

Diseño e Implementación de un Controlador PI y un Controlador por Retroalimentación de Estado para un Sistema de Nivel

Design and Implementation of a PI Controller and a State Feedback Controller for a Level Control System

I. Ortega-Martínez,^a E. Hernández-Rodríguez,^a P. Acosta-Campos,^a O. Sandre-Hernández,^a L. Rodríguez-Guerrero,^a

^a Área Académica de Computación y Electrónica, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Pachuca, Hidalgo, México.

Resumen

Este trabajo presenta el diseño e implementación de dos estrategias de control discretas aplicadas para regular el nivel de agua en un sistema de tanques interconectados utilizando el modelo EduKit PA de Festo Didactic. La primera estrategia es un controlador Proporcional-Integral (PI) discretizado, mientras que la segunda es un control moderno basado en retroalimentación de estado con integrador. El nivel fue monitoreado en tiempo real mediante un sensor de presión diferencial MPX5010, empleando una tarjeta de adquisición de datos NI USB-6008 para comunicación con algoritmos desarrollados en LabVIEW. La comparación del desempeño de ambos controladores se realizó usando el tiempo pico (t_p), el máximo valor de la curva de respuesta ($c(t_p)$), el cálculo del porcentaje de sobreelongación máxima (M_p) y el índice Integral del Error Absoluto (IAE), mostrando resultados satisfactorios en seguimiento de referencia y estabilidad, para el controlador por retroalimentación de estado.

Palabras Clave: PI discretizado, control por retroalimentación de estado, control integral, nivel, LabVIEW.

Abstract

This work presents the design and implementation of two discrete control strategies applied to regulate the water level in an interconnected tank system using the EduKit PA model from Festo Didactic. The first strategy is a discretized Proportional-Integral (PI) controller, while the second is a modern integrator state feedback based control. The level was monitored in real time by an MPX5010 differential pressure sensor, using a NI USB-6008 data acquisition card for communication with LabVIEW developed algorithms. The performance comparison between both controllers was conducted using peak time (t_p), maximum value of the response curve ($c(t_p)$), calculation of maximum overshoot percentage (M_p), and the Integral Absolute Error (IAE) index, showing satisfactory results in reference tracking and stability for the state feedback controller.

Keywords: discretized PI, state feedback control, integral control, level, LabVIEW.

1. Introducción

En la actualidad existen una gran variedad de procesos de fabricación que requieren del control de nivel de algún líquido o sustancia para mantener la continuidad del proceso. Esto permite asegurar la precisión, minimizar el desperdicio de materias primas, reducir tiempos de producción y mantener los estándares de calidad y eficiencia exigidos. Ejemplos de ellos son el tratamiento de agua, la producción láctea, la industria petroquímica, y diversos procesos químicos. Esto resalta la

importancia de tener un funcionamiento óptimo y un control adecuado de nivel en estos sistemas. Por ello, resulta importante automatizar estos procesos, ya que esto permite lograr un control efectivo. Para conseguirlo es necesario integrar aspectos tanto electrónicos como mecánicos en los procesos, lo cual implica la interacción de varias disciplinas (Gutiérrez, 2010).

Sin embargo, todo proceso industrial presenta limitaciones en cuanto a la precisión requerida. Por ello, el control automático es una herramienta esencial, ya que permite

*Autor para la correspondencia: lilium_rodriguez@uaeh.edu.mx

Correo electrónico: or306529@uaeh.edu.mx (Isaac Ortega-Martínez), he305321@uaeh.edu.mx (Enrique Hernández-Rodríguez), ac502285@uaeh.edu.mx (Pamela Acosta Campos), omar_sandre@uaeh.edu.mx (Omar Sandre-Hernández), lilium_rodriguez@uaeh.edu.mx (Lilium Rodríguez-Guerrero).

conocer la dinámica de los sistemas y diseñar estrategias de control que mantengan al proceso dentro de una referencia establecida.

En (Bermeo Varon, Alvarez, & Mantilla Arenas, 2021) destaca la importancia de aplicar el control PID, ya que esta estrategia permite mantener la variable del proceso dentro de un valor establecido y es capaz de responder de forma eficiente ante perturbaciones, aunque omiten una metodología para su sintonización.

Por ejemplo, en (Castillo Amado, 2023) muestra una estructura de tanques donde se implementa el control PI discreto, cuyo objetivo es establecer un sistema de control capaz de seguir la referencia. Esta implementación se hace por medio de una tarjeta híbrida que permite la comunicación tanto analógica como digital, diseñada para aplicaciones de medición y control de procesos industriales, pero no describe cómo implementarlo de manera digital.

En (García Jaimes & Giraldo, 2015) describen que aplicar un control por retroalimentación de estado es una herramienta que permite influir directamente en el comportamiento dinámico del sistema, ya que la posición de los polos determina la respuesta que tendrá, logrando así estabilidad y un desempeño deseado, sin embargo, no se proporciona un algoritmo numérico que permita obtener los parámetros de la función de transferencia que modela matemáticamente el sistema.

De igual manera, (Martínez, Cortes, & Moreno, 2016) detallan el proceso para implementar un controlador por retroalimentación de estado en un sistema hidráulico, utilizando una tarjeta de adquisición de datos para obtener las señales de entrada y salida de la servoválvula que controla al sistema. Esto permite obtener un modelo matemático que puede ser implementado en simulaciones para seguimiento de referencia, sin embargo, este controlador no se verifica en tiempo real.

Con la creciente complejidad en los procesos industriales, es necesario implementar diversas estrategias de control para mejorar eficiencia y mantener los procesos dentro los valores de referencia establecidos, lo cual contribuye a tener una mejor calidad en los productos. Entre las técnicas más utilizadas se tiene el control PI y el control por retroalimentación de estado, ya que estos algoritmos son fáciles de implementar por su bajo costo computacional, lo cual permite que sean utilizados ampliamente en la industria (Ogata, 2010).

El objetivo de este trabajo consiste en desarrollar e implementar un controlador PI y otro por retroalimentación de estado, para un sistema de nivel. Se detalla la metodología utilizada en ambos controladores con el propósito de analizar y comparar cual tiene un mejor seguimiento de referencia en tiempo real.

Para la implementación del controlador PI, se identificaron los parámetros empleando una función de transferencia de primer orden a partir de la respuesta escalón. Luego se aplicó el método Ziegler-Nichols para la sintonización inicial de sus ganancias K_p y K_i , posteriormente se fueron ajustando de manera heurística para que el sistema obtuviera un mejor desempeño en el seguimiento de referencia.

En la implementación del controlador por retroalimentación de estado se identificó la dinámica del sistema mediante la técnica de los mínimos cuadrados utilizando una función de transferencia de segundo orden. Posteriormente se analizó la

controlabilidad para poder realizar la asignación de polos conforme a la dinámica intrínseca que presentaba el sistema, y así obtener el mejor desempeño y respuesta en el seguimiento de referencia.

Ambas estrategias de control se desarrollaron e implementaron utilizando el software LabVIEW, con una tarjeta de adquisición de datos NI USB 6008 DAQ OEM. Se monitoreó el proceso en tiempo real para recabar datos. Finalmente, con los datos obtenidos en el software MATLAB se analizó el t_p , $c(t_p)$, M_p y el IAE, para saber cuál de estas estrategias de control resulta más conveniente para su aplicación en el sistema estudiado.

2. Plataforma experimental

La plataforma experimental empleada es un sistema EduKit PA que se muestra en la Figura 1. Se realizaron las conexiones eléctricas necesarias para garantizar la comunicación entre los elementos del lazo de control. El sistema está constituido por dos tanques de acrílico, un sistema de tuberías y válvulas que permiten regular el flujo del agua, un sistema de arranque y paro, un kit de regulación de velocidad de la bomba, un sensor de presión MPX5010 y la tarjeta de adquisición de datos NI USB 6008 DAQ OEM. Esto permite el envío y la recepción de señales entre los sensores y actuadores.

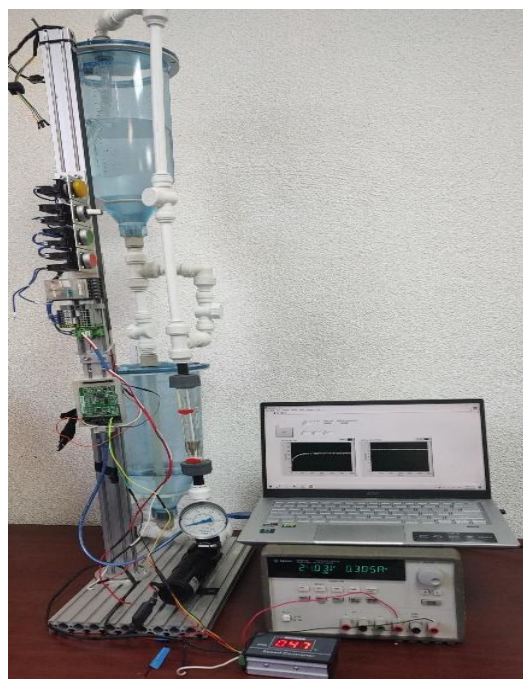


Figura 1: EduKit PA de Festo

En la Figura 2 se presenta el diagrama del sistema y se detallan los componentes electrónicos utilizados. Se utiliza un sensor de presión diferencial MPX5010 piezoeléctrico resistivo, que genera una señal analógica proporcional a la presión aplicada. Este sensor opera con un voltaje de alimentación de 4.75 – 5.25 VDC y una corriente de 7 – 10 mA, con resolución de 500 mV/kPa, un rango de medición entre 0 y 10 kPa y tiempo de respuesta de 1 ms.

Para estimar el nivel del tanque, primero se obtiene la ecuación característica del sensor MPX5010 descrita en la hoja de datos

$$V_{out} = V_s * (0.09 * P + 0.04),$$

donde V_{out} es el voltaje de salida, V_s es el voltaje de alimentación del sensor y P es la presión hidrostática.

Se despeja P de la ecuación (1), obteniendo:

$$P = \frac{V_{out} - 0.04}{0.09}. \quad (2)$$

Posteriormente, se sabe que la presión que ejerce el agua sobre una superficie es (Serway, 2014):

$$P = \rho * g * h, \quad (3)$$

donde P es la presión hidrostática, g es la gravedad, ρ es la densidad del agua y h es la altura.

Se sabe que la densidad del agua es: $\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$ y, que la gravedad es: $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$ (Serway, 2014). Estos valores se sustituyen en la ecuación (3), obteniendo:

$$P = 9810 * h. \quad (4)$$

La ecuación (4) da P en pascales, sin embargo, el sensor mide la presión en kilopascales, y la altura debe estar en centímetros, se realiza la conversión y se obtiene:

$$P = 0.0981 * h. \quad (5)$$

Se sustituye la ecuación (5) en (2), obteniendo:

$$0.0981 * h = \frac{V_{out} - 0.04}{0.09}. \quad (6)$$

Finalmente se despeja h y se tiene:

$$h = \frac{V_{out}}{0.044125} - 4.5278. \quad (7)$$

La bomba SPX (24 V, 15 kPa, 22.5 L/min) es el actuador en el sistema, en la Figura 2, está identificada por P101, su presión es de 15 kPa y, tiene un flujo de 22.5 litros por minuto, con una potencia de 26W.

El control de velocidad se realiza mediante modulación por ancho de pulso (PWM), en la Figura 2 es el controlador BF2. Este controlador muestra digitalmente la velocidad real en porcentaje en una pantalla LED. Posee un rango de entrada de 6–60 V, salida de voltaje lineal con carga, rango de velocidad de 0–100 %, y una frecuencia de control de 15 kHz.

La tarjeta NI USB 6008 DAQ OEM se usa para la adquisición de datos y el control, opera con alimentación de 5 VDC y sus pines admiten señales analógicas y digitales, tanto de entrada como de salida.

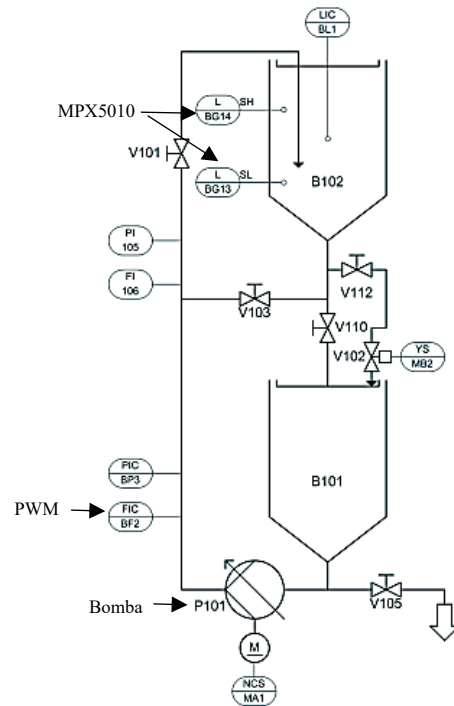


Figura 2. Diagrama de flujo de tuberías e instrumentos, EduKit PA Advanced, montaje completo

3. Modelado y diseño de controladores

3.1 Controlador PI discretizado

El sistema se representa inicialmente por una función de transferencia de primer orden con retardo:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts + 1}, \quad (8)$$

donde $Y(s)$ es la salida del sistema, $U(s)$ es la entrada conocida al sistema, K es la ganancia estática, T es la constante de tiempo y L el retardo.

La Figura 3 muestra la respuesta del sistema al aplicar una señal de entrada tipo escalón. De acuerdo con (Visioli, 2006), el retardo L , la ganancia estática K y la constante de tiempo del sistema T se obtienen de forma experimental utilizando el método de Ziegler-Nichols. Los resultados que se obtuvieron fueron los siguientes: $L = 3.25$, $K = 3.385$, $T = 3.078$, los cuales se sustituyeron en la ecuación (8), teniendo:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{3.385e^{-3.25s}}{3.078s + 1}. \quad (9)$$

Con el modelo obtenido se realiza la simulación en el software MATLAB, de este modo, se valida en la Figura 3 que la función de transferencia propuesta tiene un comportamiento similar al de la planta.

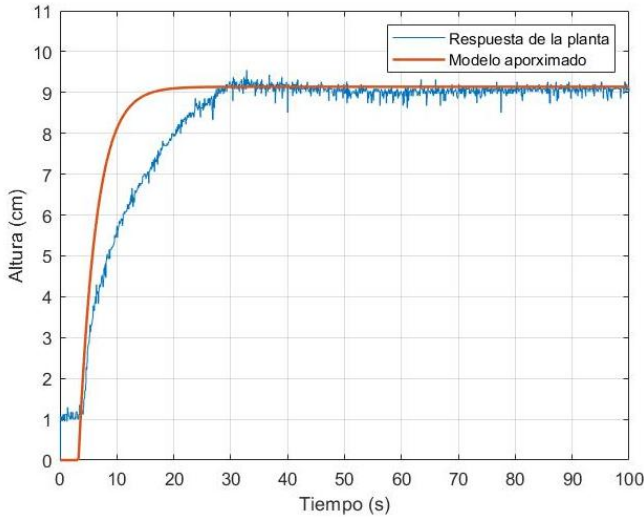


Figura 3: Comparación entre el modelo matemático y la respuesta de la planta

Para implementar el controlador PI en su forma discreta, se considera la ecuación (Visioli, 2006):

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right), \quad (10)$$

donde $u(t)$ es la señal de control, K_p es la ganancia proporcional, $e(t)$ y $e(\tau)$ es el error, T_i es el tiempo integral y T_d es el tiempo derivativo. El error se define como $e(t) = r(t) - y(t)$, siendo $r(t)$ es la referencia y $y(t)$ es la salida.

En el sistema que se está trabajando se implementa un controlador PI, porque los cambios de nivel de agua se producen de manera gradual. Por lo tanto, la acción derivativa, que se encarga de responder de manera rápida a los cambios, no es necesaria, ya que la acción integral es suficiente para eliminar el error en estado estacionario, y asegura que el nivel se mantenga en la referencia.

En la Figura 4 se muestra el diagrama del controlador PI que se implementó (Ogata, 2010), donde $K_i = \frac{K_p}{T_i}$.

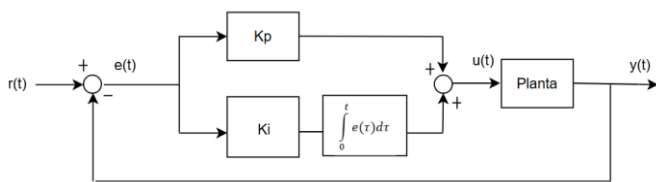


Figura 4: Sistema de control en lazo cerrado del controlador PI con seguimiento de referencia

La ecuación (10) sin considerar la acción derivativa es:

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right). \quad (11)$$

La elección de las ganancias para el controlador PI está basada en el método de Ziegler-Nichols (Ogata, 2010). La Tabla 1 muestra la manera de sintonizar las ganancias a partir de los parámetros de la función de transferencia.

Tabla 1: Método Ziegler-Nichols para sintonizar el control PI

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
PI	$0.9 \frac{T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	0

Al sustituir los valores obtenidos de la ecuación (9) en la Tabla 1, da como resultado que la ganancia proporcional es $K_p = 0.85$, el tiempo integral es $T_i = 10.83$, la ganancia integral cuya fórmula es $K_i = \frac{K_p}{T_i}$ da como resultado $K_i = 0.078$, y el tiempo derivativo $T_d = 0$. Posteriormente, las ganancias se ajustaron mediante un enfoque heurístico basado en la observación del comportamiento dinámico del sistema para obtener un mejor seguimiento de referencia.

Para la implementación de controlador PI en el software LabVIEW, se discretiza la ecuación (10), mediante el algoritmo de velocidad (Visioli, 2006). La forma discretizada del controlador PI está dada por:

$$u(k) = u(k - 1) + K_1 e(k) + K_2 e(k - 1), \quad (12)$$

$$K_1 = K_p \left(1 + \frac{\Delta_t}{T_i} \right), \quad (13)$$

$$K_2 = -K_p. \quad (14)$$

donde $u(k)$ es la señal de control, K_1 y K_2 son coeficientes que agrupan los parámetros del PI, $e(k)$ es el error, K_p es la ganancia proporcional, T_i es el tiempo integral, Δ_t es el intervalo de tiempo entre cada muestra, k es el instante actual y $k - 1$ es el instante anterior.

Para implementar la ecuación (12), se adquirió la señal de voltaje proporcionada por el sensor MPX5010 con la tarjeta DAQ OEM 6008, y en el software LABVIEW se desarrolló un programa capaz de convertir el voltaje a centímetros con base en la medición obtenida por el sensor. Este procedimiento se muestra en el subprograma de la Figura 5.

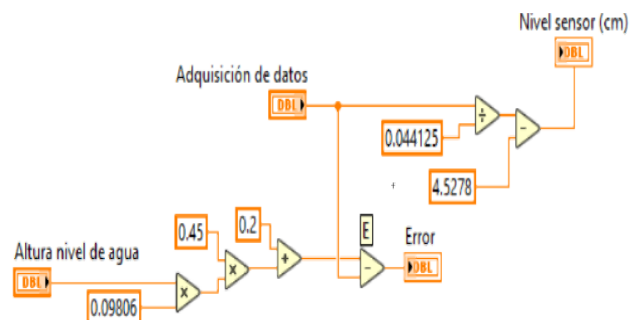


Figura 5. Subprograma para de adquisición de datos y su conversión de la variable del proceso a centímetros, implementado en el software LabVIEW.

En la Figura 6 se crea el subprograma para implementar las ecuaciones (12-14), con un intervalo de muestreo $\Delta_t = 0.1$. Se considera que $e(k - 1)$ y $u(k - 1)$ son desplazamientos que almacenan el valor anterior del error y del control respectivamente.

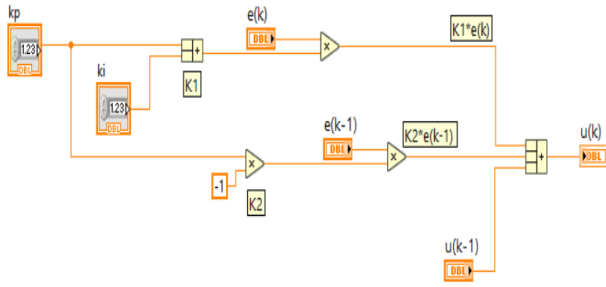


Figura 6. Subprograma para el controlador PI implementado en el software LabVIEW.

En la Figura 7 se muestra el programa utilizado para implementar el controlador PI. Este programa utiliza el subprograma de la Figura 5 para que el sistema reciba la señal adquirida por la tarjeta de adquisición de datos DAQ OEM 6008, que es convertida en centímetros, posteriormente esta señal se ingresa al controlador PI implementado en el subprograma de la Figura 6. Se emplean registros de corrimiento para hacer el desplazamiento $k - 1$. Finalmente se regula la señal de control para lograr el seguimiento de referencia establecido.

En el experimento se fijó una referencia deseada de 8 centímetros (cm). Las ganancias del PI ajustadas son $K_p = 5$ y $K_i = 0.04$, obteniéndose los resultados mostrados en la Figura 8. Donde la primera subgráfica muestra el seguimiento de referencia, la segunda muestra la señal de control y la última presenta el error.

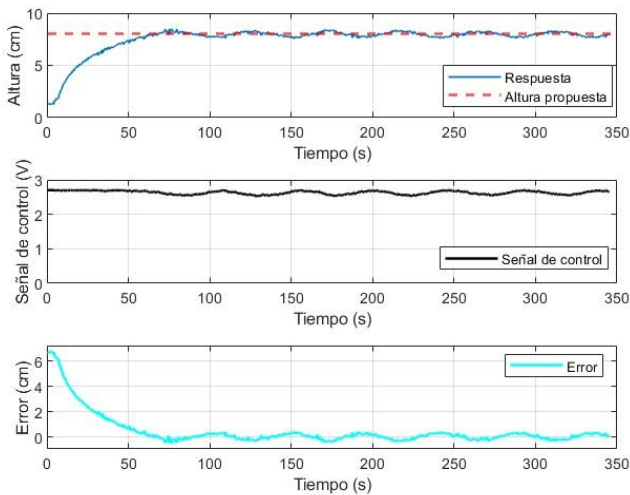


Figura 8: Respuesta del sistema en lazo cerrado con control PI discretizado.

A partir de los datos experimentales obtenidos del control PI en el seguimiento de referencia, en la Figura 9 se estableció una tolerancia del 5% para determinar el tiempo de asentamiento t_s , de modo que la respuesta del sistema permanezca dentro de un rango permitido alrededor de la referencia establecida (Ogata, 1995). Con esta tolerancia, el *límite superior* = 8.4 cm y el *límite inferior* = 7.6 cm, obteniéndose un $t_s = 151.89$ s el cual nos indica que la respuesta del sistema se encuentra dentro de estos límites. Asimismo se obtiene un tiempo pico de $t_p = 72.3917$ s. Este dato permite determinar el $c(t_p)$, el cual representa el máximo

valor de la curva de respuesta (Ogata, 1995), siendo $c(t_p) = 8.4467$ cm.

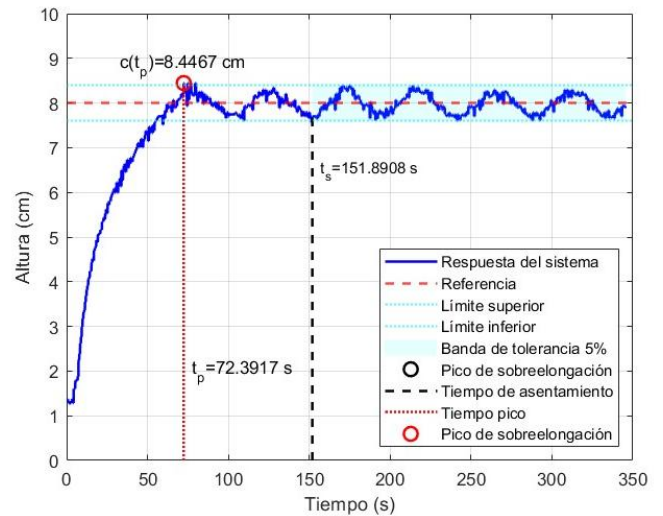


Figura 9: Análisis de la respuesta transitoria del PI para el seguimiento de referencia.

Al obtener $c(t_p)$, se realiza el cálculo del porcentaje de sobreelongación máxima M_p . Este representa el máximo valor pico de la curva de respuesta medido a partir del valor final en estado estacionario, expresado como porcentaje (Ogata, 1995). Se busca que este valor esté entre el 5% y el 10%, ya que este rango otorga un equilibrio adecuado entre el tiempo de respuesta y estabilidad para el sistema.

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} * 100\% \quad (15)$$

donde $c(\infty)$ es el valor en estado estacionario de la respuesta de un sistema cuando el sistema se estabiliza.

Para obtener $c(\infty)$, se calcula como el promedio de todos los datos que están después del tiempo de asentamiento t_s , ya que el sistema se ha estabilizado y se encuentra dentro de la tolerancia establecida del 5%. (Brockwell & Davis, 2002)

$$c(\infty) = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \quad (16)$$

donde n es el número total de muestras y $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ son las muestras a partir de que el sistema se encuentra dentro de la tolerancia establecida el 5%

Sustituyendo (16) en (15) se obtiene:

$$M_p = \frac{c(t_p) - \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}}{\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}} * 100\% \quad (17)$$

Desarrollando los cálculos a partir de (17) se tiene $M_p = 5.9152\%$

Se calcula el IAE para medir el error entre el valor deseado y el valor actual (Ogata, 1995).

$$IAE = \sum_{k=0}^M \left| \frac{e(k) + e(k-1)}{2} T_s \right|, \quad (18)$$

donde M es el número de muestras, $e(k)$ es el error, T_s es el tiempo de muestreo, k es el instante actual y $k - 1$ es el instante anterior.

Realizando el cálculo se tiene $IAE = 201.9339$.

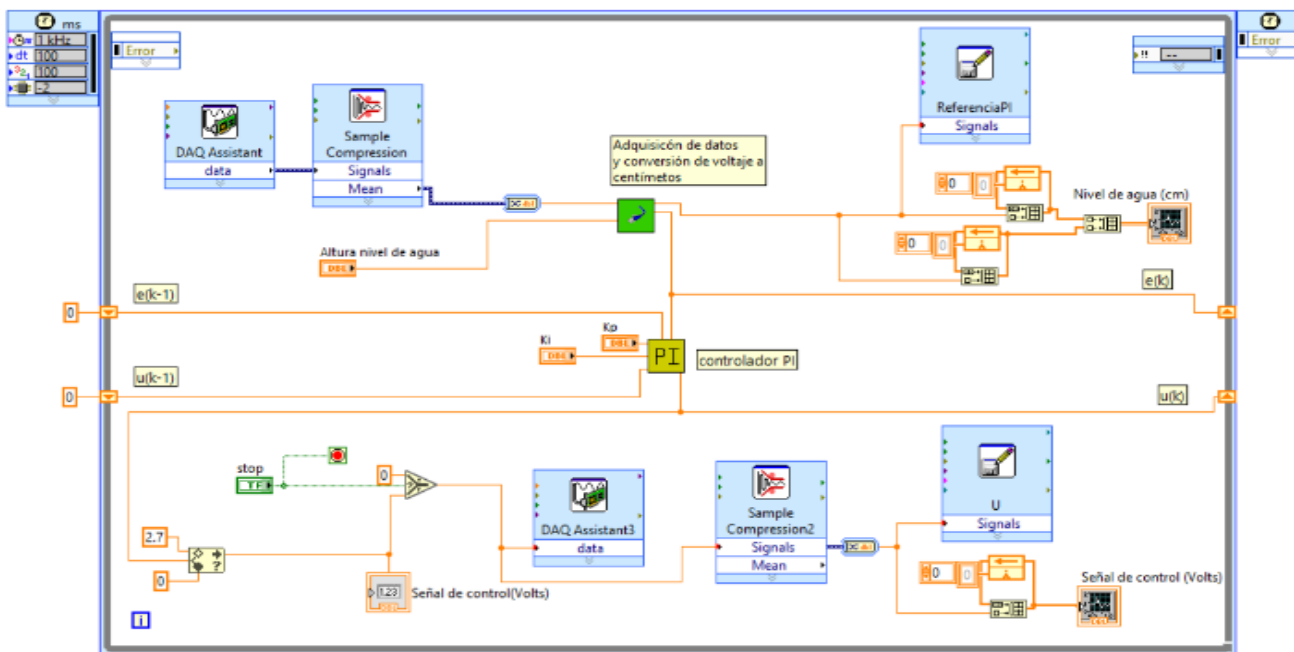


Figura 7. Programa para el control de nivel de agua.

3.2 Controlador por retroalimentación de estado

Para diseñar el control por retroalimentación de estado, el sistema se modela mediante una función discreta de segundo orden (Ogata, 1995):

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}, \quad (19)$$

donde $Y(z)$ es la salida, $U(z)$ es la entrada, b_0, b_1, b_2, a_1 y a_2 son los parámetros del sistema.

Se aplica la transformada z inversa de la ecuación (19) siguiendo el proceso descrito en (Proakis, 2007). Reescribiendo la ecuación se tiene:

$$(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})U(z). \quad (20)$$

Aplicando transformada z inversa a (20) se obtiene la ecuación en diferencias para estimar los parámetros del modelo a partir de las observaciones de las entradas y salidas, conforme al proceso descrito en (Proakis, 2007):

$$Y(k) + a_1 Y(k-1) + a_2 Y(k-2) = b_0 U(k) + b_1 U(k-1) + b_2 U(k-2). \quad (21)$$

Reescribiendo (21) se tiene:

$$Y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} Y(k-1) & Y(k-2) & U(k) & U(k-1) & U(k-2) \end{bmatrix}}_{\chi} \underbrace{\begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{\theta} \quad (22)$$

donde $Y(k)$ es la salida del sistema, χ es la matriz de variables de regresión y θ son los parámetros a estimar.

La ecuación (22) se puede expresar como (Åström & Murray, 2021):

$$Y(k) = \chi \theta. \quad (23)$$

Los parámetros del sistema se pueden estimar mediante el método de mínimos cuadrados. Así, los parámetros estimados $\hat{\theta}$ están dados por (Wellstead & Zarrop, 1991):

$$\hat{\theta} = [\chi^T \chi]^{-1} \chi^T Y, \quad (24)$$

donde $\hat{\theta}$ es el vector de parámetros estimados, χ es la matriz de variables de regresión, y Y es el vector de salida.

A partir de la ecuación (19), se implementó un programa en LabVIEW con el objetivo de caracterizar el sistema y estimar los parámetros. Se aplicó una entrada al sistema, la cual fue

una señal persistente de amplitud de 2.7 VDC, para recopilar los datos de salida y , de entrada.

Con los datos obtenidos de la entrada y de la salida, se programó en el software MATLAB la ecuación (24) dando como resultado los parámetros $b_0 = 0$, $b_1 = 0.0234$, $b_2 = -0.0233$, $a_1 = -0.995$ y $a_2 = -0.0032$.

Sustituyendo los valores obtenidos en la ecuación (19) se tiene:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.0234z - 0.0233}{z^2 - 0.995z - 0.0032} \quad (25)$$

A partir de los parámetros estimados, se hace el análisis en espacio de estado para asegurar que el sistema pueda llevarse a cualquier estado. Esto implica considerar su forma canónica controlable (Ogata, 1995):

$$\hat{x}(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}}_{G_{n \times n}} \hat{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{H_{n \times r}} u(k), \quad (26)$$

$$y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} b_2 - a_2 b_0 & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix}}_{C_{m \times n}} \hat{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{H_{n \times r}} u(k), \quad (27)$$

donde $\hat{x}(k)$ es el vector de estado de n dimensiones, $y(k)$ es el vector de salida de m dimensiones, $u(k)$ es el vector de entrada de r dimensiones, G es la matriz de estado de $n \times n$ dimensiones, H es la matriz de entrada de $n \times r$ dimensiones, y C es la matriz de salida de dimensiones $m \times n$, siendo n el estado, m las salidas y r son las entradas.

Sustituyendo los valores de los parámetros se tiene:

$$\hat{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.0032 & 0.995 \end{bmatrix} \hat{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k), \quad (28)$$

$$y(k) = [-0.0233 \quad 0.0234] \hat{x}(k). \quad (29)$$

Una vez definidas las matrices: G , H , y C , se verifica la controlabilidad del sistema calculando el rango de la matriz (Ogata, 1995)

$$M = [H \quad : \quad GH]. \quad (30)$$

Sustituyendo los valores obtenidos de la ecuación (30) se tiene:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0.995 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

El $\text{rango}(M) = 2$, por lo tanto, es de rango completo, lo cual implica que el sistema es de estado completamente controlable.

Al tener rango completo en la matriz M , se implementa un sistema de seguimiento con un integrador en lazo cerrado.

El diagrama de la Figura 10 muestra un control integral, el cual acumula el error a lo largo del tiempo, generando así a $v(k)$. La ganancia K_1 permite ajustar la rapidez con la que el controlador integral responde al error acumulado.

La planta recibe la señal de control $u(k)$, que es el resultado de la acción integral y la dinámica del sistema, y K_2 ajusta la realimentación del estado, dando una mejor estabilidad ante perturbaciones (Ogata, 1995).

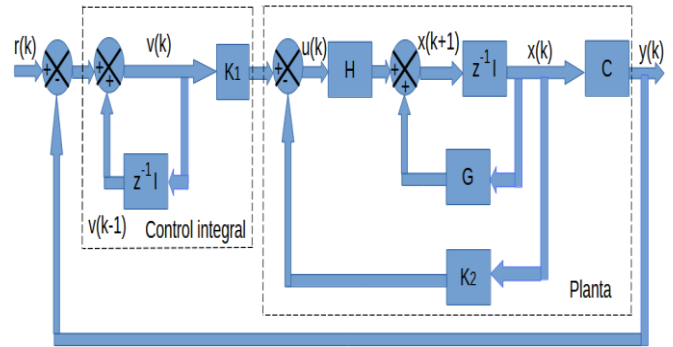


Figura 10: Sistema de control en lazo cerrado con seguimiento de referencia y control integral

La señal de entrada es:

$$u(k) = -K_2 x(k) + K_1 v(k), \quad (32)$$

donde $u(k)$ es la señal de entrada, K_1 y K_2 son las ganancias calculadas del sistema, $v(k)$ es el vector de error de actuación de m dimensiones y k es el índice de muestra actual.

Siendo:

$$v(k) = v(k-1) + r(k) - y(k), \quad (33)$$

donde $v(k)$ es el vector de actuación de m dimensiones.

Para introducir la acción integral al sistema, se utiliza la ecuación (26) agregando un nuevo vector de estado. Bajo la selección apropiada de K_1 y K_2 y para una referencia constante, la salida $y(k)$ y el control $u(k)$ tenderán a un valor constante en estado estacionario, $y(\infty)$ y $u(\infty)$ respectivamente. Donde la notación ∞ denota el régimen en estado estacionario. Para diseñar las ganancias de control se utiliza entonces el sistema aumentado dado por (Ogata, 1995):

$$\begin{bmatrix} x_e(k+1) \\ u_e(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_{n \times n} & H_{n \times r} \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times r} \end{bmatrix}}_{\hat{G}_{(n+m) \times (n+m)}} \begin{bmatrix} x_e(k) \\ u_e(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix}}_{\hat{H}_{(n+m) \times m}} W(k), \quad (34)$$

donde $x_e = x(k) - x(\infty)$ es el error del vector de estado, $u_e = u(k) - u(\infty)$ es el error de la señal de entrada, \hat{G} es una matriz de $(n+m) \times (n+m)$ dimensiones, \hat{H} es una matriz de $(n+m) \times m$ dimensiones, y $W(k)$ es una matriz auxiliar para el diseño del control, I_m es la matriz identidad, m corresponde a las salidas del sistema del sistema, n son los estado, $\mathbf{0}_{1 \times n}$ es un vector de dimensiones apropiadas para G , $\mathbf{0}_{1 \times r}$ es un vector de dimensiones apropiadas para H , y:

$$W(k) = \underbrace{[K_2 - K_2 G - K_1 C G \quad : \quad I_m - K_2 H - K_1 C H]}_{\hat{K}_{m \times r}} \begin{bmatrix} x_e(k) \\ u_e(k) \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Partiendo del sistema (34), se requiere diseñar la matriz de ganancias de retroalimentación de estado \hat{K} de dimensiones $m \times r$, siendo m las salidas y r las entradas.

Sustituyendo los valores de las matrices G y H de la ecuación (28) en la ecuación (34) se tiene:

$$\hat{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.0032 & 0.995 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} W(k). \quad (36)$$

Una vez definidas las matrices \hat{G} y \hat{H} , se verifica la controlabilidad del sistema calculando el rango de la matriz M para comprobar su controlabilidad (Ogata, 1995). Se tiene que:

$$\hat{M} = [\hat{H} \quad \hat{G}\hat{H} \quad \hat{G}^2\hat{H}]. \quad (37)$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la ecuación (37) se tiene:

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0.995 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

El $\text{rango}(\hat{M}) = 3$ con lo cual se cumple que es de rango completo, lo cual implica que el sistema es de estado completamente controlable.

Al cumplir que \hat{M} es de rango completo, el diseño de \hat{K} se realiza mediante la técnica de asignación de polos. Estos se proponen a partir de resolver el sistema de segundo orden de la ecuación (25), siendo $z_1 = -0.003$ y $z_2 = 0.998$, ya que la dinámica del sistema es lenta y estable. Adicionalmente, se propone ubicar el polo de la acción integral en $z = 0.9$. Esta elección se hace para que la acción integral tenga un comportamiento lento conforme a la dinámica principal del sistema, la cual está dominada principalmente por polo de $z_2 = 0.998$.

Para obtener las ganancias del control se utiliza el comando Ackermann en el software MATLAB, y así calcular el valor numérico de la ganancia \hat{K} de la ecuación (32).

En software MATLAB se utiliza la fórmula de Ackermann:

$$\hat{K} = \text{acker}(\hat{G}, \hat{H}, p), \quad (39)$$

donde \hat{G} , \hat{H} son matrices y p son los polos propuestos.

El método de Ackermann sirve para obtener la ganancia total \hat{K} del sistema, sin embargo, para implementar el sistema de control de la Figura 10 es necesario obtener las ganancias K_1 y K_2 de forma separada (Ogata, 1995). Solucionado para K_1 y K_2 a partir de la relación mostrada en (35), se tiene que:

$$[K_2 \quad K_1] = \left[\hat{K} + [0_{m \times n} \quad I_m] \begin{bmatrix} G - I_m & H \\ CG & CH \end{bmatrix}^{-1} \right], \quad (40)$$

donde K_1 y K_2 son las ganancias del sistema, \hat{K} es la ganancia total del sistema, $0_{m \times n}$ es un vector de dimensiones apropiadas para \hat{K} , I_m es la matriz identidad de m dimensiones.

Resolviendo las ecuaciones (39-40) en el software MATLAB se tiene los siguientes resultados:

$$K = [0.0003 \quad 0.0531 \quad : \quad 2.0060]. \quad (41)$$

En la Figura 11 se crea el subprograma para implementar las ecuaciones del control (32-33). Se considera que $v(k-1)$ y $x_2(k-1)$ son desplazamientos que almacenan el valor anterior del error de actuación y el estado respectivamente.

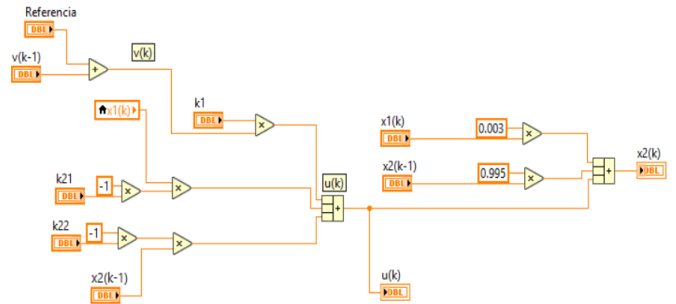


Figura 11: Diagrama esquemático en LabVIEW del sistema de control con retroalimentación.

En la Figura 12 se muestra el programa utilizado para implementar el controlador por retroalimentación de estado. Este programa utiliza el subprograma de la Figura 5 para que el sistema reciba la señal adquirida por la tarjeta de adquisición de datos DAQ OEM 6008, que es convertida en centímetros, posteriormente esta señal se ingresa al controlador por retroalimentación de estado implementado en el subprograma de la Figura 11. Se emplean registros de corrimiento para hacer el desplazamiento $k-1$. Finalmente se regula la señal de control para lograr el seguimiento de referencia establecido.

En la Figura 13 se muestran los resultados obtenidos. En la primera subgráfica se muestra el seguimiento de referencia, la segunda muestra la señal de control y la tercera muestra el error.

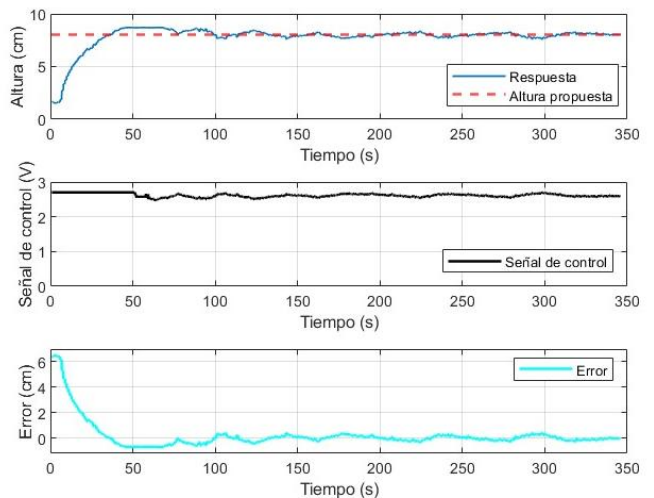


Figura 13: Respuesta del sistema en lazo cerrado con un controlador por retroalimentación de estado

A partir de los datos experimentales obtenidos en el controlador por retroalimentación de estado en el seguimiento de referencia, en la Figura 14 se estableció una tolerancia del

5% para determinar el tiempo de asentamiento t_s (Ogata, 1995). Siendo el *límite superior* = 8.4 cm y el *límite inferior* = 7.6 cm, obteniéndose un $t_s = 124.89$ s. Asimismo se obtiene un tiempo pico de $t_p = 46.8914$ s y un pico de sobreelongación $c(t_p) = 8.7077$ cm (Ogata, 1995).

Se realiza los cálculos a partir de la ecuación (17) para obtener el M_p .

Al efectuar el cálculo se obtiene $M_p = 8.8604\%$.

Se calcula el IAE para medir el error entre el valor deseado y el valor actual. Se utiliza la ecuación (18).

Realizando el cálculo se tiene $IAE = 166.8972$.

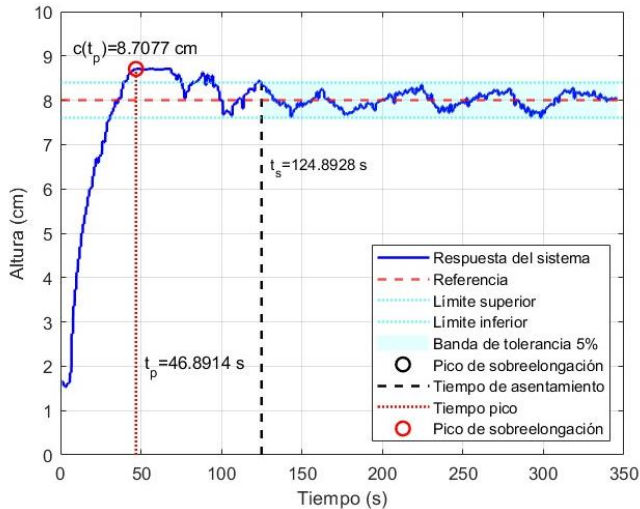


Figura 14: Análisis de la respuesta transitoria del PI para el seguimiento de referencia

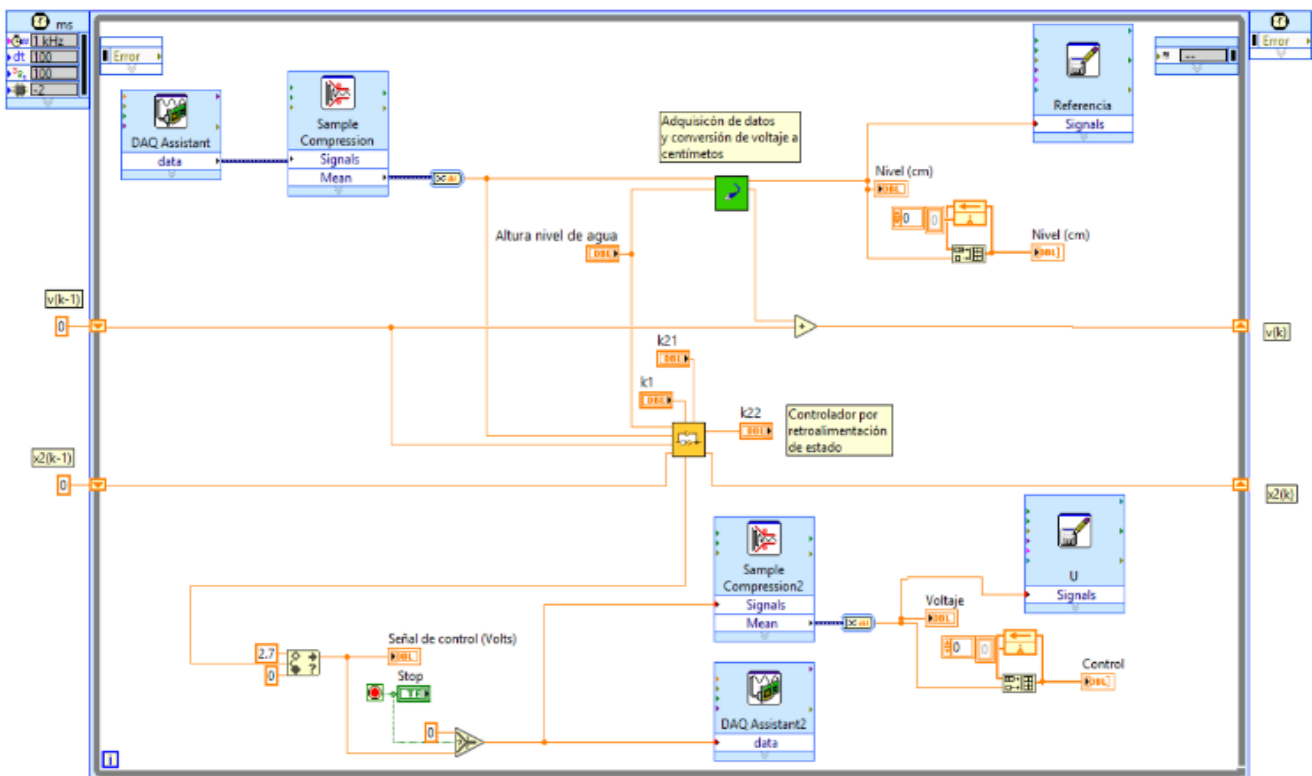


Figura 12. Programa para el control de nivel de agua.

4. Discusión

Los resultados de la implementación de un control clásico y un control moderno demuestran que ambos controladores cumplen con la referencia establecida, siendo el control por retroalimentación de estado el que ofrece un mejor desempeño con un menor error acumulado y mejor desempeño de tiempo de respuesta.

La Figura 8 corresponde a los resultados del control PI. En la primera subgráfica se observa que el controlador logra mantener la altura cercana a la establecida por la referencia. La segunda subgráfica muestra cómo la señal de control se ajusta continuamente para que la altura se mantenga en la referencia establecida, mientras que en la tercera subgráfica se aprecia que el error se mantuvo cercano a cero.

La Figura 9 muestra en detalle los resultados experimentales del seguimiento de referencia del control PI. El sistema alcanza un $t_s = 151.89$ s, a partir de este momento la respuesta se encuentra dentro de los límites establecidos del 5%. Asimismo se tiene un $t_p = 72.3917$ s, un $M_p = 5.9152\%$ y un $IAE = 201.9339$.

La Figura 13 presenta los resultados del control por retroalimentación de estado. La primera subgráfica muestra que el controlador logra aproximarse a la referencia establecida. En la segunda subgráfica se aprecia que la señal de control se ajusta constantemente para mantener la altura en la referencia establecida, mientras que en la tercera subgráfica muestra cómo el error se mantiene muy cerca del cero.

La Figura 14 muestra en detalle los resultados experimentales del seguimiento de referencia del control por retroalimentación de estado. El sistema alcanza un $t_s = 124.89$ s, a partir de ese momento la respuesta del sistema se encuentra dentro de los límites establecidos del 5%. Asimismo se tiene un $t_p = 46.8914$ s, un $M_p = 8.8604\%$ y un $IAE = 166.8972$.

Calcular el M_p en ambos controladores permite verificar que el sistema tiene un equilibrio adecuado entre el tiempo de respuesta y estabilidad, ya que ambos valores se encuentran por debajo del 10% y son mayores al 5%, siendo para el control por retroalimentación de estado un $M_p = 8.8604\%$ y para el control PI un $M_p = 5.9152\%$. Obtener los parámetros t_s , t_p , y el IAE facilita la comparación del desempeño entre diferentes estrategias de control, proporcionándonos valores numéricos que cuantifican el comportamiento del controlador a lo largo del tiempo.

Conforme al análisis realizado, el controlador por retroalimentación de estado demuestra tener un mejor seguimiento de referencia comparado con el controlador PI. Esto se confirma a partir de los datos obtenidos, ya que en la Figura 14 se puede observar que el $t_p = 46.891$ s y que el $t_s = 124.89$ s para el control por retroalimentación de estado, mientras que el controlador PI tiene un $t_p = 72.3917$ s y un $t_s = 151.89$ s como se muestra en la Figura 9. Estos valores demuestran que el control por retroalimentación de estado obtuvo una respuesta más rápida para llegar a la referencia en comparación con el PI. De igual manera esto se confirma por los resultados obtenidos en el IAE, ya que el control por retroalimentación de estado tiene un $IAE = 166.8972$, el cual es menor que el del PI, que fue de un $IAE = 201.9339$. Se puede observar gráficamente en las subgráficas correspondientes al error, ya que en la Figura 13, subgráfica 3, el error del controlador por retroalimentación de estado se mantiene cercano a cero en comparación con el controlador PI mostrado en la Figura 8, subgráfica 3, donde se aprecia que su error se encuentra más alejado del cero.

En la implementación del controlador por retroalimentación de estado, se observó que la ubicación de polos debe hacerse conforme a la dinámica del sistema, ya que si no es así el sistema se inestabiliza al aplicar el control y por consecuencia nunca se alcanzará la referencia establecida. Al realizar una correcta ubicación de polos conforme a la dinámica del sistema, se pueden obtener mejores resultados que el control PI.

5. Abreviaciones y Acrónimos

Control PI: Control proporcional-integral.
 NI USB 6008 DAQ OEM: tarjeta de adquisición de datos National Instruments USB-6008.
 VDC: Volts de corriente continua
 V_{out} : Voltaje de salida.
 mA: miliamperios.
 kPa: kilopascal.
 mV/kPa: milivoltios por kilopascal.
 Ms: milisegundos.
 V: voltios.
 l/min: litros por minutos.
 W: Watts.
 PWM: modulación por ancho de pulso.
 kHz: kilohertz.
 t_s : tiempo de asentamiento.
 t_p : tiempo pico.
 $c(t_p)$: Pico de sobreelongación.
 M_p : porcentaje de sobreelongación máxima.
 IAE: Integral del Error Absoluto

6. Conclusiones

Este estudio permitió realizar una comparación entre el control PI y un control por retroalimentación de estado en un sistema de nivel, comprobando que ambos enfoques tienen la capacidad de cumplir con el seguimiento de referencia. Sin embargo, el control moderno demostró un mejor seguimiento de referencia conforme a los resultados obtenidos del IAE, t_s y t_p , con lo cual se puede validar que el control por retroalimentación de estado es más adecuado para obtener un mejor rendimiento y precisión en los resultados. Se debe considerar que la ubicación de los polos fue clave para asegurar la respuesta y estabilidad del sistema, ya que esto permite obtener un mejor seguimiento de referencia en comparación al PI.

Por otro lado, el controlador PI destaca debido a su fácil implementación, ya que la sintonización de sus ganancias proporcional e integral se puede realizar con el método Ziegler-Nichols o de manera heurística. Al modificar estos parámetros gradualmente, se puede lograr un mejor resultado en el controlador, de esta manera se puede obtener una sintonización que reduzca de forma más rápida las perturbaciones que se presenten en el sistema y se alcance la referencia establecida en un menor tiempo. Sin embargo, al modificar de manera heurística las ganancias del control PI se pueden evidenciar sus limitaciones, ya que el método Ziegler-Nichols solo constituye un punto de partida para la sintonización.

El control por retroalimentación de estado se destaca por generar una respuesta más rápida en comparación con el control PI, aunque este último, debido a la integral que incorpora, proporciona un buen desempeño para el seguimiento de referencia, ya que al transcurrir el tiempo logra alcanzar la referencia establecida.

Los resultados de esta investigación proporcionan criterios técnicos los cuales permiten seleccionar un control clásico o moderno conforme a la eficiencia o simplicidad del controlador que se quiera implementar.

Se destaca que este estudio se realizó en un sistema de nivel, lo que plantea la necesidad de que a futuro se prueben los mismos controles en diferentes sistemas, con el objetivo de seguir entendiendo las ventajas y limitaciones de cada uno, y así determinar en qué sistemas es mejor aplicar cada controlador para obtener un mejor desempeño.

7. Agradecimientos

Los autores agradecen a la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, al Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería y al Centro de Investigación en Tecnologías de Información y Sistemas por su apoyo institucional para realizar las pruebas experimentales y llevar a cabo esta investigación.

8. Referencias

- Åström, K. J., & Murray, R. (2021). *Feedback systems: an introduction for scientists and engineers*. Princeton university press.
- Bermeo Varon, L. A., Alvarez, J. G., & Mantilla Arenas, W. (2021). Comparación del desempeño de un controlador PID sobre el proceso de nivel usando un controlador lógico programable y un sistema embebido. *Ingeniare. Revista chilena de ingeniería*, 29(4), 622-632.
- Brockwell, P. J., & Davis, R. A. (2002). *Introduction to time series and forecasting*. New York: Springer New York.
- Castillo Amado, E. R. (2023). Diseño, simulación e implementación de control PI del nivel en un tanque de agua osmonizada para el tratamiento de hemodiálisis.
- García Jaimes, L. E., & Giraldo, M. A. (2015). Controlador difuso y controlador por asignación de polos para un levitador neumático. *Revista Politécnica* 11.21, 107-116.
- Gutiérrez, H. (2010). *Automatización Industrial: Teoría y Laboratorio*. Colombia: Universidad distrital Francisco José de Caldas.
- Martínez, F., Cortes, E., & Moreno, E. (2016). Control de posición de un sistema hidráulico mediante un controlador por realimentación de estados. # *ashtag*, (8), 11-31.
- Ogata, K. (1995). *Discrete time control systems*. Prentice-Hall, Inc.
- Ogata, K. (2010). *Modern control engineering*. Prentice-Hall, Inc.
- Proakis, J. G. (2007). *igital signal processing: principles, algorithms, and applications, 4/E*. India: Pearson Education .
- Serway, R. (2014). *Física para Ciencias e Ingeniería Vol I*. Cengage Learning Editores.
- Visioli, A. (2006). *Practical PID control*. London: Springer London.
- Wellstead, P. E., & Zarrop, M. B. (1991). *Self-tuning systems: control and signal processing*. John Wiley & Sons, Inc