6t}$	$\frac{\pi}{22}e^{-2.2t}$	$\frac{\pi}{33}e^{-3.1t}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\psi_{b_i a_i}^d - \hat{\psi}_{1_d}^{b_i a_i}| \leq K_{\psi_d},$$

con K_{ψ_d} una ganancia positiva arbitrariamente pequeña. Por lo tanto, la solución de (11), en estado estable, está dada por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_{b_i a_i}(t) \leq \sum_{i=1}^n v_i d_{b_i a_i}(0) + K_{\psi_d}(t - t_0).$$

El término $t - t_0$ tiene un crecimiento lineal, sin embargo, la ganancia K_{ψ_d} se puede elegir lo más cercana al origen para mitigar estos efectos, y, por lo tanto, la distancia de cada par de agentes estará oscilando alrededor de un equilibrio en consenso, que dependerá de las condiciones iniciales de las distancias. El mismo resultado aplica para la coordenada $\alpha_{b_i a_i}$ y θ_{a_i} .

Comentario 4. Hay que destacar que en implementaciones reales, discretizaciones de alta frecuencia, retardos en la comunicación y perturbaciones abruptas, entre otros, pueden provocar errores numéricos. Por lo tanto, es importante considerar filtrado y ajuste heurístico de ganancias de tal manera que permitan absorber los efectos dinámicos de un ambiente real y mejorar el desempeño del sistema.

4. Simulaciones numéricas

Con el objetivo de demostrar el desempeño de la estrategia de control (8) se realizan dos simulaciones numéricas con 5 grupos de agentes, es decir, $N = \{M_1, \dots, M_5\}$. La longitud del eje de las ruedas está dado por $L = 0.1$ m mientras que los parámetros de las perturbaciones (las cuales cumplen con las Suposiciones 1 y 2) se presentan en la Tablas 1 y 2.

Las condiciones iniciales de distancia y ángulo de formación entre agentes así como la orientación de cada agente R_{a_i} se describen en la Tabla 3.

Tabla 3: Condiciones iniciales.

i	$d_{b_i a_i}(0)$ [m]	$\alpha_{b_i a_i}(0)$ [rad]	$\theta_{a_i}(0)$ [rad]
1	1	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
2	2	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$
3	1.5	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{5}$
4	1.3	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{3}$
5	1.8	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$

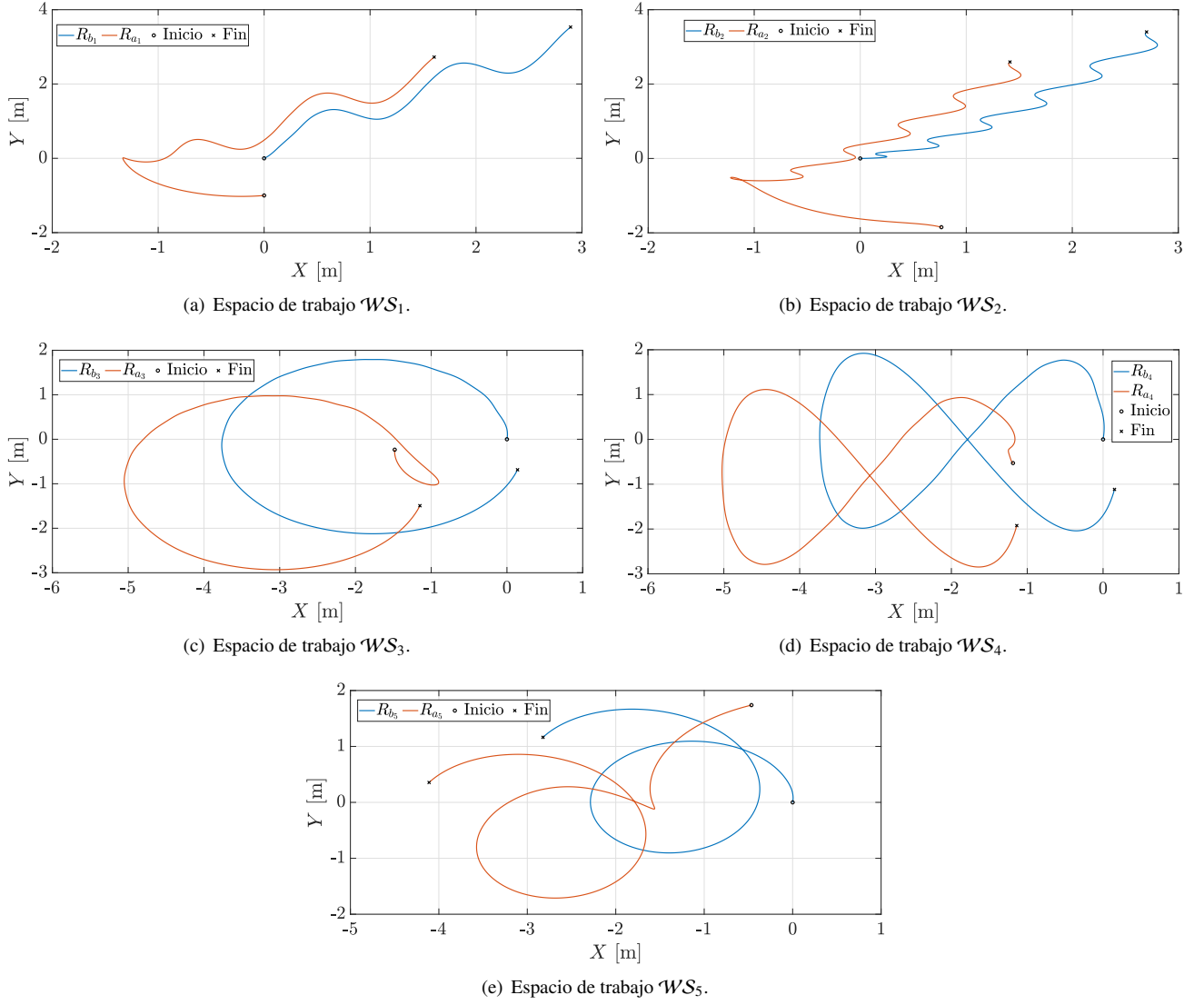


Figura 3: Trayectorias en el plano de cada par de agentes moviéndose en diferentes espacios de trabajo.

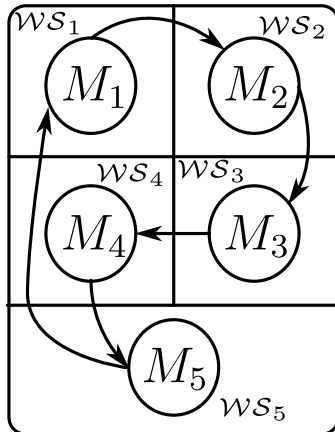


Figura 2: Comunicación con los diferentes espacios de trabajo.

4.1. Gráfica directa de perseguimiento cíclico

Las ganancias del controlador se eligieron como

$$K = \text{diag}\{1, 1, 1\}$$

y, para las ganancias del observador se eligió

$$\omega_n = 2\text{rad/s}, \quad \zeta_d = 0.99 \quad \text{y} \quad p_d = 40,$$

lo que produce

$$\Lambda_{0_i} = \text{diag}\{6400\}, \quad \Lambda_{1_i} = \text{diag}\{6656\},$$

$$\Lambda_{2_i} = \text{diag}\{1920.8\} \quad \text{y} \quad \Lambda_{3_i} = \text{diag}\{83.96\}.$$

Las condiciones iniciales del observador son:

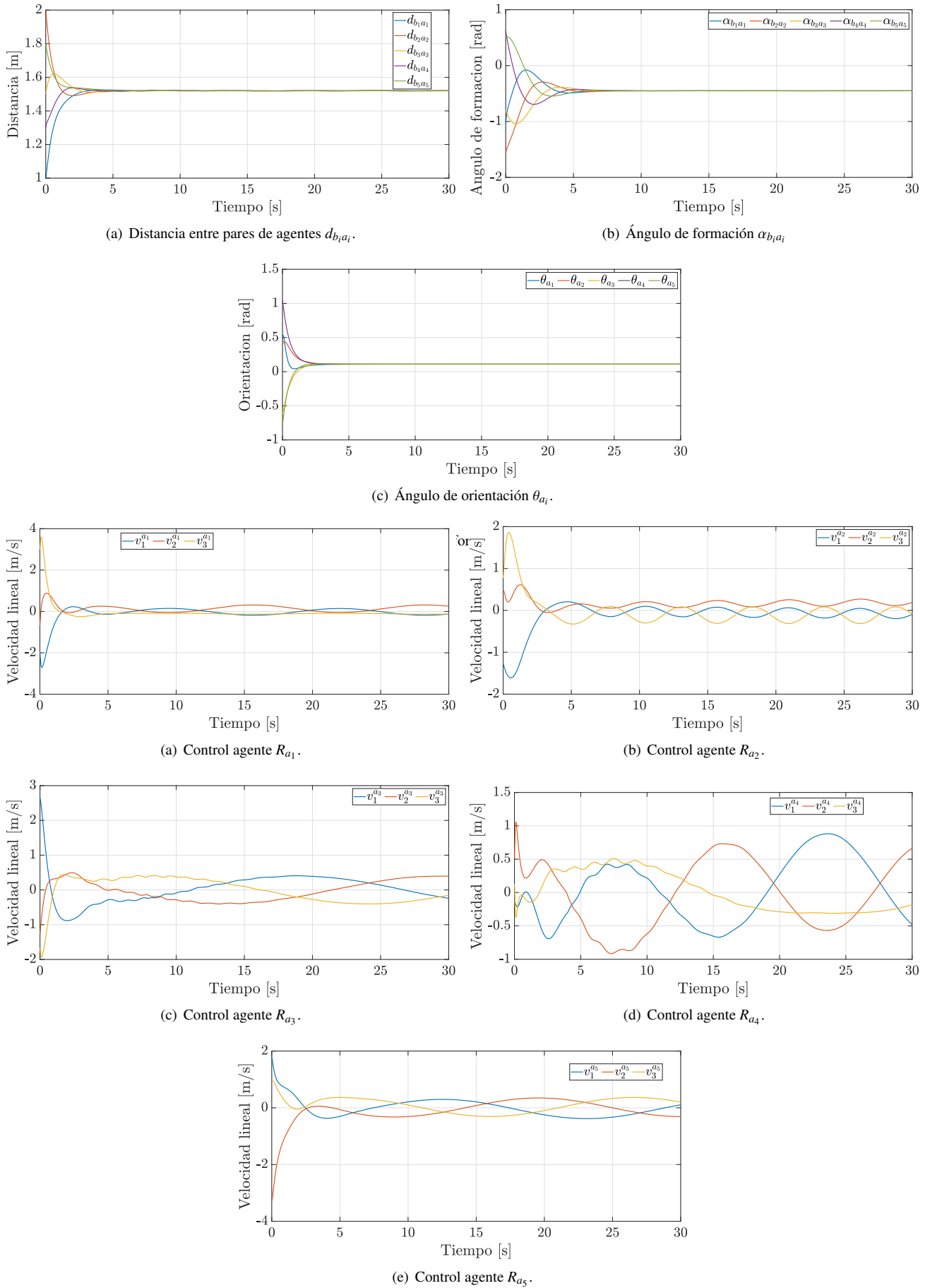
$$\hat{\eta}_{b_i a_i}(0) = \eta_{b_i a_i}(0),$$

$$\hat{\psi}_1^{b_i a_i}(0) = \hat{\psi}_2^{b_i a_i}(0) = \hat{\psi}_3^{b_i a_i}(0) = 0.$$

Finalmente, a cada agente R_{b_i} se le envían comandos diferentes de velocidad.

Las simulaciones se realizaron a través de Matlab-Simulink® R2023b con un tiempo de muestreo de 0.001 s. Cabe recordar que, en este trabajo, no se considera que los agentes R_{b_i} se controlen para seguir una trayectoria deseada.

Para la primer simulación numérica, se considera una gráfica directa de perseguimiento cíclico (ver Figura 2), es decir, M_1 recibe información de M_5 , M_2 de M_1 , M_3 de M_2 , M_4 de M_3 y M_5 de M_4 .

Figura 5: Entradas de control para los agentes R_{a_i} .

La matriz Laplaciana está dada por

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

la cual, evidentemente es una matriz no simétrica.

La Figura 3 muestra el comportamiento de los agentes en los diferentes espacios de trabajo $\mathcal{WS}_i$. Note que cada agente R_{b_i} sigue una trayectoria diferente.

A partir de la Figura 4(a) se nota que las distancias entre agentes logran un consenso. En este caso, existe un camino dirigido de cualquier nodo hacia los demás nodos, por lo que el consenso está dado por el promedio de la condición inicial de las distancias, la cual corresponde a una distancia de 1.52 m.

De manera similar, con base en la Figura 4(b) se aprecia que los agentes logran consenso en ángulo de formación de -0.45 rad y un consenso en ángulo de orientación de 0.109 rad en la Figura 4(c).

El tiempo promedio de convergencia para el consenso en distancia es de 2.516 s, para el consenso en ángulo de formación 7.45 s y para el ángulo de orientación fue de 8.638 s. Lo anterior se obtuvo a partir de un tiempo de llegada de transición dentro del 1 % del error.

Finalmente, las entradas de control, correspondientes a las velocidades lineales de las ruedas, se muestran en la Figura 5.

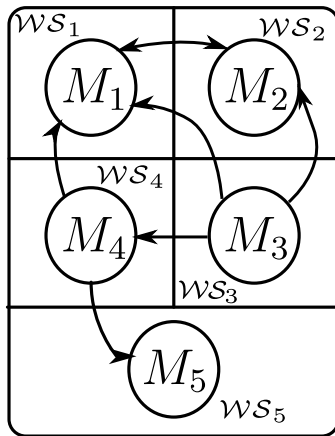


Figura 6: Gráfica mixta.

4.2. Gráfica mixta

Para la segunda simulación, se consideró la comunicación dada en la Figura 6 cuya matriz Laplaciana está dada por

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

la cual, también es no simétrica. Note que, el nodo M_3 no recibe información de ningún otro nodo; al contrario, existe un camino dirigido del nodo M_3 a los demás nodos. Además, se usaron los mismos parámetros, ganancias, condiciones iniciales y valores de las perturbaciones de la simulación anterior.

La Figura 7 ilustra el movimiento de cada par de agentes en su espacio de trabajo. Debido a que existe un camino dirigido de M_3 a los demás nodos, entonces los demás nodos convergerán a las condiciones iniciales de este nodo.

En ese sentido, a partir de analizar las Figuras 8(a), 8(b) y 8(c), se nota que los agentes llegan al mismo valor de distancia

$$d_{b_i a_i} = d_{b_3 a_3}(0) = 1.5 \text{ m},$$

al mismo valor del ángulo de formación

$$\alpha_{b_i a_i} = \alpha_{b_3 a_3}(0) = -\pi/4 \text{ rad}$$

y al mismo ángulo de orientación

$$\theta_{a_i} = \theta_{a_3}(0) = -\pi/5 \text{ rad},$$

logrando un consenso.

En este caso, el tiempo promedio de convergencia para el consenso en distancia es de 2.207 s, para el consenso en ángulo de formación 4.86 s y para el ángulo de orientación fue de 5.8 s.

Finalmente, la Figura 9 muestra las entradas de control requeridas para cada una de los agentes R_{a_i} para realizar su movimiento.

5. Conclusiones

Este trabajo se enfocó en diseñar una estrategia de control robusta para que pares de agentes (modelados por ecuaciones diferenciales de primer orden y sometidos a perturbaciones de patinado y deslizamiento), que se encuentran en diferentes espacios de trabajo, logren, como prueba de concepto, el consenso basado en distancia y ángulo de formación. Para este fin, se utilizaron las propiedades de la matriz Laplaciana y la teoría de grafos para demostrar que el consenso se logrará siempre y cuando la matriz Laplaciana sea no simétrica.

Como trabajo a futuro se considerará realizar la validación experimental en plataformas con robots móviles reales. Además, se analizarán los retardos en el tiempo en el envío de la señal de control, pérdidas de comunicación, así como la implementación del controlador y observador en hardware real, considerando las limitaciones de los actuadores y sensores. De igual manera, se estudiará la convergencia del consenso con otros tipos de gráficas de comunicación.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo del Instituto Politécnico Nacional a través del Proyecto SIP: 20253806, de la UNAM a través de los proyectos PAPIME PE104125, PAPIME PE107225 y CI 2446.

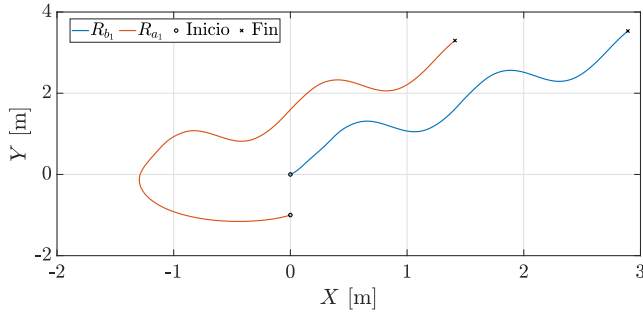
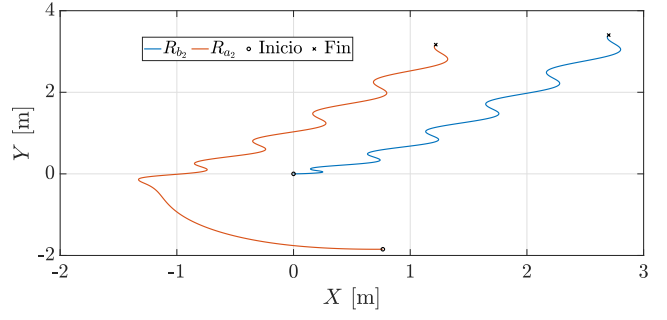
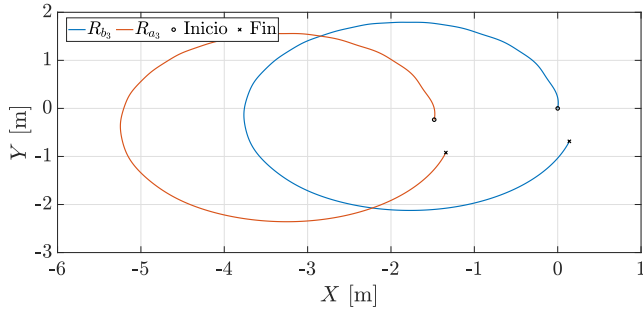
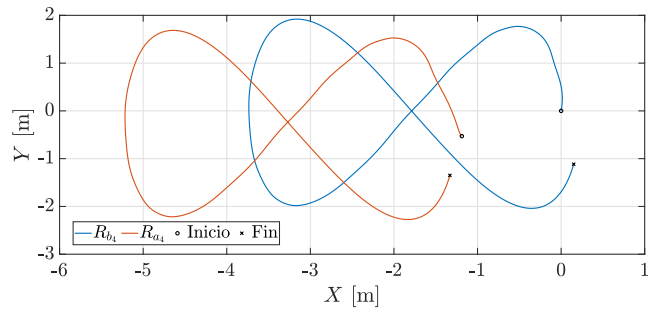
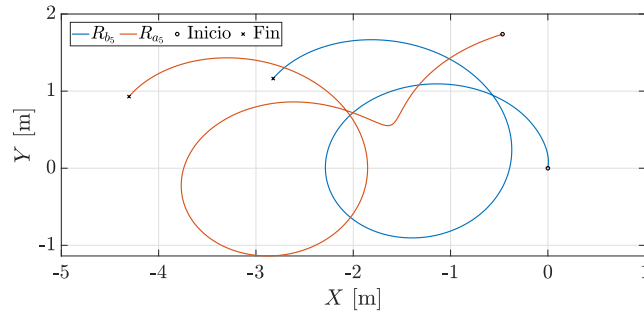
(a) Espacio de trabajo W_{S_1} .(b) Espacio de trabajo W_{S_2} .(c) Espacio de trabajo W_{S_3} .(d) Espacio de trabajo W_{S_4} .(e) Espacio de trabajo W_{S_5} .

Figura 7: Trayectorias en el plano de cada par de agentes moviéndose en diferentes espacios de trabajo.

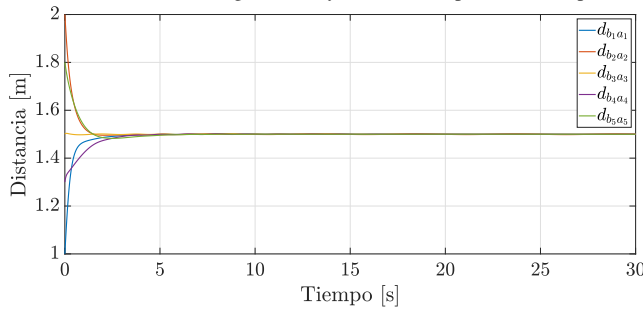
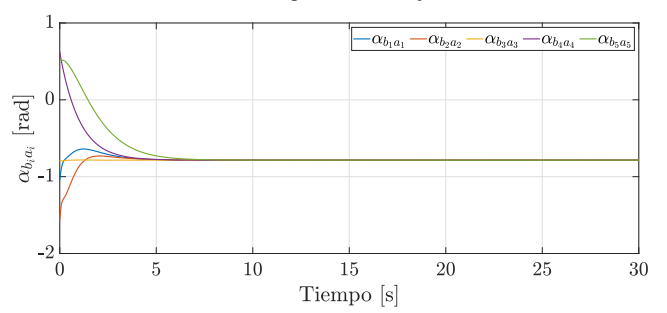
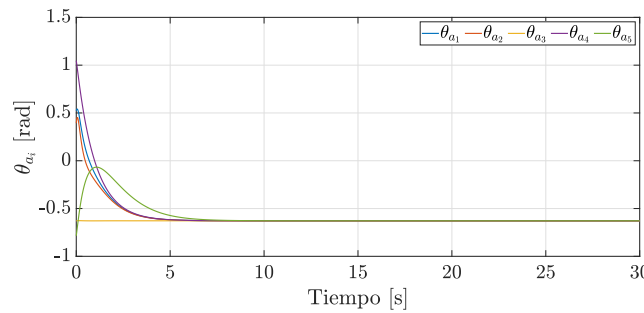
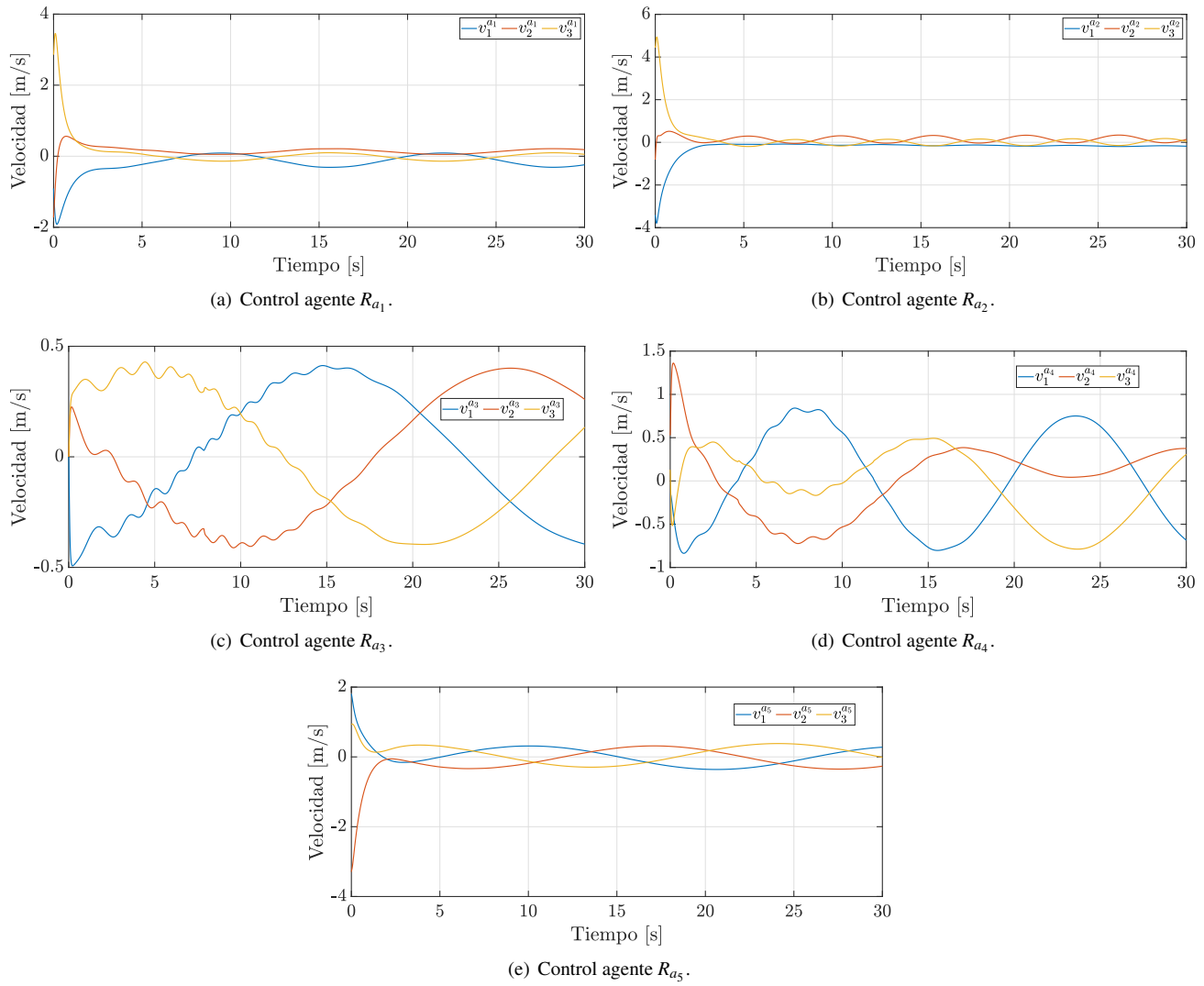
(a) Distancia entre pares de agentes $d_{b_i a_i}$.(b) Ángulo de formación $\alpha_{b_i a_i}$.(c) Ángulo de orientación θ_{a_i} .

Figura 8: Distancias, ángulos de formación y ángulos de orientación.

Figura 9: Entradas de control para los agentes R_{a_i} .

Referencias

- Bárceñas-Prestegui, c. B., Velasco-Villa, M., González-Sierra, J., y Aguilar-Pérez, J. I. (2025). Kinematic modeling and control of an omnidirectional mobile robot subject to wheel slippage and lateral and longitudinal sliding. *Control Theory and Technology*.
- Escobar, L., Moyano, C., Aguirre, G., Guerra, G., Allauca, L., y Loza, D. (2020). Multi-robot platform with features of cyber-physical systems for education applications. En *2020 IEEE ANDESCON*, pp. 1–6.
- Farrugia, J. L. y Fabri, S. G. (2018). Swarm robotics for object transportation. En *2018 UKACC 12th International Conference on Control (CONTROL)*, pp. 353–358.
- Gao, Z. (2003). Scaling and bandwidth-parameterization based controller tuning. *Proceedings of the American Control Conference*, 6:4989–4996.
- Giron-Nieto, H., Hernandez-Martinez, E. G., Fernandez-Anaya, G., Ferreira-Vazquez, E. D., Flores-Godoy, J.-J., Ramírez-Neria, M., y Molano-Jimenez, A. (2025). Cyber-physical multi-robot formation with a communication delays and a virtual agent approach. *Electronics*, 14(9).
- Godsil, C. y Royle, G. (2001). Algebraic graph theory. *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, New York, NY, USA, 207.
- Kim, Y., Keel, L., y Bhattacharyya, S. (2003). Transient response control via characteristic ratio assignment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(12):2238–2244.
- Li, Z., Tnunay, H., Zhao, S., Meng, W., Xie, S. Q., y Ding, Z. (2022). Bearing-only formation control with prespecified convergence time. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 52(1):620–629.
- Lian, Y., Xie, W., Yang, Q., Zhang, L., Lin, D., y Zhou, Y. (2021). A novel multi-warehouse mobile robot hierarchical scheduling strategy based on industrial cyber-physical system. En *2021 4th IEEE International Conference on Industrial Cyber-Physical Systems (ICPS)*, pp. 263–269.
- Manjunatha, Aswani, S., Lakhampal, S., Rao, B., Srivastava, A., y Smitha, K. (2024). Pioneering ai in uav-assisted 6g networks for the advancement of mobile robotics in industry 5.0. pp. 698–707.
- Oh, K.-K., Park, M.-C., y Ahn, H.-S. (2015). A survey of multi-agent formation control. *Automatica*, 53:424–440.
- Paniagua Contro, P., Hernandez-Martinez, E., González-Medina, O., González-Sierra, J., Flores-Godoy, J.-J., Ferreira, E., y Hernandez-Anaya, G. (2019). Extension of leader-follower behaviours for wheeled mobile robots in multi-robot coordination. *Mathematical Problems in Engineering*, 2019:1–16.
- Pikner, H., Sell, R., Karjust, K., Malayjerdi, E., y Velsker, T. (2021). Cyber-physical control system for autonomous logistic robot. En *2021 IEEE 19th International Power Electronics and Motion Control Conference (PEMC)*, pp. 699–704.
- Ren, W. y Beard, R. (2008). Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control: Theory and applications. *Communications and Control Engineering Series*, Springer, London, UK.
- Riquelme, R. (2024). 75 % de los envíos de amazon pasa a través de un robot. <https://www.eleconomista.com.mx/tecnologia/75-envios-amazon-pasa-traves-robot-20241010-729482.html> [Accedido: 17 de junio de 2025].
- Roza, A., Maggiore, M., y Scardovi, L. (2019). A smooth distributed feedback for formation control of unicycles. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(12):4998–5011.
- Sira-Ramírez, H., Luviano-Juárez, A., Ramírez-Neria, M., y Zurita-Bustamante, E. W. (2017). Active disturbance rejection control of dynamic systems: a flatness based approach. *Butterworth-Heinemann*.

- Sira-Ramírez, H., Ramírez-Neria, M., y Rodríguez-Angeles, A. (2010). On the linear control of nonlinear mechanical systems. En *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 1999–2004. IEEE.
- Truong Nguyen, T., Van Vu, D., Van Pham, T., y Trinh, M. H. (2024). Bearing-constrained leader-follower formation of single-integrators with disturbance rejection: Adaptive variable-structure approaches. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 54(11):6283–6296.
- Wang, W., Huang, J., Wen, C., y Fan, H. (2014). Distributed adaptive control for consensus tracking with application to formation control of nonholonomic mobile robots. *Automatica*, 50(4):1254–1263.
- Wicaksono, H. y Nilkhamhang, I. (2017). Glocal controller-based formation control strategy for flexible material handling. En *2017 56th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE)*, pp. 787–792.
- Zou, Y., Wen, C., y Guan, M. (2019). Distributed adaptive control for distance-based formation and flocking control of multi-agent systems. *IET Control Theory & Applications*, 13(6):878–885.