

## Evaluación de actuadores piezoeléctricos de bajo costo como fuente de excitación para aplicaciones de análisis modal. On the evaluation of low-cost piezoelectric actuators as an excitation source for modal analysis applications.

L.G. Trujillo-Franco <sup>a,\*</sup>, O.A. García-Pérez <sup>b</sup>, H.F. Abundis-Fong <sup>c</sup>, J. González-Sierra <sup>a</sup>, J.D. Rivera-Fernández <sup>a</sup>

<sup>a</sup>Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería Campus Hidalgo San Agustín Tlaxiaca, 42162 Hidalgo, México.

<sup>b</sup>Área de posgrado, Universidad Aeronáutica en Querétaro (UNAQ), Colón 76270 Querétaro, México.

<sup>c</sup>División de Estudios de Posgrado e Investigación Tecnológico Nacional de México/I.T. Pachuca 42080, Hidalgo, México.

### Resumen

Los transductores contruidos con materiales piezoeléctricos son de especial utilidad en el campo del análisis de vibraciones, principalmente debido a su capacidad de ser utilizados como actuadores electromecánicos y como sensores de esfuerzo mecánico. Esta doble funcionalidad se debe a la naturaleza recíproca del fenómeno físico que los rige y consiste en la conversión de esfuerzo mecánico en potencial eléctrico y conversión de potencial eléctrico en deformación. Ambas aplicaciones tienen una naturaleza bipolar en los sistemas electrónicos y bidireccional en las aplicaciones mecánicas. Actualmente, es muy común encontrar aplicaciones de dispositivos basados en materiales piezoeléctricos aplicados a la electrónica de consumo como actuadores de vibración en dispositivos inteligentes como celulares y tabletas, con fines de retroalimentación háptica y acústica. El presente trabajo aborda el uso de actuadores acústicos de bajo costo como transductores generadores de excitación electromecánica para aplicaciones de análisis modal, aplicado a estructuras ligeramente amortiguadas y la evaluación de diferentes señales de excitación para la determinación experimental de frecuencias naturales o resonancias. Los actuadores piezoeléctricos evaluados en el presente trabajo mostraron un desempeño notable al reproducir fielmente señales de excitación de naturalezas y anchos de banda diferentes, lo que permite considerar su uso en aplicaciones de análisis modal experimental no invasivo o que involucre fuerzas de baja amplitud, dada su excelente relación costo-beneficio.

**Palabras Clave:** Modelo modal de sistemas, Análisis modal experimental, Transductores piezoeléctricos.

### Abstract

Piezoelectric transducers are particularly useful in vibration analysis, primarily due to their ability to be used as both electromechanical actuators and mechanical stress sensors. This dual functionality is due to the reciprocal nature of the physical phenomenon that governs them, which consists of the conversion of mechanical stress into electrical potential and the conversion of electrical potential into strain. Both applications are bipolar in electronic systems and bidirectional in mechanical applications. Currently, it is common to find applications of devices based on piezoelectric materials applied to consumer electronics as vibration actuators in smart devices such as cell phones and tablets, for haptic and acoustic feedback purposes. This paper addresses the use of low-cost acoustic actuators as electromechanical excitation generating transducers for modal analysis applications, applied to lightly damped structures, and the evaluation of different excitation signals for the experimental determination of natural frequencies or resonances. The piezoelectric actuators evaluated in this work showed a notable response by effectively reproducing excitation signals of different natures and bandwidths, which allows considering their use in non-invasive experimental modal analysis applications or those involving low amplitude forces, given their excellent cost-benefit ratio.

**Keywords:** Modal model of systems, Experimental modal analysis, Piezoelectric transducers

\*Autor para correspondencia: ltrujillof@ipn.mx

**Correo electrónico:** ltrujillof@ipn.mx (L.G. Trujillo-Franco), oscar.garcia@unaq.mx (O.A. García-Pérez), hugo.af@pachuca.tecnm.mx (H.F. Abundis-Fong), ja.gonzalezsi@ipn.mx (J. González-Sierra), jdriveraf@ipn.mx (J.D. Rivera-Fernández).

**Historial del manuscrito:** recibido el 19/08/2025, última versión-revisada recibida el 21/10/2025, aceptado el 14/10/2025, publicado el 25/03/2026. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v14iEspecial.15490>



## 1. Introducción

El modelado matemático de sistemas dinámicos es un tema de gran interés y actualidad en las diversas áreas de la ingeniería, debido a que su objetivo principal es la representación de su comportamiento ante diversos estímulos, comúnmente considerados como perturbaciones, haciendo uso de una expresión o conjunto de expresiones matemáticas. Esta representación sirve como la base o materia prima de las simulaciones numéricas que permiten obtener una predicción de su respuesta ante diversos escenarios o aplicaciones de interés. Dentro del vasto universo de técnicas de modelado de sistemas dinámicos, el modelo modal tiene una gran aceptación debido a su robusto respaldo teórico y experimental (He y Fu, 2001; Brandt, 2011a; Ewins, 2007; Brincker y Ventura, 2015; Avitabile, 2017). El modelo modal permite la representación de la dinámica de los sistemas en términos de tres parámetros principales: frecuencias naturales, factores de amortiguamiento y patrones de deformación denominados formas modales (He y Fu, 2001; Avitabile, 2017). El análisis modal experimental consiste en aplicar técnicas de extracción de parámetros a señales que se originan al cuantificar la respuesta dinámica de los sistemas, usando sensores de posición, aceleración o velocidad. Posteriormente, las señales son procesadas, haciendo uso del algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés), incluida en equipos analizadores de espectro o haciendo uso de software científico en el que se programan técnicas de extracción de parámetros modales como peak picking o curve fitting (Avitabile, 2017; Ewins, 2007). El análisis modal experimental implica el uso de señales de excitación que se evalúan en cada caso de estudio con el fin de encontrar las mejores relaciones señal-ruido y, como consecuencia, la estimación efectiva de los parámetros modales para la construcción del modelo dinámico de la estructura bajo análisis. Una vez seleccionada la señal de excitación, se somete a un sistema de acondicionamiento de señal para el actuador o transductor que se encargará de proporcionar la fuerza de excitación. Los transductores piezoeléctricos han demostrado ser adecuados para su uso en aplicaciones de análisis modal experimental como se reporta en trabajos como (Piana *et al.*, 2016; Sanchez-Villegas *et al.*, 2024; Wang *et al.*, 2013), donde se evalúa su desempeño como sensores, en trabajos previos como (Silva-Navarro *et al.*, 2021) se utilizan actuadores piezoeléctricos especializados del tipo parche como transductores electromecánicos para generar una fuerza de excitación para la evaluación de desempeño de un esquema de identificación de parámetros en línea.

Con base en lo anteriormente mencionado, en el presente trabajo, los actuadores piezoeléctricos de bajo costo se aplican en su configuración como transductores de vibraciones, usando circuitos especializados en proporcionar señales analógicas de alto voltaje y baja corriente. Las principales aportaciones del presente trabajo son las siguientes:

1. La evaluación de actuadores piezoeléctricos de bajo costo como fuentes de excitación para estructuras poco amortiguadas.
2. La comparación del desempeño de diversas señales de excitación con definiciones matemáticas esencialmente diferentes.

3. La evaluación del desempeño de un amplificador de potencia de bajo costo como acondicionador, para la reproducción de señales estímulo para transductores piezoeléctricos.
4. La validación de las frecuencias naturales obtenidas por medio de un modelo de elemento finito (E.F.).

De manera adicional, pero no menos importante, los resultados del desempeño de los actuadores evaluados permite respaldar su uso en esquemas de absorción de vibraciones y esquemas de monitoreo de salud estructural basados en identificación de parámetros modales usando fuentes de excitación controladas y de persistencia acotada en el tiempo. En el presente trabajo se propone la validación experimental del modelo de elemento finito de una viga empotrada, usando actuadores acústicos piezoeléctricos como fuente de excitación. El presente trabajo se organiza de la siguiente manera: En la Sección 2 se presentan las principales bases teóricas del análisis modal. En la Sección 3 se presenta el caso de estudio y se describe el montaje experimental, en la Sección 3.1 se presenta el modelo matemático y en las Secciones 3.2, 3.3 y 3.4 se describen las señales de excitación utilizadas y la respuesta del sistema ante cada una en el dominio del tiempo. En la Sección 4 se presenta un resumen y discusión de los resultados más relevantes. Finalmente, en la Sección 5 se formulan algunas conclusiones.

## 2. Sistemas de múltiples grados de libertad

La mayoría de los sistemas y estructuras mecánicas en ingeniería tienen infinitos grados de libertad, mismos que se acotan o reducen a un número finito  $n$ . El principal fundamento teórico del análisis modal es la aplicación de un cambio de coordenadas de los grados de libertad de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo, que permite el desacoplo del conjunto de ecuaciones diferenciales que los modelan, haciendo uso de una transformación lineal (Heylen *et al.*, 2003). Como es ampliamente conocido, el modelo matemático de un sistema vibratorio de  $n$  grados de libertad se expresa en forma matricial como:

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = f \quad (1)$$

, donde las matrices  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez respectivamente. El vector  $x \in \mathbb{R}^n$  representa los desplazamientos físicos y el vector  $f \in \mathbb{R}^n$  representa a las perturbaciones o fuerzas externas al sistema mecánico. El desacoplo o diagonalización del sistema de ecuaciones diferenciales expresado en la ecuación (1) se consigue haciendo uso de una transformación del vector de desplazamientos  $x$  en el vector de coordenadas modales  $q \in \mathbb{R}^n$ , usando la expresión (He y Fu, 2001; Ewins, 2007; Avitabile, 2017; Heylen *et al.*, 2003):

$$\ddot{q}_i + 2\zeta_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2q_i = \sum_{j=1}^n \psi_{ji}f_j \quad (2)$$

$$x = \psi q \quad (3)$$

, donde  $q_i$  es la  $i$ -ésima coordenada modal, que corresponde al  $i$ -ésimo modo de vibración, las constantes  $\zeta_i$  y  $\omega_i$  son el  $i$ -ésimo amortiguamiento modal y la  $i$ -ésima frecuencia natural respectivamente, con  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , las constantes  $\psi_{ji}$  son los elementos de la  $i$ -ésima columna de la matriz  $\psi$ . La matriz  $\psi$  de

dimensión  $n \times n$  es ampliamente conocida como la matriz modal y está construida por los vectores solución al problema propio como se reporta en (Heylen *et al.*, 2003):

$$(\lambda A + D)Y = F \quad (4)$$

, donde  $\lambda = \sigma + j\omega$ . Las matrices aumentadas  $A$ ,  $D$  y los vectores compuestos  $Y$  y  $F$  se definen como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & B \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} \lambda x \\ x \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} \quad (5)$$

. El análisis modal centra su interés en el problema propio asociado al sistema vibratorio de múltiples grados de libertad. El problema propio resulta del análisis en vibraciones libres, cuando no existen fuerzas externas, es decir, con  $f = 0$ . Bajo esta premisa, la variable compleja  $\lambda = \sigma + j\omega$ , pertenece al conjunto de los valores conocidos como los valores propios, es decir, aquellos que satisfacen la expresión  $\det(\lambda A + D) = 0$ , como consecuencia, para un sistema de  $n$  grados de libertad, existirán  $n$  valores propios  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . La matriz modal extendida  $\Phi \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$  está construida con las soluciones al problema propio expresado en (4), de manera que la matriz  $\Phi$  se construye con el espacio de columnas de las soluciones no triviales al problema de vibración libre, que a su vez describen los patrones de deformación del sistema conocidos como formas modales  $(\lambda A + D)Y = 0$  (Heylen *et al.*, 2003) En ese sentido, la matriz  $\Phi$  está definida como:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \lambda_1 \Phi_{1,1} & \cdots & \lambda_n \Phi_{1,n} & \lambda_1^* \Phi_{1,1}^* & \cdots & \lambda_n^* \Phi_{1,n}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi_{n,1} & \cdots & \Phi_{n,n} & \Phi_{1,1}^* & \cdots & \Phi_{n,n}^* \end{bmatrix} \quad (6)$$

, donde  $*$  denota el complejo conjugado. Consecuentemente, la matriz modal utilizada para la transformación de coordenadas, como se presenta en la ecuación (3) tiene la siguiente estructura:

$$\psi = \begin{bmatrix} \Phi_{n+1,1} & \cdots & \Phi_{n+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi_{2n,1} & \cdots & \Phi_{2n,n} \end{bmatrix} \quad (7)$$

. El desacoplo del sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales queda expresado como (Gawronski, 2004):

$$\bar{M}\ddot{q} + \bar{B}\dot{q} + \bar{K}q = \psi^T f \quad (8)$$

, donde:

$$\bar{M} = \psi^T M \psi, \quad \bar{B} = \psi^T B \psi, \quad \bar{K} = \psi^T K \psi \quad (9)$$

. Mutiplicando (8) por  $\bar{M}^{-1}$ , con el fin de normalizar respecto de la masa modal, se obtiene:

$$\ddot{q} + Z\dot{q} + \Omega q = \bar{M}^{-1} \psi^T f \quad (10)$$

, con:

$$Z = \begin{bmatrix} 2\zeta_1 \omega_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2\zeta_n \omega_n \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

. El modelo modal representado por (10) es especialmente útil en el área de la dinámica estructural dada su compatibilidad

con los modelos obtenidos usando técnicas de modelado por elemento finito, cuya aplicación permite asignar un modelo en el formato de (1) a las estructuras ingenieriles (Kattan, 2007; Gawronski, 2004), para posteriormente encontrar sus parámetros modales al resolver de manera numérica el problema propio definido en (4). El análisis modal experimental es el proceso de validar en un contexto de laboratorio (ambiente controlado), los valores numéricos de las frecuencias naturales o resonancias, usando actuadores electromecánicos y sensores, usualmente de velocidad, desplazamiento o aceleración y hacer un análisis posterior usando métodos y algoritmos numéricos como la transformada rápida de Fourier (FFT), como se describe en la literatura especializada en el tema como (Avitabile, 2017; Ewins, 2007).

### 3. Caso de estudio.

En esta sección se describe el análisis modal teórico y experimental de una viga de aluminio empotrada, como caso de estudio con la finalidad de determinar de manera experimental sus frecuencias naturales o resonancias usando tres diferentes señales de excitación, aplicadas a un actuador del tipo acústico-piezoeléctrico de bajo costo, en su configuración como fuente de vibraciones. Los actuadores piezoeléctricos se deforman como respuesta a un alto voltaje aplicado a sus terminales (Wang *et al.*, 2013), como se describe en la Figura 1, donde se muestran las dimensiones físicas del actuador utilizado. En la Tabla 1 se reportan los principales parámetros de la viga.

Tabla 1: Parámetros de la viga.

| Parámetro                      | Valor                                           |
|--------------------------------|-------------------------------------------------|
| Longitud                       | $L = 0.6 \text{ [m]}$                           |
| Densidad                       | $\rho = 2770 \text{ [Kg/m}^3\text{]}$           |
| Módulo de elasticidad          | $E = 69 \times 10^9 \text{ [Pa]}$               |
| Área de la sección transversal | $A = 4 \times 10^{-5} \text{ [m}^2\text{]}$     |
| Momento de inercia             | $I = 8.53 \times 10^{-12} \text{ [m}^4\text{]}$ |

En el punto central de la viga se encuentra adherido un actuador piezoeléctrico de las mismas características para aplicar una excitación de manera complementaria o para ser usado como sensor. Las señales de excitación se construyen de manera numérica y después son transmitidas a la tarjeta de adquisición y generación de señales. La respuesta del sistema es la aceleración en el extremo libre de la viga empotrada, la cual se adquiere a una tasa de 5000 muestras por segundo, usando un acelerómetro MEMS (del inglés Micro-Electro-Mechanical System) con una sensibilidad de 300 mV por g, donde  $1g = 9.81m/s^2$ . Cabe destacar que en trabajos como (Rufino-Arteaga y García-Pérez, 2025; Ragam y Devidas Saheb-raoji, 2019) se ha demostrado el buen desempeño de los acelerómetros del tipo MEM, en aplicaciones de análisis modal y de monitoreo de salud estructural. En la Figura 2 se muestra el diagrama a bloques de la plataforma experimental. El actuador piezoeléctrico adherido en un punto cercano al empotramiento es excitado por medio de un convertidor elevador de voltaje de señales de 10V pico-pico a 200V pico-pico, usando un conver-

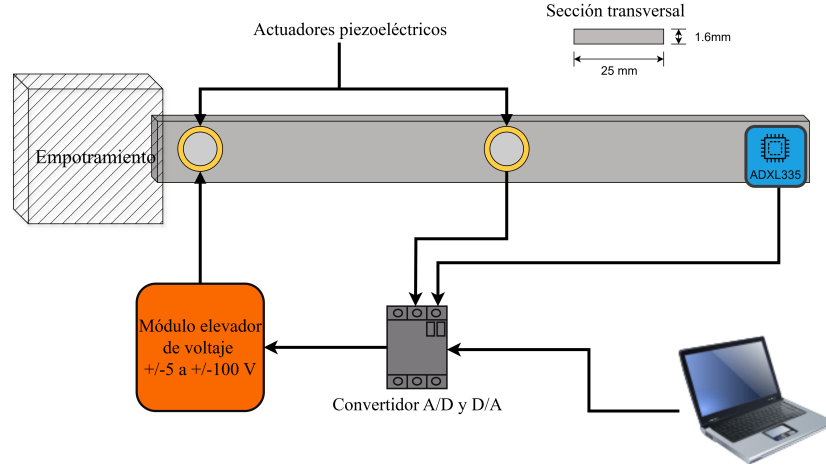


Figura 2: Montaje experimental.

tidor analógico digital de 10 bits de resolución a una frecuencia de muestreo de 5 KHz.

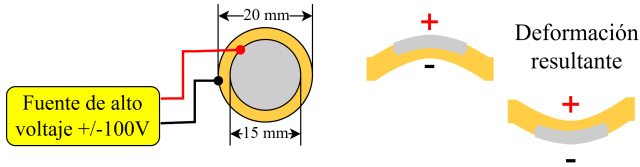


Figura 1: Actuador piezoeléctrico de bajo costo.

La generación del alto voltaje requerido para el buen desempeño del actuador acústico se consigue utilizando un circuito integrado especializado con número de parte DRV8662 que consta de los circuitos elevadores de voltaje necesarios para la amplificación estable y lineal de las señales del rango de -5 a 5 V al rango de -100 a 100 V.

### 3.1. Modelado matemático

El modelo matemático de la viga, usando la técnica del elemento finito consiste en una discretización en 8 elementos tipo viga, usando la teoría de Euler-Bernoulli. Cada elemento viga tiene una longitud  $l = L/8$ , considerando que  $L$  es la longitud total de la viga. En este trabajo se analizan solamente los desplazamientos de la viga en el eje perpendicular a la viga y las rotaciones respecto al eje  $z$ , como se describen en la Figura 3.

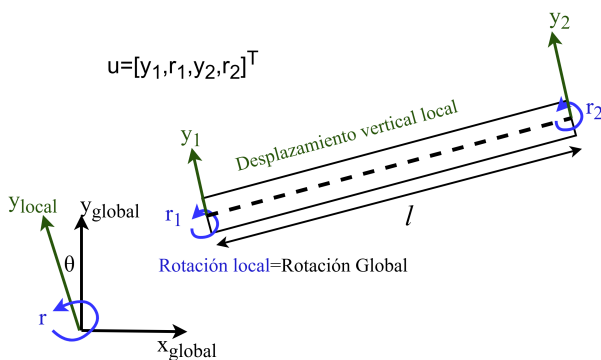


Figura 3: Coordenadas del elemento viga.

Esta simplificación se debe a que el actuador piezoeléctrico proporciona una excitación únicamente en el eje perpendicular a su colocación, es decir, no proporciona tracción en los extremos ni rotación, dando como resultado la posibilidad de usar un vector de desplazamientos  $u = [y_1, r_1, y_2, r_2]^T$ , donde  $y_i$ , con  $i = 1, 2$ , son los desplazamientos en los extremos de cada elemento viga y  $r_i$  las rotaciones respecto del eje  $z$ .

El modelo del elemento viga se encuentra ampliamente descrito en la literatura en trabajos como (Przemieniecki, 1985), donde se describe que las matrices de masa y rigidez de cada uno de los elementos viga se determinan como:

$$M_j = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$K_j = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

, donde  $L$  es la longitud de la viga,  $\rho$  es la densidad del material,  $A$  es el área de la sección transversal de la viga,  $I$  es el momento de inercia de  $y$  y  $E$  es el módulo de elasticidad del material considerando  $j = 1, 2, \dots, n$ , con  $n$  el número de elementos a considerar. Una forma de modelar la matriz de amortiguamiento es usar la definición de amortiguamiento proporcional, descrita en la literatura especializada (Ma, 2001), donde se determina el amortiguamiento como una combinación lineal de las matrices de masa y rigidez de la ecuación (1) con un esquema conocido como amortiguamiento de Rayleigh:

$$B = \alpha M + \beta K \quad (14)$$

Las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  se obtienen usando las relaciones:

$$\zeta_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2} \quad (15)$$

Es común asumir  $\alpha = 0$  ó  $\beta = 0$ , lo que da como resultado un modelo de amortiguamiento viscoso proporcional a la frecuencia de manera directa. Es importante mencionar que aún cuando  $\alpha$  y  $\beta$  no se calculan usando una expresión única, el uso de la matriz de amortiguamiento proporcional es común en el modelado por elemento finito, dado su buen comportamiento numérico en la solución del problema propio del modelo, expresado en (4). El modelo de elemento finito de la viga bajo análisis se construye imponiendo las condiciones de frontera empotrada-libre, de manera que cada una de las matrices de masa y rigidez se ensamblan de manera secuencial:

$$M_e = \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} & M_{1,4} & 0 & 0 \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} & M_{2,4} & 0 & 0 \\ M_{3,1} & M_{3,2} & M_{1,1} + M_{3,3} & M_{1,2} + M_{3,4} & M_{1,3} & M_{1,4} \\ M_{4,1} & M_{4,2} & M_{2,1} + M_{4,3} & M_{2,2} + M_{4,4} & M_{2,3} & M_{2,4} \\ 0 & 0 & M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} & M_{3,4} \\ 0 & 0 & M_{4,1} & M_{4,2} & M_{4,3} & M_{4,4} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$K_e = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} & K_{1,4} & 0 & 0 \\ K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,3} & K_{2,4} & 0 & 0 \\ K_{3,1} & K_{3,2} & K_{1,1} + K_{3,3} & K_{1,2} + K_{3,4} & K_{1,3} & K_{1,4} \\ K_{4,1} & K_{4,2} & K_{2,1} + K_{4,3} & K_{2,2} + K_{4,4} & K_{2,3} & K_{2,4} \\ 0 & 0 & K_{3,1} & K_{3,2} & K_{3,3} & K_{3,4} \\ 0 & 0 & K_{4,1} & K_{4,2} & K_{4,3} & K_{4,4} \end{bmatrix} \quad (17)$$

. Las matrices  $M_e$  y  $K_e$  describen los acoplamientos entre elementos viga adyacentes y en su conjunto conforman a la matriz global de masa  $M$ , equivalentemente, la matriz de rigidez total  $K$  se construye con los ensambles de las matrices de rigidez de cada elemento viga lo que da como resultado dos matrices diagonales formadas por las submatrices  $M_e$  y  $K_e$ .

$$M = \begin{bmatrix} \diagup & & \\ & M_e & \\ & & \diagdown \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} \diagup & & \\ & K_e & \\ & & \diagdown \end{bmatrix} \quad (18)$$

. Las matrices de masa y rigidez resultantes del proceso de ensamble descrito se sustituyen en (5). De la solución al problema propio resultante se extraen las frecuencias naturales teóricas, iguales a los valores propios del modelo del sistema vibratorio en forma matricial. El sensor de aceleración y los actuadores piezoeléctricos se incluyen en el modelo, considerando masas puntuales en el extremo y el punto medio de la viga, considerando masas de 4 gramos para el sensor de aceleración y 2 gramos para el actuador piezoeléctrico colocado en el centro, como se muestra en la Figura 2. Es importante mencionar que en el presente trabajo se considera una matriz de amortiguamiento proporcional igual a cero, debido a que la estructura bajo análisis se considera un sistema vibratorio poco amortiguado.

En la Figura 4 se presentan las 4 primeras formas modales obtenidas con el modelo de elemento finito, construido con 8 elementos viga, usando los parámetros descritos en la Tabla 1 y las matrices de masa y rigidez ensambladas con la estructura mostrada en (17). Las formas modales muestran los desplazamientos normalizados, usando los vectores propios del modelo obtenido.

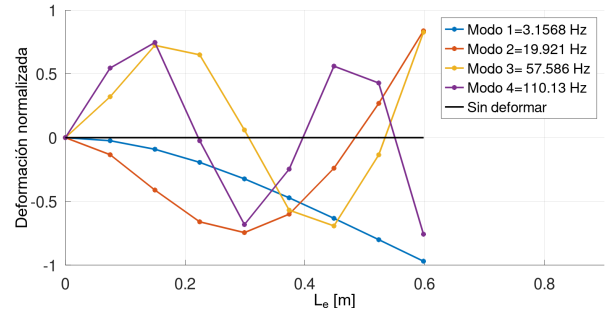


Figura 4: Primeras 4 formas modales analíticas.

A continuación se describen las señales utilizadas como excitación para la validación experimental de las frecuencias naturales, derivadas del modelo de elemento finito.

### 3.2. Barrido frecuencial

La primera señal de excitación aplicada consiste en un voltaje de frecuencia variable que obedece a la función chirp (Brandt, 2011b) del tipo lineal, esta función es comúnmente utilizada en el análisis modal experimental debido a que permite construir una fuente de excitación para los sistemas a partir de una señal sin discontinuidades que tiene un ancho de banda perfectamente acotado  $f \in [f_0, f_1]$  Hz, definida como:

$$v(t) = A \cos(\gamma(t)) [V] \quad (19)$$

, donde la función  $\gamma(t)$  que determina la frecuencia instantánea está dada por:

$$\gamma(t) = at^2 + 2\pi f_0 t + \phi_0 \quad (20)$$

, con  $f_0$  la frecuencia inicial,  $f_1$  la frecuencia final,  $a = \pi \frac{f_1 - f_0}{T}$ ,  $T$  es el periodo de tiempo en el que la frecuencia cubrirá el intervalo  $[f_0, f_1]$  y  $\phi_0$  es la fase inicial. Para la prueba de desempeño de la señal tipo barrido, se utilizaron los parámetros  $f_0 = 0$  Hz,  $f_1 = 500$  Hz,  $T = 180$  segundos,  $\phi_0 = 0$  rad y una amplitud  $A = 5$  V. En la Figura 5 se muestra la aceleración en el extremo de la viga, como respuesta al barrido frecuencial, se pueden observar claramente las resonancias dominantes.

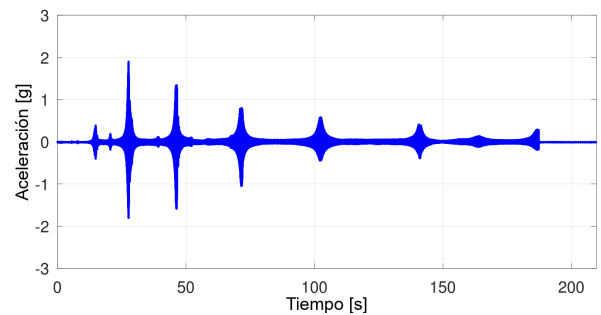


Figura 5: Respuesta del sistema a un Barrido frecuencial.

### 3.3. Señal aleatoria

La excitación del tipo aleatorio ha demostrado su efectividad en el análisis modal experimental debido a que contiene un ancho de banda amplio de manera inherente (Bahari et al., 2020). El método numérico usado para generar la señal aleatoria se basa en la distribución normal, con un valor máximo

de 5 V. La señal generada se activa y desactiva de forma aleatoria para generar el efecto de ráfagas de ruido aleatorio, con el fin de generar una señal de ancho de banda amplio, combinada con señales de decaimiento libre, al desactivar la fuente de excitación. La señal de decaimiento libre también contiene información de la dinámica de las estructuras como se reporta en la literatura especializada (Brincker y Ventura, 2015). En la Figura 6 se muestra la respuesta en aceleración de la viga ante la señal aleatoria tipo ráfaga. La señal se genera usando una distribución aleatoria que se activa y desactiva de forma manual sin seguir algún patrón en particular. La Figura 6 muestra la señal en el dominio del tiempo, como puede observarse, a diferencia del caso anterior, es imposible distinguir la información frecuencial de la señal sin hacer un post-procesamiento de la misma.

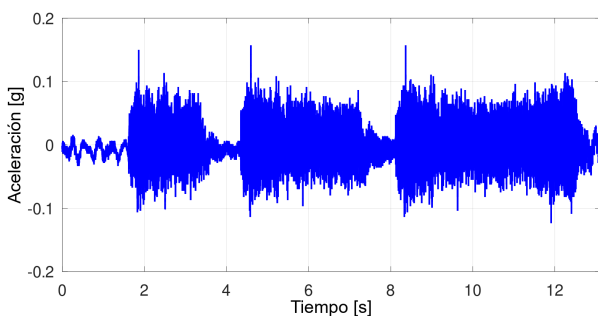


Figura 6: Respuesta a una fuerza tipo aleatoria.

### 3.4. Excitación tipo impacto.

La excitación tipo impacto permite emular la respuesta al impulso de los sistemas vibratorios. La respuesta de la viga bajo análisis se muestra en la Figura 7, donde la aceleración muestra un patrón compatible con la respuesta al impulso. La fuente de excitación consiste en un martillo de cabeza de hierro colado de dimensiones reducidas. La prueba se realizó de manera empírica, guardando la mejor respuesta de un conjunto de experimentos.

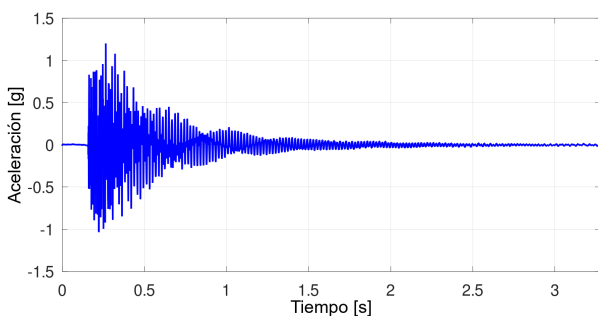


Figura 7: Respuesta del sistema a una excitación tipo impacto

A diferencia de la señal de salida exhibida por una excitación del tipo ráfaga aleatoria, es posible notar un patrón de decaimiento en las oscilaciones, sin embargo, tampoco es posible percibir el contenido frecuencial de la respuesta sin un post-procesamiento o transformación de los datos al dominio de la frecuencia.

## 4. Análisis de resultados

En esta sección se discuten los resultados obtenidos una vez procesadas las señales de salida de la viga-espécimen de prueba ante las diferentes señales de excitación. Los datos en el dominio del tiempo recolectados en los experimentos se analizaron usando el algoritmo de la FFT optimizado y la extracción de las frecuencias naturales o resonancias se realizó usando el método de peak picking, en el que se analizan los picos de las señales en el dominio de la frecuencia y el valor máximo se relaciona con la frecuencia natural (Avitabile, 2017; Ewins, 2007; He y Fu, 2001).

En la Figura 8 se presenta una comparación gráfica de las respuestas en frecuencia obtenidas con cada una de las tres señales de excitación. Es posible notar una gran similitud entre las curvas de respuesta obtenidas usando la señal de excitación aleatoria y el barrido sinusoidal, lo que indica que el ancho de banda de dichas señales es similar y excita las mismas resonancias o modos de vibración en la viga empotrada. En la Figura 8 se aprecia en color rojo la respuesta al impacto de la viga, para esta fuente de excitación se observa una amplitud en decibelios mayor, pero de un ancho de banda menos constante a pesar de la dureza de la cabeza de martillo que se utilizó en la prueba, sin embargo, se observan claros picos de resonancia en valores de frecuencia similares a los que se presentan con las señales de excitación tipo aleatoria y tipo barrido. El amortiguamiento modal presenta discrepancias entre las señales de respuesta que se obtienen al utilizar el actuador piezoeléctrico y la señal de respuesta obtenida usando el martillo de impacto. La comparación del parámetro modal del amortiguamiento no es parte del presente trabajo pero se considera como trabajo futuro.

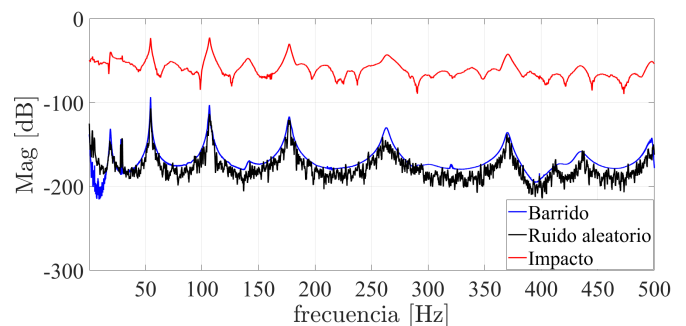


Figura 8: Comparativa de las curvas de respuesta en frecuencia.

En la Tabla 2 se presenta el resumen de los resultados obtenidos de manera experimental y analítica de las frecuencias naturales de la viga empotrada. En las curvas de respuesta en frecuencia se obtiene un total de 8 modos de vibración, mientras que el modelo matemático de la viga da como resultado 7 frecuencias naturales.

La frecuencia natural no modelada se presenta en las curvas de respuesta en frecuencia que resulta al aplicar las tres señales de excitación, sin embargo, su presencia es más notoria en las respuestas generadas con el uso del actuador piezoeléctrico como transductor electromecánico. La dinámica no modelada que produce la resonancia experimental de alrededor de 29 Hz, se atribuye al efecto en la dirección no modelada, omitida en el modelo de elemento finito, lo cual es un tema que está fuera

de los alcances del presente trabajo. El resto de las frecuencias naturales presenta discrepancias en las resonancias de mayor frecuencia, lo cual es aceptable considerando que se plantea un modelo de 8 elementos.

Es importante tomar en consideración que a pesar de que el actuador piezoeléctrico utilizado en los experimentos reportados es de naturaleza acústica, diseñado además para generar tonos agudos, lo que implica que está diseñado para operar en el rango de frecuencias superiores a los 100 Hz, presenta un desempeño satisfactorio en la generación de señales de excitación de baja frecuencia, lo cual queda evidenciado en las curvas de respuesta en frecuencia mostradas en la Figura 8.

Tabla 2: Tabla comparativa.

| Modo | Barrido | Frecuencia [Hz] |         |  | Modelo E.F. |
|------|---------|-----------------|---------|--|-------------|
|      |         | Aleatoria       | Impacto |  |             |
| 1    | 3.08    | 3.05            | 3.35    |  | 3.1568      |
| 2    | 19.06   | 19.22           | 19.28   |  | 19.921      |
| 3    | 29.44   | 28.91           | 29.06   |  | -           |
| 4    | 54.64   | 54.55           | 54.63   |  | 57.568      |
| 5    | 106.62  | 106.81          | 106.82  |  | 110.13      |
| 6    | 177.32  | 177.38          | 177.33  |  | 178.35      |
| 7    | 262.9   | 262.53          | 263.7   |  | 263.07      |
| 8    | 370.23  | 370.26          | 370.53  |  | 388         |

Como trabajo futuro se propone el análisis del comportamiento de la viga empotrada con el fin de determinar o cuantificar la influencia de los sensores y actuadores en su respuesta dinámica global y evaluar el desempeño de los actuadores piezoeléctricos acústicos en esquemas de absorción de vibraciones en estructuras diversas. Un trabajo futuro importante es la caracterización de la fuerza generada por el actuador en función del voltaje que recibe en sus terminales para completar una validación de los modelos modales, haciendo uso de la fuerza de entrada al sistema.

## 5. Conclusiones

Los actuadores piezoeléctricos de bajo costo son una alternativa prometedora para la aplicación de señales de excitación en esquemas de análisis modal experimental. Con base en los resultados obtenidos de la validación experimental de frecuencias naturales por medio del enfoque de elemento finito, en conjunto con la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, se logró como aportación principal la comprobación de la eficacia de los actuadores propuestos en un ancho de banda adecuado para su uso en esquemas de análisis modal experimental en estructuras mecánicas poco amortiguadas, además, se descubrió su potencial aplicación como transductores para generar excitación en estructuras construidas con materiales compuestos, que no admiten pruebas con excitación tipo impacto, debido a su fragilidad inherente, dado que los actuadores piezoeléctricos son una excelente opción para preservar su integridad estructural, tomando en consideración sus limitaciones en cuanto a la fuerza que pueden proporcionar. En este trabajo se utilizaron dos

señales de excitación modeladas por dos expresiones matemáticas diferentes, construidas de forma numérica, usando un circuito integrado especializado para comprobar su desempeño en la reproducción de las señales deseadas. El análisis de una viga es el punto de partida o calibración para la aplicación de nuevas tecnologías y metodologías de análisis modal experimental, esquemas de absorción de vibraciones y de monitoreo de salud estructural.

## Referencias

- Avitabile, P. (2017). Modal testing. En *Modal Testing: A Practitioner's Guide*, capítulo 1, pp. 1–35. John Wiley & Sons, Ltd.
- Bahari, A. R., Yunus, M. A., Abdul Rani, M. N., Wan Iskandar Mirza, W. I. I., y Nuawi, M. Z. (2020). Experimental assessment of nonlinear modal behaviour of flexible beam. En Rajendran, P., Mazlan, N. M., Rahman, A. A. A., Suhadis, N. M., Razak, N. A., y Abidin, M. S. Z., editores, *Proceedings of International Conference of Aerospace and Mechanical Engineering 2019*, pp. 601–608, Singapore. Springer Singapore.
- Brandt, A. (2011a). Modal analysis theory. En *Noise and Vibration Analysis: Signal Analysis and Experimental Procedures*, capítulo 6, pp. 119–146. John Wiley & Sons, Ltd.
- Brandt, A. (2011b). Single-input frequency response measurements. En *Noise and Vibration Analysis: Signal Analysis and Experimental Procedures*, capítulo 13, pp. 285–322. John Wiley & Sons, Ltd.
- Brincker, R. y Ventura, C. E. (2015). Introduction. En *Introduction to Operational Modal Analysis*, capítulo 1, pp. 1–16. John Wiley & Sons, Ltd.
- Ewins, D. J. (2007). Modal analysis and modal testing. En *Handbook of Noise and Vibration Control*, capítulo 47, pp. 565–574. John Wiley & Sons, Ltd.
- Gawronski, W. K. (2004). Standard models. En Gawronski, W. K., editor, *Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures*, capítulo 2, pp. 13–40. Springer New York, New York, NY.
- He, J. y Fu, Z.-F. (2001). *Modal analysis*. Butterworth-Heinemann, Oxford, primera edición.
- Heylen, W., Lammens, S., y Sas, P. (2003). *Modal Analysis Theory and Testing*. Katholieke Universiteit Leuven, Faculty of Engineering, Department of Mechanical Engineering, Division of Production Engineering, Machine Design and Automation.
- Kattan, P. I. (2007). *MATLAB Guide to Finite Elements: An Interactive Approach*. Springer Publishing Company, Incorporated, segunda edición.
- Ma, F. (2001). Linear damping matrix methods. En Braun, S., editor, *Encyclopedia of Vibration*, pp. 721–726. Elsevier, Oxford.
- Piana, G., Brunetti, M., Carpinteri, A., Malvano, R., Manuello, A., y Paolone, A. (2016). On the use of piezoelectric sensors for experimental modal analysis. En Song, B., Lamberson, L., Casem, D., y Kimberley, J., editores, *Dynamic Behavior of Materials, Volume 1*, pp. 113–121, Cham. Springer International Publishing.
- Przemieniecki, J. (1985). *Theory of Matrix Structural Analysis*. Dover Civil and Mechanical Engineering, Dover.
- Ragam, P. y Devidas Sahebraoji, N. (2019). Application of mems-based accelerometer wireless sensor systems for monitoring of blast-induced ground vibration and structural health: a review. *IET Wireless Sensor Systems*, 9(3):103–109.
- Rufino-Arteaga, O. E. y García-Pérez, O. A. (2025). Análisis modal experimental en un prototipo de la semiala de un avión usando equipo de bajo costo. *PÁDI Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, 12:28–39.
- Sanchez-Villegas, H. S., Trujillo-Franco, L. G., Abundis-Fong, H. F., y Silva-Navarro, G. (2024). On the evaluation of low-cost piezoelectric sensors in modal testing: A case study. En *2024 21st International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, pp. 1–4.
- Silva-Navarro, G., Beltran-Carbajal, F., Trujillo-Franco, L. G., Peza-Solis, J. F., y Garcia-Perez, O. A. (2021). Online estimation techniques for natural and excitation frequencies on mdof vibrating mechanical systems. *Actuators*, 10(3).
- Wang, W.-M., Huang, K.-Y., Huang, H.-F., Hwang, I.-S., y Hwu, E.-T. (2013). Low-voltage and high-performance buzzer-scanner based streamlined atomic force microscope system. *Nanotechnology*, 24(45):455503.