

## Solución asintótica de un rompeolas tipo wec usando batimetría variable Asymptotic solution of a wec-type breakwater using variable bathymetry

E. Arcos-Hernández <sup>a,\*</sup>, M. Peralta-Gutiérrez <sup>a</sup>, E. García-Trinidad <sup>a</sup>

<sup>a</sup>Tecnológico de Estudios Superiores de Huixquilucan, Tecnológico Nacional de México, 52773, Huixquilucan, Estado de México, México.

### Resumen

En este trabajo, se ha llevado a cabo un análisis asintótico, hasta el segundo orden en una expansión asintótica regular de la interacción de ondas largas lineales con un rompeolas flotante impermeable de superficies onduladas. Primero, el oleaje interactúa con una pendiente constante del fondo marino y posteriormente impacta al rompeolas ondulado. Las superficies onduladas están descritas por perfiles sinusoidales. Se analizan los efectos de tres parámetros geométricos diferentes sobre los coeficientes de reflexión: La amplitud de las superficies onduladas, la longitud y el ancho de la estructura sumergida y la posición de la misma. Las ecuaciones de gobierno se expresan en forma adimensional. La solución asintótica obtenida se comparó con las soluciones teóricas reportadas en la literatura especializada.

**Palabras Clave:** Oleaje, Rompeolas flotante, Métodos Asintóticos, Parámetros adimensionales, Coeficiente de reflexión.

### Abstract

In this work, an asymptotic analysis, up to the second order in a regular asymptotic expansion of the interaction of linear long waves with an impermeable floating breakwater with undulating surfaces was carried out. First, the waves interact with a constant slope seabed and then impact the undulating breakwater. The undulating surfaces are described by sinusoidal profiles. The effects of three different geometric parameters on the reflection coefficients are analyzed: the amplitude of the undulating surfaces, the length and width of the submerged structure, and its position. The governing equations are expressed in dimensionless form. The asymptotic solution obtained was compared with theoretical solutions reported in the specialized literature.

**Keywords:** Water waves, Floating breakwater, Asymptotic method, Dimensionless parameters, Reflection coefficients.

### 1. Introducción

A lo largo de la línea de costa existen numerosos asentamientos humanos donde se realizan diversas actividades como la pesca, el turismo y las actividades industriales, las cuales deben ser protegidas con rompeolas debido a la acción erosiva del oleaje. Los rompeolas se consideran estructuras costeras que reducen la energía del oleaje aguas abajo de la estructura y, por lo tanto, reducen la erosión costera y evitan el transporte de sedimento proporcionando un refugio seguro. Los rompeolas se clasifican en: Plataformas marinas, muelles, islas, rompeolas y estructuras flotantes, (Wiegel, 1964). En particular las últimas estructuras tienen un rol importante en la hidráulica marítima porque no deterioran el medio ambiente ya que presentan una mínima interferencia con la circulación del agua y también pueden ser aprovechados como estructuras converti-

doras de energía WEC, por sus siglas en inglés (Wave Energy Converter). En la literatura especializada se han propuesto diferentes estructuras flotantes para mitigar la energía del oleaje, enfocadas en las fuerzas inducidas por la propagación del oleaje sobre la estructura flotante, (During y Shiau, 1956). Para los rompeolas flotantes, la geometría más utilizada es la de un prisma rectangular. En este contexto, se han reportado varias investigaciones analíticas, numéricas y experimentales relevantes. Algunos estudios pioneros de la interacción entre el oleaje y obstáculos rígidos fueron realizados por Stoker (1957), quien analizó los coeficientes de reflexión y transmisión de la propagación del oleaje sobre una placa sumergida. Considerando flujo potencial lineal Newman (1965), estudió la propagación del oleaje sobre obstáculos largos y obtuvo los coeficientes de reflexión y transmisión. Por otro lado, Mei y Black (1969) analizaron la dispersión de ondas de superficie infinitesimales que

\*Autor para correspondencia: [emmanuel.a.h@huixquilucan.tecnm.mx](mailto:emmanuel.a.h@huixquilucan.tecnm.mx)

**Correo electrónico:** [emmanuel.a.h@huixquilucan.tecnm.mx](mailto:emmanuel.a.h@huixquilucan.tecnm.mx) (Emmanuel Arcos-Hernández), [manuel.p.g@huixquilucan.tecnm.mx](mailto:manuel.p.g@huixquilucan.tecnm.mx) (Manuel Peralta-Gutiérrez), [enrique.g.t@huixquilucan.tecnm.mx](mailto:enrique.g.t@huixquilucan.tecnm.mx) (Enrique García-Trinidad).

**Historial del manuscrito:** recibido el 30/06/2025, última versión-revisada recibida el 24/09/2025, aceptado el 24/09/2025, en línea (postprint) desde el 26/09/2025, publicado el 05/01/2026. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v13i26.15404>



inciden sobre obstáculos rectangulares en un canal de profundidad finita, donde fueron considerados dos casos particulares: 1) Un obstáculo en el fondo marino y 2) un obstáculo en la superficie. Además, Patarapanich (1984) estudió los coeficientes de reflexión inducido por la interacción de ondas largas lineales sobre una placa sumergida identificando que los coeficientes de reflexión crecen alternativamente alcanzando un valor máximo y posteriormente decrecen hasta llegar a cero. (Kanoria, 1999) analizó la dispersión de ondas de agua superficial generada por una pared gruesa sumergida con forma rectangular en un cuerpo de agua de una profundidad finita. Las estructuras flotantes también se utilizan como puentes provisionales, que se conocen como pontones. En este contexto, basados en teoría lineal del oleaje, (Drimer *et al.*, 1992) estudiaron analíticamente el comportamiento hidrodinámico debajo de un rompeolas flotante tipo pontón, también conocidas como rompeolas tipo WEC. Otros autores analizaron la hidrodinámica inducida por la interacción del oleaje con un grupo de rompeolas. En esta dirección, (Cheong y Patarapanich, 1992) usaron una técnica de descomposición espectral para obtenerlos coeficientes de reflexión y transmisión para un sistema de doble placa horizontal. En el análisis de la interacción entre el oleaje y rompeolas estudiaron fundamentalmente el fenómeno hidrodinámico de los coeficientes de reflexión y transmisión junto con la evolución en el espacio y tiempo de la elevación de la superficie libre del oleaje. En cuanto a la reflexión del oleaje, se ha identificado que los fondos marinos ondulados pueden inducir resonancia en el oleaje, condición que ocurre cuando la longitud de onda del oleaje es el doble de la longitud de onda de la superficie ondulada, este interesante fenómeno es conocido como la resonancia de Bragg y fue descubierto por primera vez por Bragg y Bragg (1913), donde identificaron que la mayor reflexión de los rayos X se produce cuando las ondas de rayos X se reflejan a través de dos cristales paralelos, ya que el espacio entre los cristales es múltiplo de la mitad de la longitud de las ondas de los rayos X. En la hidráulica marítima se ha estudiado la reflexión de Bragg para la interacción de las ondas de agua con fondos marinos sinusoidales. Con respecto a la ondulación en el fondo del mar, la dispersión resonante de Bragg de las ondas superficiales también ha traído considerable atención como uno de los mecanismos fundamentales que impulsan el desarrollo de barras múltiples paralelas en línea de costa, ya que estas superficies onduladas pueden generar máximos valores del coeficiente de reflexión. Con base en lo anterior, en la literatura especializada se ha reportado la implementación de estructuras sumergidas periódicas para la reflexión del oleaje. Según el conocimiento de los autores, solo hay cinco trabajos que estudiaron la interacción del oleaje con rompeolas flotantes y sumergidos de superficies onduladas. En este sentido, (Koraim, 2013) estudio experimentalmente la eficiencia hidrodinámica de uno o más filas horizontales de tubos divididos suspendidos sobre pilotes de soporte. (Yueh *et al.*, 2016) llevaron a cabo estudios numéricos y experimentales para investigar las características de la reflexión causada por rompeolas sumergidos compuestos de placas onduladas. (Medina-Rodríguez *et al.*, 2016) estudiaron la interacción entre un rompeolas flotante sumergido de superficie ondulada y ondas largas. Implementado el método de elemento de frontera, (Yueh *et al.*, 2018) determinaron el coeficiente de reflexión de un rompeolas de placa ondulada impermeable

sumergida modelado como una estructura delgada o sin espesor. Identificaron que, para el caso de rompeolas flotantes, la geometría más utilizada para reflejar el oleaje son las estructuras rectangulares sumergidas con superficies planas. Para mejorar la capacidad de reflexión de los rompeolas sumergidas a la acción del oleaje con alto flujo de energía se requiere que las estructuras sumergidas aumenten sus dimensiones geométricas. Para evitar lo anterior, se han propuesto sistemas de rompeolas sumergidos de superficies planas, es decir, estructuras robustas y de placas. En trabajos especializados esta reportado que no es necesario aumentar las dimensiones geométricas de las estructuras para mejorar su capacidad reflectante. Para lograr una mayor cantidad de energía reflejada se debe modificar la relación espesor y longitud de la estructura y aproximar la superficie lisa a una superficie ondulada.

Recientemente Bautista. *et al.* (2022) determinaron los coeficientes de reflexión y transmisión de un sistema de dos rompeolas de placa ondulada sumergidos considerando un fondo marino uniforme. Partiendo de ésta condición en la presente investigación se analiza la interacción de un fondo marino de geometría variable con una estructura rompeolas identificando los parámetros adimensionales dominantes, en la literatura especializada esta reportado que el oleaje perturbado por el cambio geométrico del fondo marino se debe de tomar en cuenta para la optimización de estructuras costeras convertidoras de energía.

## 2. Materiales y Métodos

### 2.1. Planteamiento del problema

En este trabajo se considera la interacción entre ondas largas de agua unidimensionales de amplitud incidente  $A_I$ , frecuencia de onda  $\omega = 2\pi/T_w$ , donde  $T_w$  es el período de oleaje. El oleaje se propaga de izquierda a derecha sobre un suelo rígido impermeable de profundidad variable. En el sistema de coordenadas cartesianas seleccionado, la dirección positiva del eje  $x$  es hacia la derecha, con origen en la unión entre las regiones  $R_1$  donde la profundidad del tirante de agua es constante,  $h_1$  con dominio  $-\infty \leq x \leq 0$  y la región  $R_2$  donde se presenta el cambio geométrico  $h(x)$  del suelo marino con  $0 \leq x \leq L$ . La estructura rompeolas se presenta entre las regiones  $R_3$  y  $R_4$  donde las profundidades  $h_2$  y  $h_3$  indican la posición del rompeolas, respectivamente.

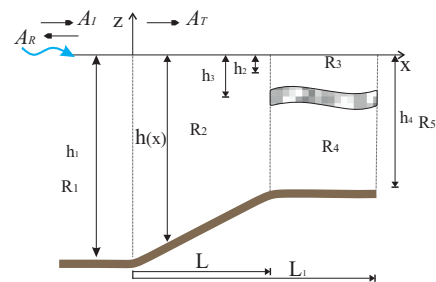


Figura 1: Vista en perfil del modelo físico en estudio.

El oleaje se propaga con una amplitud proveniente del océano, al interactuar con la pendiente y estructuras rompeolas parte de la energía se refleja con una amplitud  $A_R$  y parte

se transmite con una amplitud  $A_T$  en la región  $R_5$  donde la profundidad es de  $h_4$  en el dominio  $L \leq x \leq \infty$ , como se muestra en la Figura 1. Adicionalmente, se asume que el fondo es impermeable; sin embargo, los extremos laterales del sistema están completamente abiertos al flujo del fluido. En particular, se asume que en la región  $R_1$  existe oleaje incidente y reflejado, mientras que en la región  $R_5$  únicamente hay presencia de oleaje transmitido.

Las expresiones en variables físicas que definen las ondulaciones en las superficies horizontales de las placas en las regiones  $R_3$  y  $R_4$ , están dadas por las siguientes funciones:

$$d_2 = h_2 - A_s \sin \left[ m\pi \left( \frac{x-L}{L_1-L} \right) \right] \quad (1)$$

y

$$d_3 = h_3 - A_s \sin \left[ m\pi \left( \frac{x-L}{L_1-L} \right) \right]. \quad (2)$$

Donde  $m$  representa el número de ondulaciones en la superficie del rompeolas

El planteamiento del modelo matemático, considera las siguientes hipótesis:

- Se usa la teoría lineal de ondas largas con amplitudes pequeñas, definida por el número de Ursell  $U_r = (A_I/h_1)/(kh_1)^2 \ll 1$  con  $A_I/h_1 \ll 1$  y  $kh_1 \ll 1$ .
- Debido a que la capa límite que se genera por la interacción del oleaje y la estructura es muy pequeña comparada con la profundidad, los efectos viscosos se pueden despreciar y por lo tanto se asume que el flujo es potencial.
- Se asume un fluido incompresible, debido a que no existen variaciones de la densidad del agua en el espacio y en el tiempo.
- La superficie de la estructura son onduladas adoptando perfiles sinusoidales con sección transversal rectangular.
- El rompeolas es rígido e impermeable.
- El cambio geométrico en el lecho marino de la región  $R_2$  tiene la forma con respecto a una pendiente constante.
- El suelo marino en todas las regiones se consideran rígidas e impermeables.

## 2.2. Ecuaciones de gobierno físicas

El estudio de ondas largas es de primordial importancia para los ingenieros y científicos en el diseño de puertos y estructuras marítimas, lo cual permite obtener información relevante de su interacción con estructuras marítimas. El estudio de la interacción del oleaje con estructuras, se ha realizado usando diferentes técnicas de análisis como son: Las herramientas analíticas, numéricas y experimentales, está segunda con el uso de las computadoras han reducido significativamente la dificultad del análisis de la hidrodinámica del oleaje, cuando este se propaga sobre geometrías complejas. Sin embargo las soluciones analíticas constituyen una herramienta fundamental para la comprensión de los diferentes mecanismos hidrodinámicos de las ondas largas.

### 2.2.1. Ecuaciones de gobierno para las regiones $R_1$ , $R_2$ , $R_3$ y $R_5$

El movimiento del fluido en las regiones  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_5$  se modelan usando las ecuaciones de flujo somero propuestas por (Mei. *et al.*, 2005), donde el movimiento es dominante en el eje  $x$  debido a que las velocidades verticales en el eje  $z$  son muy pequeñas comparadas con las horizontales y la ecuación de gobierno se escribe la siguiente forma,

$$\frac{d}{dx} \left[ h(x) \frac{d\psi_j}{dx} \right] + \frac{\omega^2}{g} \psi_j = 0; \quad \text{para } j = 1 \text{ y } 5. \quad (3)$$

Donde  $g$  es la constante de gravedad, la relación (3) es válida para ondas largas lineales que se propagan en las regiones  $R_1, R_2, R_3$  y  $R_5$ . Como se observa en la ecuación (3), la superficie libre del oleaje es únicamente una función de la coordenada  $x$ .

La ecuación de gobierno que describe la variación de la superficie libre en la región  $R_2$  es la siguiente:

$$\frac{d}{dx} \left[ h(x) \frac{d\psi_2}{dx} \right] + \frac{\omega^2}{g} \psi_2 = 0, \quad \text{para } 0 \leq x \leq L \quad (4)$$

y para la región  $R_3$  es

$$\frac{d}{dx} \left[ d_2(x) \frac{d\psi_3}{dx} \right] + \frac{\omega^2}{g} \psi_3 = 0, \quad \text{para } -d_2(x) < z < 0 \text{ y } L \leq x \leq L_1. \quad (5)$$

Los potenciales de velocidad en las regiones  $R_1$  y  $R_5$  se escriben de la siguiente forma,

$$\psi_1 = -i \frac{gA_I}{\omega} \left[ e^{ik_1 x} + R e^{-ik_1 x} \right] \quad (6)$$

y

$$\psi_5 = -i \frac{gA_I}{\omega} T e^{ik_2(x-L_1)}. \quad (7)$$

Donde  $R = A_R/A_I$  y  $T = A_T/A_I$  son los coeficientes de reflexión y transmisión del oleaje, respectivamente. La amplitud del oleaje reflejado está descrito por  $A_R$ . La solución analítica de la región  $R_2$  se muestra a continuación.

### 2.3. Ecuaciones de gobierno para las regiones $R_2$ y $R_4$

Para la región  $R_2$  se incluye el cambio del fondo marino a través de la siguiente función definida por partes,

$$h(x) = \begin{cases} h_1 & \text{si } x = 0 \\ \left[ \frac{h_4-h_1}{L} \right] x + h_1 & \text{si } 0 \leq x \leq L \\ h_4 & \text{si } L \leq x \leq L_1. \end{cases} \quad (8)$$

De la relación anterior cuando  $x = 0$  se tiene un fondo constante  $h_1$ , para el caso de la región donde hay un cambio de variable  $h(x)$  incluye una pendiente constante. Sustituyendo (8) en (3) se obtiene la siguiente relación,

$$\frac{d}{dx} \left[ \left[ \left( \frac{h_4-h_1}{L} \right) x + h_1 \right] \frac{d\psi_2}{dx} \right] + \frac{\omega^2}{g} \psi_2 = 0, \quad \text{con } 0 \leq x \leq L. \quad (9)$$

La ecuación diferencial ordinaria, (9) describe el comportamiento hidrodinámico de la región  $R_2$  incluyendo el cambio en la batimetría del suelo marino.

Por otro lado para la región  $R_4$ , se asume que existen variaciones de la velocidad vertical como una consecuencia de las ondulaciones en las paredes del rompeolas. Tomando en cuenta

que el flujo es no viscoso, incompresible e irrotacional, en el presente trabajo se usa la teoría de flujo potencial. La ecuación de gobierno en el dominio de flujo de la región  $R_4$  es la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi_4(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_4(x, z, t)}{\partial z^2} = 0, \quad \text{con } R_4. \quad (10)$$

Para un flujo irrotacional y oleaje armónico, las componentes de velocidad del flujo pueden expresarse en términos de la siguiente función escalar

$$\phi_4(x, z, t) = \Re[\psi_4(x, z)e^{-i\omega t}]. \quad (11)$$

Incluyendo (11) en (10) el potencial de velocidad  $\psi_4$ , el cual es válido en el intervalo  $L \leq x \leq L_1$ , satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 \psi_4(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_4(x, z)}{\partial z^2} = 0, \quad \text{para } R_4, \quad -h_4 \leq z \leq -d_3. \quad (12)$$

Las condiciones de frontera en las paredes rígidas contenidas en la región  $R_4$  son las siguientes

$$\frac{\partial \psi_4}{\partial z} + \frac{\partial d_3(x)}{\partial x} \frac{\partial \psi_4}{\partial x} = 0, \quad \text{en } z = -d_3(x) \quad (13)$$

y

$$\frac{\partial \psi_4}{\partial z} = 0, \quad \text{en } z = -h_4. \quad (14)$$

En la relación (13), el segundo término del lado izquierdo de la igualdad representa el efecto de la ondulación de la superficie. Para un valor constante de  $d_3$  se obtiene la condición de frontera para una placa sumergida de superficie uniforme.

#### 2.4. Condiciones de frontera laterales

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (3), (6), (7) y (12), se requiere de condiciones de frontera de acoplamiento. Las condiciones de frontera de acoplamiento se deducen a partir de las ecuaciones de conservación de presión y masa en la interfaz entre regiones. El acoplamiento de las regiones  $R_1$  y  $R_2$  con  $x = 0$  se expresa como:

$$\frac{d\psi_1}{dx} = \frac{d\psi_2}{dx}. \quad (15)$$

Y para las regiones  $R_2, R_3$  y  $R_4$  en  $x = L$  se tiene

$$\int_{-h_4}^0 \frac{d\psi_2}{dx} dz = \int_{-h_2}^0 \frac{d\psi_3}{dx} dz + \int_{-h_4}^{-h_3} \frac{d\psi_4}{dx} dz, \quad (16)$$

de forma semejante, la conservación de masa en el acoplamiento de las regiones  $R_3, R_4$  y  $R_5$  en  $x = L_1$  se expresa de la siguiente manera

$$\int_{-h_4}^0 \frac{d\psi_5}{dx} dz = \int_{-h_2}^0 \frac{d\psi_3}{dx} dz + \int_{-h_4}^{-h_3} \frac{d\psi_4}{dx} dz. \quad (17)$$

Y de la continuidad de la presión, entre las regiones  $R_1$  y  $R_2$  es

$$\psi_1|_{x=0} = \psi_2|_{x=0}. \quad (18)$$

De manera similar a la condición de frontera (18), la continuidad de la presión entre las regiones  $R_2, R_3$  y  $R_4$  en  $x = L$ , resulta

$$\psi_2|_{x=L} = \psi_3|_{x=L} \quad (19)$$

y

$$\psi_2|_{x=L} = \psi_4|_{x=L}. \quad (20)$$

Siguiendo el mismo procedimiento de (20) la continuidad de la presión en las regiones  $R_3, R_4$  y  $R_5$  en  $x = L_1$  se obtiene

$$\psi_3|_{x=L_1} = \psi_5|_{x=L_1} \quad (21)$$

y

$$\psi_4|_{x=L_1} = \psi_5|_{x=L_1}. \quad (22)$$

En la siguiente sección se presenta la versión adimensional de las ecuaciones de gobierno con sus respectivas condiciones de frontera.

#### 2.5. Ecuaciones de gobierno adimensionales

Con la finalidad de disminuir el número de combinaciones posibles de las variables físicas involucradas, las ecuaciones de gobierno se presentan en forma adimensional. Para llevar a cabo lo anterior, se proponen las escalas características pertinentes. En las regiones  $R_1$  y  $R_5$ , las escalas espaciales en la dirección  $x$  es la longitud de onda  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , las cuales están relacionadas con los números de onda  $k_1 = 2\pi/\lambda_1$  y  $k_2 = 2\pi/\lambda_2$ . Para la región  $R_2$  la escala característica horizontal es la longitud  $L$ . Por otro lado la escala característica horizontal en las regiones  $R_3$  y  $R_4$  esta dada por  $L_1 - L$ , mientras que la correspondiente para la superficie libre del oleaje, es la amplitud del oleaje incidente  $A_I$ . Con base en lo anterior, las variables adimensionales están relacionadas y son obtenidas con los valores característicos del modelo.

$$\chi_1 = k_1 x, \quad \chi_4 = k_2 x, \quad \chi_2 = \frac{x}{L}, \quad \chi_3 = \frac{x-L}{L_1-L}, \quad (23)$$

$$Z_1 = \frac{z}{h_1}, \quad Z_3 = \frac{z}{h_2}, \quad Z_4 = \frac{z+h_3}{h_4-h_3}, \quad Z_5 = \frac{z}{h_4}$$

$$H(x) = \frac{h(x)}{h_1}, \quad \phi_j = \frac{\psi_j(x, z)}{\frac{gA_I}{\omega}} \quad \text{for } j = 1 - 5.$$

Los perfiles sinusoidales (1) y (2) en términos de las variables adimensionales se expresan de la siguiente forma:

$$D_2 = 1 - \varepsilon_2 \sin(\alpha \chi_3) \quad (24)$$

y

$$D_3 = \varepsilon_3 \sin(\alpha \chi_3). \quad (25)$$

Donde,

$$\varepsilon_2 = \frac{A_s}{h_2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{A_s}{h_4 - h_3} \quad \text{y} \quad \alpha = m\pi. \quad (26)$$

El término  $A_s$  corresponde a la amplitud de la ondulación de la superficie de la estructura rompeolas. Para llevar a cabo un análisis asintótico, se considera que el parámetro  $\varepsilon \ll 1$  y que

$\varepsilon_2 \sim O(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon_3 \sim O(\varepsilon)$ . El significado físico de  $\varepsilon \ll 1$  es considerar que la amplitud de la pared ondulada  $A_s$  es mucho más pequeña que la profundidad  $h_2$ , de manera similar la amplitud  $A_s$  es mucho más pequeña de la separación entre el bloque y el fondo marino.

## 2.6. Ecuación de gobierno adimensional para la región $R_2$

Introduciendo las variables adimensionales (23) en (9) y realizando el álgebra correspondiente se obtiene la siguiente relación

$$\kappa \frac{d^2 \phi_2}{d\chi_2^2} + \kappa \left[ \frac{(\gamma - 1)}{(\gamma - 1)\chi_2 + 1} \right] \frac{d\phi_2}{d\chi_2} + \frac{1}{[(\gamma - 1)\chi_2 + 1]} \phi_2 = 0, \quad (27)$$

donde el parámetro adimensional

$$\kappa = \frac{1}{k_1^2 L^2}. \quad (28)$$

Donde  $k_1$  es el número de onda y equivale a  $k_1 = 2\pi/\lambda_1$  donde  $\lambda_1$  es la longitud de onda, por otro lado el parámetro  $\gamma = h_4/h_1$ . El término (27) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, lineal y homogénea que corresponde a la ecuación de gobierno que describe la hidrodinámica de la región  $R_2$ .

## 2.7. Ecuación de gobierno adimensional para la región $R_3$

De manera similar para adimensionalizar la ecuación de gobierno de la región  $R_3$  se incluyen las variables adimensionales (23) en (5) donde se obtiene la ecuación diferencial de gobierno para la región  $R_3$  como sigue,

$$\frac{d}{d\chi_3} \left[ D_2 \frac{d\phi_3}{d\chi_3} \right] + \frac{\mu_2^2}{\Gamma_2} \phi_3 = 0. \quad (29)$$

Donde  $\Gamma_2 = h_2/h_4$  y  $\mu_2 = k_2(L_1 - L)$ , son parámetros adimensionales y  $k_2 = 2\pi/\lambda$  es el número de onda y  $\lambda$  equivale a la longitud de onda, el rango  $(L_1 - L)$  es dominio sobre el cual se encuentra la estructura rompeolas flotante.

## 2.8. Ecuación de gobierno adimensional para la región $R_4$

Siguiendo el procedimiento anterior, (23) se sustituye en los términos (12), (13) y (14) determinando la ecuación diferencial adimensional de la región  $R_4$  y sus respectivas condiciones de frontera

$$\left[ \frac{\Gamma_4 \varphi}{\mu_2} \right]^2 \frac{\partial^2 \phi_4}{\partial \chi_3^2} + \frac{\partial^2 \phi_4}{\partial Z_4^2} = 0 \quad \text{con} \quad -1 \leq Z_4 \leq D_3 \quad \text{y} \quad 0 \leq \chi_3 \leq 1. \quad (30)$$

Donde el parámetro  $\Gamma_4 = (h_4 - h_3)/h_4$  y  $\varphi = k_2 h_4$ . La ecuación diferencial (30) se debe resolver con las siguientes condiciones de frontera adimensionales:

$$\frac{\partial \phi_4}{\partial Z_4} - \left[ \frac{\Gamma_4 \varphi}{\mu_2} \right]^2 \frac{\partial D_3}{\partial \chi_3} \frac{\partial \phi_4}{\partial \chi_3} = 0 \quad \text{con} \quad Z_4 = D_3 \quad (31)$$

y

$$\frac{\partial \phi_4}{\partial Z_4} = 0 \quad \text{con} \quad Z_4 = -1. \quad (32)$$

Por otro lado tomando en cuenta las variables adimensionales (23) en (6) y (7), se obtienen las soluciones analíticas que modelan la propagación del oleaje en las regiones  $R_1$  y  $R_5$ , las cuales están dadas por los siguientes términos, para la región  $R_1$

$$\phi_1 = -i[e^{i\chi_1} + Re^{-i\chi_1}] \quad (33)$$

y para la región  $R_2$  se tiene

$$\phi_5 = -iT e^{i(\chi_4 - \mu_4)}. \quad (34)$$

Respectivamente, donde  $\mu_4 = k_2 L_1$ .

## 2.9. Condiciones de frontera de conservación de masa

La versión adimensional de las condiciones de frontera de conservación de masa (16) y (17), están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$\int_{-1}^0 \frac{d\phi_2}{d\chi_2} \big|_{\chi_2=1} dZ_5 = \frac{\Gamma_2 \mu_3}{\mu_2} \int_{-1}^0 \frac{\partial \phi_3}{\partial \chi_3} \big|_{\chi_3=0} dZ_3 + \frac{\Gamma_4 \mu_3}{\mu_2} \int_{-1}^0 \frac{d\phi_4}{d\chi_3} \big|_{\chi_3=0} dZ_4 \quad (35)$$

y

$$\int_{-1}^0 \frac{d\phi_5}{d\chi_2} \big|_{\chi_4=k_2 L_1} dZ_5 = \frac{\Gamma_2}{\mu_2} \int_{-1}^0 \frac{\partial \phi_3}{\partial \chi_3} \big|_{\chi_3=1} dZ_3 + \frac{\Gamma_4}{\mu_2} \int_{-1}^0 \frac{d\phi_4}{d\chi_3} \big|_{\chi_3=1} dZ_4. \quad (36)$$

## 2.10. Condiciones de frontera de continuidad de presiones

Las condiciones de frontera de la continuidad de presiones (15), (18), (19), (20), (21) y (22), se expresan en la forma siguiente:

$$\frac{d\phi_1}{d\chi_1}(0) = \frac{1}{\mu} \frac{d\phi_2}{d\chi_2}(0), \quad \phi_1(0) = \phi_2(0), \quad (37)$$

$$\phi_2(1) = \phi_3(0), \quad \phi_2(1) = \phi_4(0) \quad (38)$$

y

$$\phi_3(1) = \phi_5(k_2 L_1), \quad \phi_4(1) = \phi_5(k_2 L_1). \quad (39)$$

Donde  $\mu = k_1 L$ .

## 2.11. Metodología de solución

A continuación se presentan las diferentes metodologías analíticas para obtener las soluciones de las ecuaciones de gobierno de las regiones  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_4$ . Para resolver la ecuación diferencial de la región  $R_2$  se usa el método asintótico conocido en la literatura especializada como WKB, esto debido a la forma que tiene la ecuación diferencial donde una de las principales características es que la derivada de mayor orden de la ecuación diferencial multiplique un parámetro de orden menor que la unidad.

### 2.12. Solución analítica aproximada

En este trabajo se busca una solución para el potencial de velocidades  $\phi_j$ , para  $j = 1, 2, 3, 4, 5$  y para el coeficiente de reflexión  $R$  y el coeficiente de transmisión  $T$  las expansiones se llevan a cabo como sigue

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2, \quad (40)$$

$$R = R_0 + \varepsilon R_1 + \varepsilon^2 R_2 \quad (41)$$

y

$$T = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2. \quad (42)$$

Las correcciones  $R_1, R_2, T_1$  y  $T_2$  se determinan de forma escalonada obteniendo la primera aproximación  $R_0$  y  $T_0$ .

### 2.13. Soluciones asintóticas para las regiones $R_1$ y $R_5$

Sustituyendo (41) y (42) en los potenciales de la región  $R_1$  y  $R_5$ , (33) y (34) respectivamente, se obtienen las siguientes ecuaciones:

Para el orden  $O(\varepsilon^0)$

$$\phi_{1,0} = -i[e^{i\chi_1} + R_0 e^{-i\chi_1}] \quad (43)$$

y

$$\phi_{5,0} = -iT_0 e^{i(\chi_4 - \mu_4)}. \quad (44)$$

Para el orden  $O(\varepsilon^1)$

$$\phi_{1,1} = -iR_1 e^{-i\chi_1} \quad (45)$$

y

$$\phi_{5,1} = -iT_1 e^{i(\chi_4 - \mu_4)}. \quad (46)$$

Para el orden  $O(\varepsilon^2)$

$$\phi_{1,2} = -iR_2 e^{-i\chi_1} \quad (47)$$

y

$$\phi_{5,2} = -iT_2 e^{-i(\chi_4 - \mu_4)}. \quad (48)$$

Las constantes  $R_0, T_0, R_1, T_1, R_2$  y  $T_2$  se obtienen implementando las condiciones de frontera de acoplamiento definidas por (35)-(39).

### 2.14. Solución asintótica para la región $R_2$ usando el Método WKB

Una ecuación diferencial perturbada singularmente es aquella en la que un pequeño parámetro multiplica el término de la derivada de mayor orden. Esto a menudo conduce a una solución que cambia muy rápidamente en regiones muy estrechas del dominio, lo que hace que la solución sea muy inestable y difícil de calcular numéricamente. El método de Tikhonov sirve para estabilizar la solución de este tipo de problemas, Tikhonov (1963). Otra forma de obtener la solución de la ecuaciones diferenciales es mediante el método de perturbación WKB (Wenzel, Kramers y Brillouin) donde la solución aproximada (27) se determina en el límite asintótico  $\kappa \ll 1$ . La técnica WKB puede aplicarse cuando la ecuación diferencial que describe el fenómeno en estudio es lineal y la derivada de orden superior está multiplicada por el parámetro  $\kappa$ . Cabe precisar que para

usar esta técnica, no importa si la ecuación diferencial está expresada en variables físicas o en forma adimensional. Desde el punto de vista físico, el parámetro  $\kappa$  establece que los efectos gravitatorios son dominados por los efectos cinemáticos. Para aplicar la técnica de perturbación WKB, (27) se transforma a su forma canónica, usando la transformación de Liouville, presentada por (Milson, 1998) y se obtiene su solución analítica como sigue:

$$\phi_2(\chi_2) = \frac{1}{(\chi_2(1-\gamma)-1)^{1/4}} \left[ c e^{i \frac{F(\chi_2)}{\sqrt{\kappa}}} + d e^{-i \frac{F(\chi_2)}{\sqrt{\kappa}}} \right]. \quad (49)$$

Donde  $F(\chi_2)$  se calcula a partir de la siguiente relación

$$F(\chi_2) = \int \frac{1}{\sqrt{(\gamma-1)\chi_2+1}} d\chi_2. \quad (50)$$

Para obtener los ordenes de la solución de la region  $R_2$ , se obtiene sustituyendo (40) en (49) como sigue:

$$\phi_{2,0}(\chi_2) = \frac{1}{(\chi_2(1-\gamma)-1)^{1/4}} \left[ c_0 e^{i \frac{F(\chi_2)}{\sqrt{\kappa}}} + d_0 e^{-i \frac{F(\chi_2)}{\sqrt{\kappa}}} \right], \quad (51)$$

$$\phi_{2,1}(\chi_2) = \frac{1}{(\chi_2(1-\gamma)-1)^{1/4}} \left[ c_1 e^{i \frac{F_1(\chi_2)}{\sqrt{\kappa}}} + d_1 e^{-i \frac{F_1(\chi_2)}{\sqrt{\kappa}}} \right] \quad (52)$$

y

$$\phi_{2,2}(\chi_2) = \frac{1}{(\chi_2(1-\gamma)-1)^{1/4}} \left[ c_2 e^{i \frac{F_2(\chi_2)}{\sqrt{\kappa}}} + d_2 e^{-i \frac{F_2(\chi_2)}{\sqrt{\kappa}}} \right]. \quad (53)$$

### 2.15. Solución asintótica para la region $R_3$

Sustituyendo (40) en (29) y ordenando algebraicamente los terminos obtenemos las siguientes relaciones,

para el orden  $\varepsilon^0$

$$\frac{d^2 \phi_{3,0}}{d\chi_3^2} + \frac{\mu_2^2}{\Gamma_2} \phi_{3,0} = 0. \quad (54)$$

Para el orden  $\varepsilon^1$

$$\frac{d^2 \phi_{3,1}}{d\chi_3^2} + \frac{\mu_2^2}{\Gamma_2} \phi_{3,1} = \frac{d}{d\chi_3} \left[ \sin \theta \frac{d\phi_{3,0}}{d\chi_3} \right] \quad (55)$$

y para el orden  $\varepsilon^2$

$$\frac{d^2 \phi_{3,2}}{d\chi_3^2} + \frac{\mu_2^2}{\Gamma_2} \phi_{3,2} = \frac{d}{d\chi_3} \left[ \sin \theta \frac{d\phi_{3,1}}{d\chi_3} \right]. \quad (56)$$

## 2.16. Solución asintótica para la región $R_4$

Una de las complicaciones para obtener la solución asintótica del problema que se estudia, es que las condiciones de frontera son uniformes, debido a que las paredes de los rompeolas tienen un perfil sinusoidal. Para resolver esta condición, se propone una linealización de las condiciones de frontera, la cual se hace mediante la aplicación del método de perturbación del dominio. La idea básica de este método es reemplazar las condiciones de frontera (31) y (32) con una condición de frontera aproximada que es asintóticamente equivalente para  $\varepsilon \ll 1$ , pero ahora aplicada en las superficies de las coordenadas  $Z_4 = 0$  y  $Z_4 = -1$ . El método de perturbación del dominio conduce a una expansión regular en el parámetro  $\varepsilon \ll 1$ . Para llevar a cabo lo anterior, primero se utiliza una aproximación en series de Taylor para  $\phi_4$  obteniéndose las siguientes ecuaciones:

$$\phi_4|_{Z_3=-D_3} = \phi_2|_{Z_4=0} + \varepsilon c(\chi) \frac{\partial \phi_4}{\partial Z_3} \Big|_{Z_4=-1} + \frac{\varepsilon^2 c^2(\chi)}{2} \frac{\partial^2 \phi_4}{\partial Z_4^2} \Big|_{Z_4=-1} + O(\varepsilon^3). \quad (57)$$

Sustituyendo (57) en (31) y (32) y agrupando las ecuaciones con sus respectivos ordenes, resultan las siguientes expresiones matemáticas.

Para el orden  $\varepsilon^0$  se tiene,

$$\left[ \frac{\Gamma_4 \varphi}{\mu_2} \right]^2 \frac{\partial^2 \phi_{4,0}}{\partial \chi_3^2} + \frac{\partial^2 \phi_{4,0}}{\partial Z_4^2} = 0 \quad -1 < Z_4 < 0 \quad 0 \leq \chi_3 \leq 1, \quad (58)$$

$$\frac{\phi_{4,0}}{\partial Z_4} = 0 \quad \text{en} \quad Z_4 = 0 \quad (59)$$

y

$$\frac{\phi_{4,0}}{\partial Z_4} = 0 \quad \text{en} \quad Z_4 = -1. \quad (60)$$

Para el orden  $\varepsilon^1$  se tiene

$$\left[ \frac{\Gamma_4 \varphi}{\mu_2} \right]^2 \frac{\partial^2 \phi_{4,1}}{\partial \chi_3^2} + \frac{\partial^2 \phi_{4,1}}{\partial Z_4^2} = 0 \quad -1 < Z_4 < 0 \quad 0 \leq \chi_3 \leq 1, \quad (61)$$

$$\frac{\partial \phi_{4,1}}{\partial Z_4} + \sin \theta \frac{\partial^2 \phi_{4,0}}{\partial Z_4^2} - \left[ \frac{\Gamma_4 \varphi}{\mu_2} \right]^2 \frac{\partial \sin \theta}{\partial \chi_3} \frac{\partial \phi_{4,0}}{\partial \chi_3} = 0 \quad \text{en} \quad z_4 = 0 \quad (62)$$

y

$$\frac{\partial \phi_{4,1}}{\partial Z_4} = 0 \quad \text{en} \quad Z_4 = -1. \quad (63)$$

Por ultimo para el orden  $\varepsilon^2$  resultaron las siguientes relaciones,

$$\left[ \frac{\Gamma_4 \varphi}{\mu_2} \right]^2 \frac{\partial^2 \phi_{4,2}}{\partial \chi_3^2} + \frac{\partial^2 \phi_{4,2}}{\partial Z_4^2} = 0 \quad -1 < Z_4 < 0 \quad 0 \leq \chi_3 \leq 1, \quad (64)$$

$$\frac{\partial \phi_{4,2}}{\partial Z_4} + \sin \theta \frac{\partial^2 \phi_{4,1}}{\partial Z_4^2} + \frac{\sin^2 \theta}{2} \frac{\partial^3 \phi_{4,0}}{\partial Z_4^3} - \left[ \frac{\Gamma_4 \varphi}{\mu_2} \right]^2 \frac{\partial \sin \theta}{\partial \chi_3} \frac{\partial \phi_{4,1}}{\partial \chi_3}$$

$$- \left[ \frac{\Gamma_4 \varphi}{\mu_2} \right]^2 \frac{\partial \sin \theta}{\partial \chi_3} \frac{\partial}{\partial \chi_3} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi_{4,0}}{\partial Z_4} \right) = 0 \quad \text{en} \quad Z_4 = 0 \quad (65)$$

y

$$\frac{\partial^2 \phi_{4,2}}{\partial Z_4^2} = 0 \quad \text{en} \quad Z_4 = -1. \quad (66)$$

Para la aproximación de ondas largas, la solución analítica (58)-(60), para el problema del orden  $O(\varepsilon^0)$ , la cual se obtiene usando el método de separación de variables, está dada como sigue

$$\phi_{4,0} = S_{40} \chi_3 + J_{40}. \quad (67)$$

Donde  $S_{40}$  y  $J_{40}$  son constantes desconocidas que se obtienen con las condiciones de frontera de acoplamiento horizontal. Como puede verse en (67), éstas tienen un comportamiento lineal y no dependen del eje vertical  $Z$ .

La aproximación para el problema del orden  $O(\varepsilon^1)$ , se obtiene sustituyendo (67) en (62) transformandose en la siguiente ecuación

$$\frac{\partial \phi_{4,1}}{\partial Z_4} = S_{40} \left[ \frac{\Gamma_4 \varphi}{\mu_2} \right]^2 \frac{\partial \sin \theta}{\partial \chi_3} \quad \text{en} \quad z_4 = 0. \quad (68)$$

Resolviendo (68) se obtiene la solución de  $\phi_{4,1}$ . Tomando en cuenta los valores de  $\phi_{4,0}$  y  $\phi_{4,1}$  y sustituyendo las soluciones en (64), (65) y (66) se obtiene el valor de  $\phi_{4,2}$ . Una vez calculando los diferentes ordenes del potencial de velocidad  $\phi_j$  desde  $j = 1, 2, 3, 4$  y 5, los ordenes de  $R_j = 1, 2, 3, 4$  y 5 con sus respectivas condiciones de fronteras, se obtendrá el potencial de velocidad  $\phi$  y el coeficiente de reflexión  $R$  partiendo de un sistema simultáneo de ecuaciones algebraicas, lo anterior se logró implementando técnicas de programación computacional.

## 3. Resultados

A continuación se analizan los efectos que tienen los distintos parámetros físicos adimensionales en la reflexión de la energía del oleaje, generada por su interacción con un rompeolas flotante de superficies onduladas incluyendo el efecto de una batimetría con pendiente constante. Primeramente, se presenta la comparación de los resultados del presente modelo matemático contra los obtenidos por Patarapanich (1984). Posteriormente, se muestran resultados de los efectos de las diferentes condiciones de oleaje, longitud de la estructura, sumergimiento, número y amplitud de las ondulaciones incluyendo el efecto de una superficie del fondo marino no uniforme, está última es una de la aportaciones ingenieriles del presente trabajo.

### 3.1. Comparación del presente modelo matemático con resultados analíticos de Patarapanich (1984)

En la Tabla 1 se presentan los valores físicos del oleaje y de la geometría del rompeolas utilizados para el cálculo de los parámetros adimensionales del modelo matemático propuesto:

Tabla 1: Valores físicos del oleaje y rompeolas

Profundidad en R1	$(h_1)$	20m
Profundidad (Posición del rompeolas)	$(h_2)$	10m
Profundidad (Posición del rompeolas)	$(h_3)$	11m
Profundidad en R5	$(h_4)$	15m
Longitud horizontal de la pendiente	$(L)$	3500m
Aceleración de la gravedad	$(g)$	9.81m/s <sup>2</sup>
Número de ondulaciones del rompeolas	$(m)$	8
Longitud de onda	$(\lambda)$	500m
Longitud de onda	$(\lambda_1)$	703.7m

La solución del presente modelo matemático se comparó con los resultados reportados por Patarapanich (1984). Patarapanich analizó la reflexión del oleaje generada por la interacción de ondas largas lineales con una placa lisa horizontal muy delgada y sumergida. Para el presente modelo matemático el valor del parámetro de perturbación que permite recobrar el problema de una placa lisa sumergida, implica que  $\varepsilon = 0$ , lo cual físicamente significa que no existen ondulaciones y  $h_3$  se aproxima a  $h_2$ , y para un fondo constante la profundidad  $h_4$  tiende a  $h_1$ .

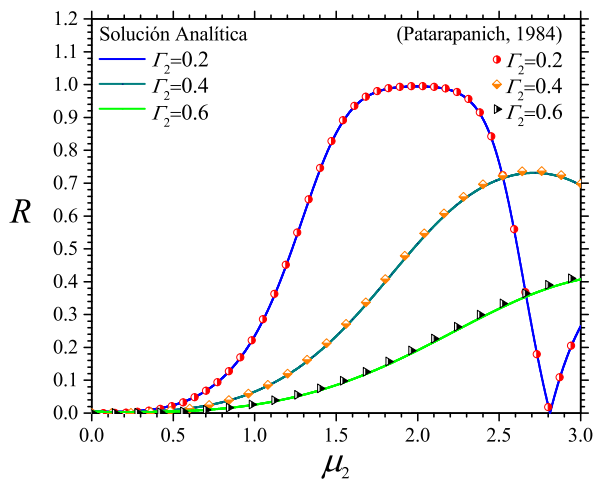


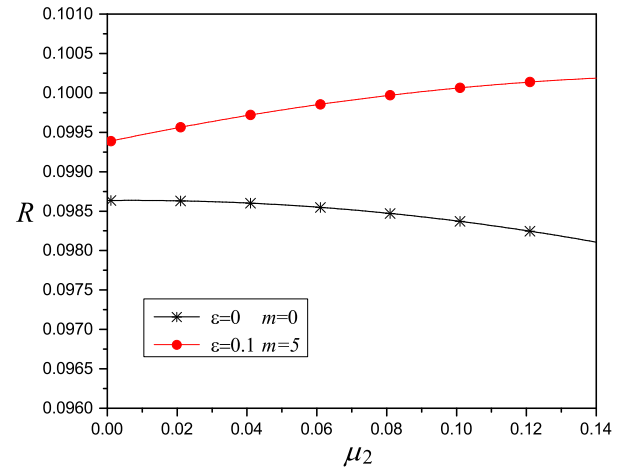
Figura 2: Comparación de la solución del modelo matemático con respecto a Patarapanich (1984).

En la Figura 2 se muestra la aproximación de la solución del modelo matemático propuesto con respecto al estudio de (Patarapanich, 1984) y en donde se puede identificar que ambas soluciones tienen una buena aproximación. Por otro lado en la misma figura se muestra el efecto que tiene el parámetro de posición  $\Gamma_2 = h_2/h_1$ , se observa que conforme decrece el parámetro  $\Gamma_2$  la energía reflejada aumenta, esto quiere decir que se presenta una mayor reflexión conforme la estructura se acerca a la superficie libre.

### 3.2. Comparación de estructuras de superficie lisa y superficies onduladas incluyendo el cambio batimétrico

En las Figura 3 se presenta la comparación de dos casos. Caso 1 : Un rompeolas de superficie lisa donde  $\varepsilon = 0$  y  $m = 0$

incluyendo un fondo marino variable y Caso 2 : Un rompeolas de superficie ondulada con  $\varepsilon = 0.1$  y  $m = 5$  incluyendo un fondo marino de superficie variable.

Figura 3: Comparación de los coeficientes de reflexión  $R$  de un rompeolas liso y un rompeolas ondulado.

En la Figura 3 se muestra que para una batimetría con pendiente constante cuando  $\mu \rightarrow 0$  el coeficiente de reflexión para un rompeolas de superficie lisa es  $R = 0.0987$  y para un rompeolas de superficie ondulada  $R = 0.0994$ , lo cual quiere decir que se presenta una mayor reflexión cuando el rompeolas tiene una superficie ondulada. En la misma grafica se aprecia que cuando  $\mu \rightarrow 0.14$  el coeficiente de reflexión aumenta para una superficie ondulada, por otro lado para una estructura de superficie lisa el coeficiente de reflexión decrece.

## 4. Discusión y Conclusiones

Con base en la teoría lineal de ondas largas, se analizó la interacción del oleaje con una estructura sumergida de superficie ondulada incluyendo el efecto de un fondo marino variable, misma que es una aportación del presente trabajo. Para la superficie ondulada el cambio obedece a una distribución sinusoidal. La solución del modelo matemático se comparó con las soluciones analíticas de Patarapanich (1984), mostrando una buena aproximación.

Las conclusiones principales se pueden resumir en la forma siguiente:

- Cuando aumenta en magnitud el parámetro de perturbación  $\varepsilon$ , se puede observar que los coeficientes de reflexión crecen de manera importante. Esto físicamente indica que habrá más oleaje reflejado, en caso de una zona portuaria, ayudaría a disipar los efectos del oleaje sobre las estructuras en el puerto. Por otro lado para estructuras flotantes con dispositivos integrados de conversión de energía el cambio geométrico de la superficie de la estructura podría aumentar su eficiencia energética.
- Se aprecia en la soluciones que antes que interactue el oleaje con la estructura, el oleaje ya presenta una refle-



xión del orden de  $R = 0.1$ , esto se debe al cambio del fondo marino. En esta condición cuando el oleaje se propaga sobre la pendiente constante sus propiedades cinemáticas cambian aumentando la energía potencial del oleaje que podrá ser captado por el convertidor de energía.

- En los resultados se observa que el número de ondulaciones presenta un efecto muy importante en la reflexión del oleaje, cuando el parámetro  $m$  crece el coeficiente de reflexión  $R$  va en aumento, esto quiere decir que para tener una mayor reflexión es necesario aumentar el número de ondulaciones condiciones que pueden ser aprovechadas para aumentar la eficiencia energética en las estructuras convertidoras de energía.

El modelo matemático que se propone en este trabajo puede usarse como una referencia práctica para identificar, como primera aproximación, las características geométricas que debe presentar el rompeolas para una mayor cantidad de energía reflejada tomando en cuenta el efecto de cambio geométrico del fondo marino.

## Agradecimientos

El desarrollo del presente trabajo ha sido posible gracias al valioso apoyo de la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI). Agradecemos profundamente su respaldo, el cual demuestra su compromiso con el fomento de la ciencia y la innovación.

## Referencias

- Bautista, E., Bahena, S., Quesada, A., Mendez, F., y Arcos, E. (2022). Interaction between long water waves and two fixed submerged breakwaters of wavy surfaces. *J. Wave motion*.
- Bragg, W. y Bragg, W. (1913). Physical and engineering sciences. *Proceedings of the Royal Society A, Mathematical*.
- Cheong, H. F. y Patarapanich, M. (1992). Reflection and transmission of random waves by a horizontal double-plate breakwater. *J. Coastal Engineering*.
- Drimer, N., Agnon, Y., y Stiassnie, M. (1992). A simplified analytical model for a floating breakwater in water of finite depth. *Appl. Ocean Res.*
- During, W. y Shiau, J. (1956). Wave induced pressures on submerged plates. *J. Waterw. Harb. Coast. Eng.*
- Kanoria, M. (1999). Water wave scattering by a submerged thick wall with a gap. *Appl Ocean Res.*
- Koraim, A. S. (2013). Hydrodynamic efficiency of suspended horizontal rows of half pipes used as a new type breakwater. *J. Ocean Eng.*
- Medina-Rodríguez, A., Bautista, E., y Méndez, F. (2016). Asymptotic analysis of the interaction between linear longwaves and a submerged floating breakwater of wavy surface. *Applied Ocean Res.*
- Mei, C. y Black, J. (1969). Scattering of surface waves by rectangular obstacles in waters of finite depth. *J. Fluid Mech.*
- Mei, C., Stiassnie, M., y Yue, D. (2005). *Theory and applications of ocean surface waves: Part 1: Linear aspects*. World Scientific, Singapore.
- Milson, R. (1998). Liouville transformation and exactly solvable schrodinger equations. *J. Theory Physical*.
- Newman, J. (1965). Propagation of water waves past long two dimensional obstacles. *J. Fluid Mech.*
- Patarapanich, M. (1984). Maximum and zero reflection from submerged plate. *J. waterway, port, coastal and ocean eng.*
- Stoker, J. (1957). *Water waves Wave induced pressures on submerged plates*. John Wiley Sons.
- Tikhonov, A. N. (1963). *O reshenii nekorrektno postavlennykh zadach i metode regularizatsii*. Doklady Akademii.
- Wiegel, R. L. (1964). *Oceanographical engineering*. Dover Publications Inc.
- Yueh, C. Y., Chuang, S., y Wen, C. C. (2018). Bragg reflection of water waves due to submerged wavy plate breakwater. *Journal of Hydro-environment Research*.
- Yueh, C. Y., Chuang, S. H., y Wen, C. C. (2016). Wave scattering by submerged composite wavy plate breakwaters using a dual bem. *J. Ocean Eng.*