







Análisis comparativo de métodos para la obtención de la cinemática inversa de un manipulador cilíndrico

Comparative analysis of methods for obtaining the inverse kinematics of a cylindrical manipulator

E. García-Trinidad ^{a,*}, E. Arcos-Hernández ^a, V. García-Gutiérrez ^b, J.B. Torres-Valle ^c, E. Peza-Ortíz ^c, C. Hernandez-Borja ^c

^aDepartamento de Ingeniería Mecatrónica, Tecnológico de Estudios Superiores de Huixquilucan, Tecnológico Nacional de México, 52773, Huixquilucan, Estado de México, México.

^bDepartamento de Ingeniería Mecatrónica, Universidad Autónoma Metropolitana, 52005, Lerma de Villada, Estado de México, México.

^cDivisión Académica de Mantenimiento Industrial y Mecatrónica, Universidad Tecnológica Fidel Velázquez, 54400, Nicolás Romero, Estado de México, México.

Resumen

La cinemática inversa es fundamental para el control de robots manipuladores, donde la eficiencia y la precisión son críticas. Este trabajo presenta una solución geométrica, exacta y de forma cerrada para la cinemática inversa de un manipulador cilíndrico. Se realiza una comparativa de rendimiento rigurosa entre el método geométrico propuesto y ocho algoritmos numéricos iterativos de propósito general, validada mediante una prueba de estrés sobre una trayectoria continua de alta resolución. Los resultados demuestran empíricamente que la solución geométrica permite frecuencias de control superiores a 122 kHz, siendo más de 400 veces más rápida que la mejor alternativa numérica evaluada y alcanzando un error de posicionamiento nulo. Esta investigación aporta evidencia cuantitativa de que, para manipuladores no redundantes, los solucionadores especializados son indispensables para aplicaciones de tiempo real estricto o hardware embebido, superando drásticamente a los de propósito general.

Palabras Clave: robótica, cinemática inversa, análisis geométrico, manipulador cilíndrico, métodos numéricos, trayectoria continua.

Abstract

Inverse kinematics is fundamental for the control of robot manipulators, where efficiency and precision are critical. This work presents a geometric, exact, and closed-form solution for the inverse kinematics of a cylindrical manipulator. A rigorous performance comparison is conducted between the proposed geometric method and eight general-purpose iterative numerical algorithms, validated through a stress test on a high-resolution continuous trajectory. The results empirically demonstrate that the geometric solution enables control frequencies exceeding 122 kHz, being over 400 times faster than the best evaluated numerical alternative while achieving zero positioning error. This research provides quantitative evidence that, for non-redundant manipulators, specialized solvers are indispensable for hard real-time applications or embedded hardware, drastically outperforming general-purpose ones.

Keywords: robotics, inverse kinematics, geometric analysis, cylindrical manipulator, numerical methods, continuous trajectory.

1. Introducción

Los robots manipuladores se han convertido en herramientas indispensables en el panorama tecnológico moderno, impulsando la automatización en una amplia variedad de industrias,

incluyendo la manufactura, la logística, la aeronáutica y la salud (Abdelmaksoud *et al.*, 2024). La capacidad de estos sistemas para ejecutar tareas complejas y, a menudo delicadas, con una precisión inigualable es un factor clave en la productividad, la calidad y la seguridad en estos sectores. Desde el ensambla-

*Autor para correspondencia: enrique.g.t@huixquilucan.tecnm.mx

Correo electrónico: enrique.g.t@huixquilucan.tecnm.mx (Enrique García-Trinidad), emmanuel.a.h@huixquilucan.tecnm.mx (Emmanuel Arcos-Hernández), v.garcia@correo.ler.uam.mx (Victor García-Gutiérrez), jose.torres@utfv.edu.mx (Jose Bernardo Torres-Valle), edebaldo.peza@utfv.edu.mx (Edebaldo Peza-Ortíz), carlos.hernandez@utfv.edu.mx (Carlos Hernandez-Borja).

je a alta velocidad de productos electrónicos de consumo hasta las maniobras minuciosas requeridas en la cirugía asistida por robots, la habilidad de controlar el movimiento de los manipuladores es fundamental (Fu *et al.*, 2013). Este rendimiento no es simplemente una característica deseable, sino un requisito crítico que determina la viabilidad económica y la factibilidad técnica de las soluciones automatizadas. La parte fundamental del diseño y desarrollo de manipuladores se encuentra en el análisis cinemático, que es el estudio del movimiento sin considerar las fuerzas que lo originan.

Este estudio se centra en el análisis cinemático de un manipulador cilíndrico. Esta configuración, definida por una base giratoria y dos articulaciones prismáticas consecutivas, forma un sistema de coordenadas con un espacio de trabajo cilíndrico. Aunque la robótica moderna ha visto la proliferación de robots articulados más complejos como los robots Selective Compliance Assembly Robot Arm (SCARA) (Ulrich y Steger, 2016), la elección de investigar el robot cilíndrico es deliberada, pues su relevancia perdurable proviene de su inherente simplicidad, que se traduce en ventajas tangibles para una clase específica de aplicaciones industriales. La simplicidad mecánica de un manipulador cilíndrico ofrece una propuesta de valor atractiva en varias áreas clave. En primer lugar, es altamente rentable; menos articulaciones conducen a menores costos de fabricación, integración y mantenimiento, lo que lo convierte en una opción atractiva para proyectos de automatización con restricciones estrictas de capital. En segundo lugar, su diseño es excepcionalmente eficiente en el uso del espacio. El perfil de movimiento vertical y radial es ideal para tareas en entornos restringidos donde el espacio en el piso es limitado, como atender matrices de máquinas de control numérico muy compactas o realizar operaciones de paletizado sobre una banda transportadora. Por último, esta arquitectura es óptima para una variedad de tareas simples y de alto rendimiento comunes en la industria, incluyendo manipulación de materiales, ensamblaje de piezas ligeras, carga y descarga de máquinas, paletizado y operaciones simples de soldadura por puntos o soldadura blanda (Pai *et al.*, 2015). Las características distintivas del robot cilíndrico lo convierten en un sistema ideal para la investigación central de este trabajo. Su estructura cinemática simple, no redundante y de tres grados de libertad permite la derivación de una solución exacta y en forma cerrada para un análisis cinemático. Esto proporciona una base perfecta contra la cual se puede evaluar rigurosamente el rendimiento de métodos de solución del problema cinemático más generales, pero aproximados. Al estudiar esta arquitectura fundamental, podemos explorar los compromisos críticos entre algoritmos especializados y exactos, y solucionadores numéricos de propósito general, generando conocimientos directamente aplicables a la selección de estrategias de control para un segmento significativo de tareas de automatización industrial.

2. Materiales y métodos

El análisis cinemático de robots manipuladores es crucial para que puedan realizar movimientos precisos y exactos, lo cual es esencial para aplicaciones en la industria y en la investigación, ya que evalúa qué tan bien un manipulador puede

ejecutar las tareas para las que fue desarrollado, como ensamblaje, manipulación de objetos u operaciones complejas como soldadura (Karupusamy *et al.*, 2024). Este proceso consiste en examinar el movimiento de los eslabones y las articulaciones del manipulador para determinar su capacidad de posicionar y orientar el efector final de manera precisa. Esta capacidad es fundamental, pues un estudio demostró que el análisis cinemático afecta el rendimiento y la eficiencia del manipulador (Elhadidy *et al.*, 2024), esto a través de la evaluación de métodos mediante modelado matemático y optimización. En particular, el análisis cinemático ayuda a optimizar el diseño de los manipuladores al definir las relaciones entre los eslabones y las articulaciones, minimizando errores y eliminando las colisiones entre los componentes internos del manipulador, por ejemplo un estudio sobre el diseño de manipuladores demostró que una longitud adecuada de los eslabones mejora su capacidad rotacional (Fomin *et al.*, 2021). El análisis cinemático incluye tanto el directo como el inverso. La cinemática directa consiste en determinar la posición y orientación del efector final a partir de parámetros articulares específicos, mientras que la cinemática inversa implica encontrar los ángulos y desplazamientos articulares necesarios para alcanzar las posiciones deseadas del efector final.

2.1. Cinemática directa

Para modelar la estructura cinemática del manipulador, se empleó la convención sistemática de Denavit-Hartenberg (D-H) (Craig, 1989). La asignación de los sistemas de coordenadas dextrógiros $\{0, 1, 2, 3\}$ se ilustra en la Figura 1, derivando los parámetros geométricos presentados en la Tabla 1.

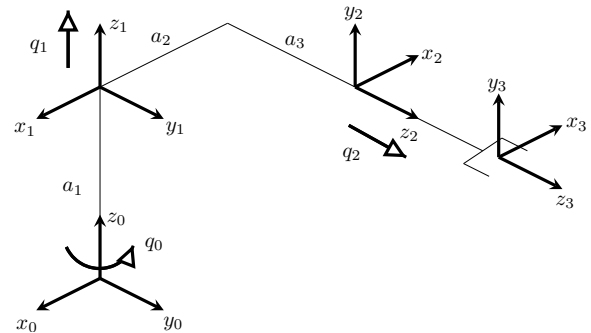


Figura 1: Asignación de ejes para el manipulador.

Tabla 1: Parámetros D-H

j	θ_j	d_j	a_j	α_j	σ_j	Rango
1	q_0	a_1	0	0	R	$q_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$
2	π	q_1	a_2	$\pi/2$	P	$q_1 \in [0, 0.70]$
3	0	$q_2 + a_3$	0	0	P	$q_2 \in [0, 0.6]$

La transformación homogénea general $\mathbf{A}_j^{j-1} \in \mathbf{SE}(3)$ que relaciona el sistema del eslabón j con el $j - 1$ se define en (1).

$$\mathbf{A}_j^{j-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j \cos \alpha_j & \sin \theta_j \sin \alpha_j & a_j \cos \theta_j \\ \sin \theta_j & \cos \theta_j \cos \alpha_j & -\cos \theta_j \sin \alpha_j & a_j \sin \theta_j \\ 0 & \sin \alpha_j & \cos \alpha_j & d_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

La posición y orientación del efector final con respecto a la base se obtiene calculando el producto de las transformaciones individuales, $\mathbf{A}_3^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2$. Sustituyendo los parámetros de la Tabla 1 y simplificando con $c_0 = \cos(q_0)$ y $s_0 = \sin(q_0)$, se obtiene el modelo cinemático directo final mostrado en (2).

$$\mathbf{A}_3^0 = \begin{bmatrix} -c_0 & 0 & -s_0 & -a_2 c_0 - (a_3 + q_2) s_0 \\ -s_0 & 0 & c_0 & (a_3 + q_2) c_0 - a_2 s_0 \\ 0 & 1 & 0 & a_1 + q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

2.2. Derivación de la solución geométrica propuesta

En esta sección se detalla el desarrollo analítico del método geométrico exacto propuesto, el cual servirá de referencia para la comparativa con los algoritmos numéricos. La cinemática inversa, que consiste en determinar las variables articulares necesarias para alcanzar una posición deseada, presenta desafíos dependientes de la configuración del robot. Si bien para manipuladores redundantes, con siete o más grados de libertad, es común recurrir a métodos numéricos o técnicas avanzadas de Deep Learning (Malik *et al.*, 2022) y Perceptrones Multicapa (Šegota *et al.*, 2021), estas aproximaciones pueden resultar innecesariamente costosas para estructuras más simples. En el caso del manipulador cilíndrico estudiado, el análisis geométrico ofrece una solución de forma cerrada que garantiza mayor simplicidad y eficiencia computacional, tal como se deriva a continuación.

Dada una posición deseada $\mathbf{P}_d = [x_d, y_d, z_d]^T$, el objetivo es encontrar los valores de las variables de las articulaciones del manipulador q_0, q_1 y q_2 . Así, de acuerdo a (2).

$$\begin{aligned} x_d &= -a_2 c_0 - (a_3 + q_2) s_0 \\ y_d &= (a_3 + q_2) c_0 - a_2 s_0 \\ z_d &= a_1 + q_1 \end{aligned} \quad (3)$$

El componente z_d del efector final esta directamente relacionado con el desplazamiento de la segunda articulación q_1 . Esta relación lineal entre la variable de la articulación y la posición cartesiana sobre el eje de desplazamiento facilita su cálculo (4).

$$\begin{aligned} z_d &= a_1 + q_1 \\ q_1 &= z_d - a_1 \end{aligned} \quad (4)$$

En cuanto a la tercera articulación q_2 , la distancia radial del efector final al eje z_0 esta dado por $\sqrt{x_d^2 + y_d^2}$. Por lo tanto la distancia radial esta directamente controlada por q_2 . De esta forma si se elevan al cuadrado y se suman los términos x_d y y_d .

$$\begin{aligned} x_d^2 + y_d^2 &= (-a_2 c_0 - (a_3 + q_2) s_0)^2 + ((a_3 + q_2) c_0 - a_2 s_0)^2 \\ x_d^2 + y_d^2 &= a_2^2 c_0^2 + a_3^2 s_0^2 + 2a_3 q_2 s_0^2 + a_2^2 c_0^2 + \\ &\quad + a_3^2 c_0^2 + 2a_3 q_2 c_0^2 + q_2^2 s_0^2 + q_2^2 c_0^2 \\ x_d^2 + y_d^2 &= (a_3 + q_2)^2 + a_2^2 \\ q_2 &= \pm \sqrt{-a_2^2 + x_d^2 + y_d^2} - a_3 \end{aligned} \quad (5)$$

Finalmente, para la primera articulación q_0 si se divide el término y_d sobre x_d se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{y_d}{x_d} &= \frac{(a_3 + q_2) c_0 - a_2 s_0}{-a_2 c_0 - (a_3 + q_2) s_0} \\ \frac{y_d}{x_d} &= \frac{-a_2 \tan(q_0) + a_3 + q_2}{(a_3 + q_2) \tan(q_0) + a_2} \\ q_0 &= \text{atan2}(-a_3 x_d + a_2(-y_d) - q_2 x_d, a_2(-x_d) + a_3 y_d + q_2 y_d) \end{aligned} \quad (6)$$

Para encontrar el valor de q_0 en (6), la función $\text{atan2}(y, x)$ es usada. Esta función maneja correctamente todos los cuatro cuadrantes y provee un único ángulo en el rango $(-\pi, \pi)$. De esta forma, típicamente existe una única solución para las variables q_0, q_1 y q_2 , para cualquier punto en el espacio cartesiano (x_d, y_d, z_d) dentro de su espacio de trabajo operacional, asumiendo que x_d y y_d no son cero. Si la posición deseada del elemento terminal del manipulador esta fuera de su espacio de trabajo, no existirá una solución válida, y el robot no podrá alcanzar físicamente el punto deseado.

2.3. Métodos numéricos

Los métodos numéricos iterativos ofrecen un enfoque de propósito general para resolver el problema de la cinemática inversa. Estos algoritmos, que incluyen los métodos de Newton-Raphson, Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt (LM) (Haviland y Corke, 2024), investigados en este estudio, tratan el problema de la cinemática inversa como un problema no lineal de búsqueda de raíces o de optimización. A partir de una estimación inicial de la configuración articular, refinan de forma iterativa esta suposición para minimizar el error entre la posición actual y la deseada del efector final. Su principal ventaja es la versatilidad, pues se pueden aplicar a prácticamente cualquier configuración robótica, incluidos los manipuladores redundantes, sin necesidad de una derivación personalizada. Sin embargo, esta generalidad conlleva varios inconvenientes bien documentados (El-Sherbiny *et al.*, 2018). El proceso iterativo puede ser computacionalmente más exigente que un cálculo analítico directo, lo que puede afectar el desempeño en tiempo real. Además, la convergencia a una solución válida no siempre está garantizada y puede ser muy sensible a la calidad de la estimación inicial. Estos métodos también enfrentan desafíos cerca de singularidades en algunas configuraciones del manipulador, en las que éste pierde uno o más grados de libertad. Esta disyuntiva fundamental entre robustez y exactitud es una consideración clave al evaluar solucionadores numéricos.

3. Resultados

El uso de herramientas de software en la robótica para el análisis de robots permite que los investigadores exploren e implementen sistemas robóticos con una mayor facilidad. Una de las ventajas que ofrecen este tipo de software es la de simular al robot, por ejemplo SoRoSim (Mathew *et al.*, 2023) facilita la simulación de sistemas robóticos rígidos y suaves. Por otro lado, plataformas como AdaptiX (Pascher *et al.*, 2024) habilita el desarrollo de robots usando tecnologías de realidad virtual. A pesar de la existencia de estas plataformas, es importante destacar que las librerías como la Robotics Toolbox para Python (RTB) (Corke y Haviland, 2021) sigue siendo una herramienta

fundamental y ampliamente utilizada en en análisis y desarrollo de robots, ya que ofrecen un conjunto robusto de funciones para la cinemática, dinámica, control de robots y la planeación de trayectorias.

Para llevar a cabo el análisis comparativo, en este estudio se utilizó la RTB para realizar dos tipos de validación comparativa, una estática puntual para verificar la exactitud posicional, y una evaluación en movimiento basada en trayectorias continuas para evaluar la eficiencia computacional bajo condiciones de carga de trabajo intensiva.

3.1. Validación de exactitud posicional

Para comprobar la validez de la cinemática inversa obtenida en (4), (5) y (6), se seleccionaron cinco configuraciones aleatorias del manipulador $i = 1, 2, \dots, 5$ dentro de su espacio de trabajo mostradas en la Tabla 2. Estas posiciones deseadas se ilustran en la Figura 2.

El método geométrico propuesto alcanzó una solución exacta con un Error Cuadrático Medio (MSE) de cero en todas las configuraciones. En contraste, al evaluar los métodos numéricos (incluyendo variantes de Levenberg-Marquardt y Newton-Raphson), aunque la mayoría convergió a errores aceptables (10^{-7} a 10^{-9}), métodos como Gauss-Newton (pinv=False) presentaron inestabilidad en ciertas configuraciones ($i = 5$), fallando en la convergencia con errores altos de un $MSE \approx 2.63$.

Tabla 2: Configuraciones del manipulador para validación estática

i	Posición deseada \mathbf{P}_d	Solución real $[q_0, q_1, q_2]$
1	(-0.3602, 0.4751, 0.6006)	[0.3067, 0.5006, 0.3617]
2	(-0.3556, 0.5087, 0.3966)	[0.2820, 0.2966, 0.3875]
3	(0.1126, 0.7956, 0.7242)	[-0.3922, 0.6242, 0.5782]
4	(0.1972, 0.5184, 0.6542)	[-0.7324, 0.5542, 0.3173]
5	(-0.2826, 0.1379, 0.7479)	[0.4275, 0.6479, 0.04262]

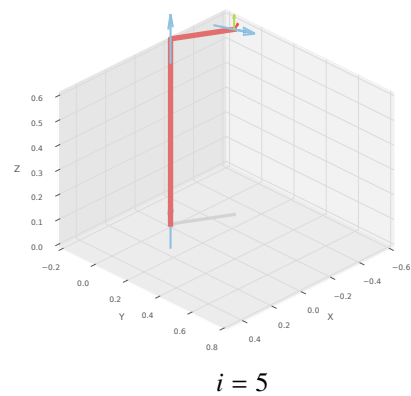
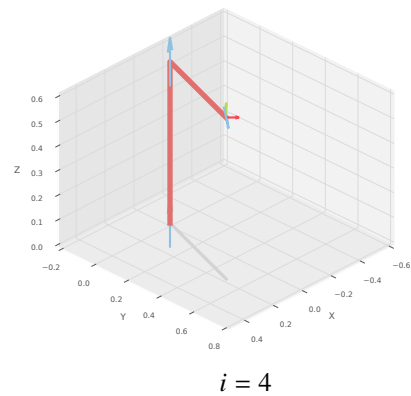
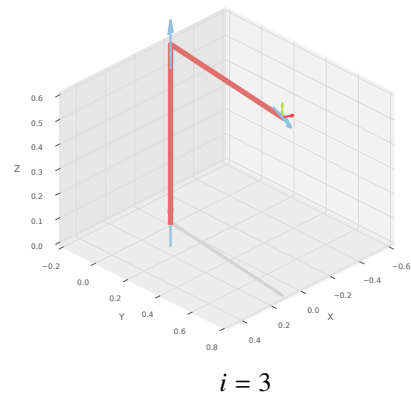
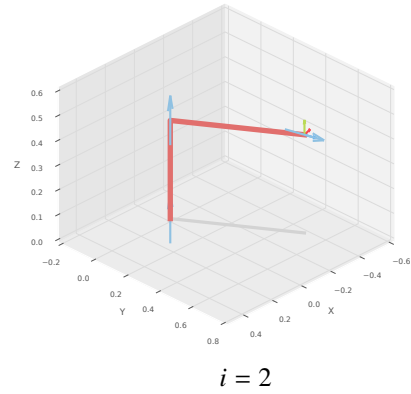
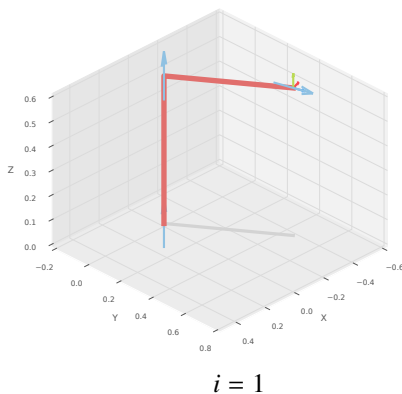


Figura 2: Visualización de las cinco posiciones de prueba en el espacio de trabajo.

Tabla 3: Comparación de rendimiento computacional en trayectoria continua (2000 puntos)

Método	Tiempo Prom. (μ s)	Frec. (kHz)	Factor de Velocidad
Geométrico (Propuesto)	8.17	122.39	1.0x (Ref)
LM Chan ($k = 1.0$)	3372.57	0.30	-412.78x más lento
LM Chan ($k = 0.1$)	3377.47	0.30	-413.38x más lento
LM Sugihara ($k = 0.001$)	3389.78	0.30	-414.88x más lento
LM Wampler ($k = 1e-6$)	3350.43	0.30	-410.07x más lento
Gauss-Newton (pinv=T)	3973.60	0.25	-486.34x más lento
Gauss-Newton (pinv=F)	4314.04	0.23	-528.01x más lento
Newton-Raphson (pinv=F)	6723.63	0.15	-822.92x más lento
Newton-Raphson (pinv=T)	6779.45	0.15	-829.75x más lento

3.2. Análisis de rendimiento en trayectoria continua

Para evaluar el impacto del tiempo de cómputo en aplicaciones reales, se simuló una tarea de seguimiento de trayectoria continua que requiere el movimiento simultáneo de las tres articulaciones. Se generó una trayectoria helicoidal de alta resolución compuesta por 2000 puntos de control, interpolando movimiento circular en la base (q_0) con elevación lineal (q_1) y extensión radial (q_2), como se muestra en la Figura 3.

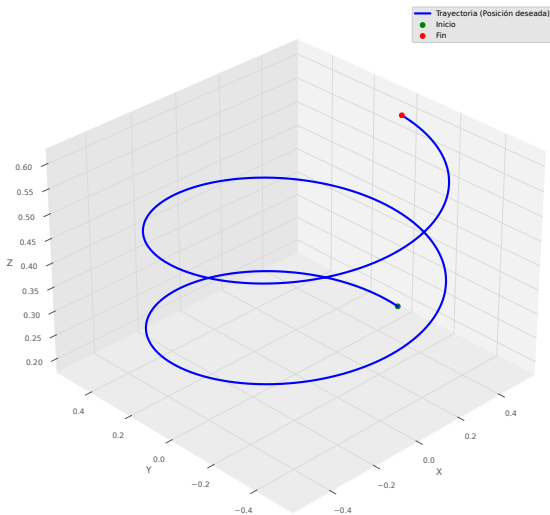


Figura 3: Trayectoria helicoidal de validación compuesta por 2000 puntos para prueba de estrés computacional.

La Tabla 3 presenta la comparación de tiempos de ejecución promedio y la frecuencia máxima teórica de control para cada método. Los resultados fueron generados en una estación de trabajo con procesador Intel i7-10850H y 32 GB de RAM.

Se observa una diferencia de magnitud crítica, pues el método geométrico propuesto alcanzó un tiempo promedio de ejecución de 8.17μ s, permitiendo una frecuencia teórica de actualización superior a 122 kHz. Por el contrario, el método numérico más eficiente (LM Chan $k = 1.0$) requirió 3372.57μ s, limitando la frecuencia de control a apenas 0.30 kHz.

Estos resultados demuestran que, para trayectorias continuas, el método analítico es más de 400 veces más rápido que las alternativas iterativas del estado del arte. Esta eficiencia no es trivial; mientras que los métodos numéricos saturarían el procesador en un bucle de control de 1 kHz, típico en servocontrol industrial, el método geométrico utiliza menos del 1% de

los recursos computacionales, liberando capacidad de procesamiento para tareas concurrentes críticas como visión artificial, planificación de movimiento en tiempo real o detección de colisiones.

4. Conclusiones

Este estudio abordó la comparativa de rendimiento entre una solución cinemática inversa geométrica exacta y ocho algoritmos numéricos de propósito general aplicados a un manipulador cilíndrico. Más allá de una validación estática, la investigación se centró en cuantificar el costo computacional en tareas de seguimiento de trayectorias continuas, un aspecto crítico para aplicaciones industriales de alto rendimiento.

Nuestra investigación arrojó resultados inequívocos, validados tanto en precisión posicional como en eficiencia computacional. La solución geométrica derivada no solo garantizó un error de posicionamiento nulo ($MSE=0$) y determinismo absoluto, sino que demostró una superioridad abrumadora en velocidad de procesamiento. Las pruebas de estrés en trayectoria continua revelaron que el método propuesto es más de 400 veces más rápido que la mejor alternativa numérica (Levenberg-Marquardt), permitiendo frecuencias de control teóricas superiores a 122 kHz frente a los limitados 0.30 kHz de los solucionadores iterativos. Además, se evidenció la inestabilidad inherente de ciertos métodos numéricos como Gauss-Newton sin regularización, que fallaron en converger en configuraciones válidas, un riesgo inaceptable en entornos de seguridad crítica.

Las implicaciones de estos hallazgos refutan la noción de que la diferencia de tiempo entre métodos analíticos y numéricos es despreciable. Se demostró que, en un bucle de control estándar de 1 kHz, los métodos numéricos saturarían casi por completo los recursos de procesamiento, mientras que la solución geométrica ocuparía menos del 1% de la capacidad de cómputo. Esto proporciona evidencia cuantitativa de que, para manipuladores no redundantes, el esfuerzo de derivar una solución cerrada es indispensable para habilitar el uso de hardware embebido de bajo costo o para liberar recursos computacionales hacia tareas concurrentes complejas, como visión artificial o planificación dinámica.

Es importante destacar que la superioridad del método geométrico observada en este estudio es característica de manipuladores no redundantes con soluciones analíticas cerradas. En el caso de robots redundantes, la jerarquía de rendimiento podría invertirse. Para arquitecturas redundantes, las soluciones geométricas suelen ser excesivamente complejas o inexistentes, haciendo que los métodos numéricos, especialmente los

basados en la Jacobiana, sean preferibles por su capacidad para manejar la redundancia mediante optimización de criterios secundarios. Por tanto, el alcance de los resultados presentados se circunscribe a manipuladores determinados, donde la eficiencia del método geométrico es imbatible, como se demostró con el robot cilíndrico.

El trabajo futuro podría extender este marco comparativo e implementación en hardware físico a otras arquitecturas no redundantes comunes, como los manipuladores SCARA, para consolidar un conjunto de directrices que prioricen la eficiencia algorítmica en el diseño de sistemas robóticos.

Agradecimientos

Los autores expresan su gratitud a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) por el apoyo brindado para la realización de esta investigación. Su respaldo ha sido fundamental y refleja un firme compromiso con el avance científico y tecnológico.

Referencias

- Abdelmaksoud, S. I., Al-Mola, M. H., Abro, G. E. M., y Asirvadam, V. S. (2024). In-depth review of advanced control strategies and cutting-edge trends in robot manipulators: Analyzing the latest developments and techniques. *IEEE Access*, 12:47672–47701.
- Corke, P. y Haviland, J. (2021). Not your grandmother's toolbox—the robotics toolbox reinvented for python. En *2021 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pp. 11357–11363. IEEE.
- Craig, J. J. (1989). *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., USA, 2nd edición.
- El-Sherbiny, A., Elhosseini, M. A., y Haikal, A. Y. (2018). A comparative study of soft computing methods to solve inverse kinematics problem. *Ain Shams Engineering Journal*, 9(4):2535–2548.
- Elhadidy, M. S., Abdalla, W. S., Abdelrahman, A. A., Elnaggar, S., y Elhosseini, M. (2024). Assessing the accuracy and efficiency of kinematic analysis tools for six-dof industrial manipulators: The kuka robot case study. *AIMS Mathematics*, 9(6):13944–13979.
- Fomin, A., Antonov, A., Glazunov, V., y Rodionov, Y. (2021). Inverse and forward kinematic analysis of a 6-dof parallel manipulator utilizing a circular guide. *Robotics*, 10(1).
- Fu, Z., Yang, W., y Yang, Z. (2013). Solution of inverse kinematics for 6r robot manipulators with offset wrist based on geometric algebra. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 5(3):031010.
- Haviland, J. y Corke, P. (2024). Manipulator differential kinematics: Part i: Kinematics, velocity, and applications [tutorial]. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 31(4):149–158.
- Karupusamy, S., Maruthachalam, S., y Veerasamy, B. (2024). Kinematic modeling and performance analysis of a 5-dof robot for welding applications. *Machines*, 12(6).
- Malik, A., Lischuk, Y., Henderson, T., y Prazenica, R. (2022). A deep reinforcement-learning approach for inverse kinematics solution of a high degree of freedom robotic manipulator. *Robotics*, 11(2).
- Mathew, A. T., Hmida, I. B., Armanini, C., Boyer, F., y Renda, F. (2023). Sorosim: A matlab toolbox for hybrid rigid–soft robots based on the geometric variable-strain approach. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 30(3):106–122.
- Pai, Y. S., Yap, H. J., y Singh, R. (2015). Augmented reality based programming, planning and simulation of a robotic work cell. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture*, 229(6):1029–1045.
- Pascher, M., Goldau, F. F., Kronhardt, K., Frese, U., y Gerken, J. (2024). Adaptix - a transitional xr framework for development and evaluation of shared control applications in assistive robotics. *Proc. ACM Hum.-Comput. Interact.*, 8(EICS).
- Ulrich, M. y Steger, C. (2016). Hand-eye calibration of scara robots using dual quaternions. *Pattern Recognition and Image Analysis*, 26(1):231–239.
- Šegota, S. B., Anđelić, N., Mrzljak, V., Lorencin, I., Kuric, I., y Car, Z. (2021). Utilization of multilayer perceptron for determining the inverse kinematics of an industrial robotic manipulator. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 18(4):1729881420925283.