

Identificación de un robot suave usando operadores de Koopman Soft robot identification using Koopman operators

J.S. Palacios-Lazo ^{a,*}, R. Galván-Guerra ^b, P.A. Niño-Suárez ^a, J.E. Velázquez-Velázquez ^b, E. Ortiz-Ortiz ^c

^aEscuela Superior de Ingeniería Mecánica Eléctrica Unidad Azcapotzalco, Instituto Politécnico Nacional, 02250, CDMX, México.

^bUnidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería Campus Hidalgo, Instituto Politécnico Nacional, 42162, Hidalgo, México.

^cCentro de Innovación y Desarrollo Tecnológico en Cómputo, Instituto Politécnico Nacional, 07738, CDMX, México.

Resumen

La identificación de modelos dinámicos en robótica suave continúa siendo un desafío debido a la naturaleza no lineal y a los múltiples grados de libertad de estos sistemas. En este trabajo se presenta un enfoque basado en operadores de Koopman para obtener representaciones lineales de un actuador neumático suave tipo PneuNet con deformación unidireccional. Se consideran dos estructuras de modelado: un modelo con estado extendido, donde la entrada se incorpora como un estado adicional, y un modelo con entrada afín. Para ello, se implementó una plataforma experimental que integra un sistema neumático regulado, sensores de presión y un actuador con un láser que proyecta su movimiento sobre una superficie. Las coordenadas del haz de luz, capturadas mediante una cámara RealSense, se emplean como datos de salida, mientras que la presión suministrada constituye la entrada. Los resultados muestran que ambos modelos reproducen adecuadamente la dinámica entrada-salida, ofreciendo un balance entre precisión y complejidad computacional, logrando una ligera mejora con el modelo de estado extendido.

Palabras Clave: Operadores de Koopman, Identificación, Robótica suave

Abstract

Dynamic model identification in soft robotics remains a challenge due to the nonlinear nature and multiple degrees of freedom of these systems. This work presents a Koopman operator-based approach to obtain linear representations of a unidirectional deformation PneuNet-type pneumatic soft actuator. Two modeling structures are considered: an extended-state model, where the input is incorporated as an additional state, and an input-affine model. An experimental platform was developed, integrating a regulated pneumatic system, pressure sensors, and an actuator equipped with a laser projecting its motion onto a surface. The laser beam coordinates, captured with a RealSense camera, are used as system outputs, while the supplied pressure serves as the input. Results show that both models accurately reproduce the input-output dynamics, providing a trade-off between accuracy and computational cost. The extended-state model achieves a slightly better state estimation, whereas the input-affine model is computationally more efficient, confirming the suitability of Koopman-based methods for soft robotics.

Keywords: Koopman Operators, Identification, Soft Robotics

1. Introducción

La robótica suave es un área que se encuentra en crecimiento debido a su capacidad de interactuar con entornos inciertos y objetos delicados de forma segura y adaptable (Rus y Tolley, 2015). No obstante, el modelado dinámico de estos sistemas sigue siendo un reto debido a su comportamiento no lineal, continuo y deformable (Polygerinos *et al.*, 2013; Korda y Mezić, 2018). Particularmente, los actuadores neumáticos tipo PneuNet (Pneumatic Network por sus siglas en inglés) presentan

múltiples grados de libertad derivados de la geometría compleja y los materiales elastoméricos utilizados en su fabricación, que dificultan el uso de modelos físicos basados en ecuaciones diferenciales parciales (Shi *et al.*, 2023).

Los enfoques convencionales para el modelado de sistemas suaves incluyen marcos analíticos como la cinemática de curvatura constante (Della Santina y Rus, 2019; Della Santina, 2020), la teoría de varillas de Cosserat (Trivedi *et al.*, 2008) y métodos de elementos finitos (Shi *et al.*, 2023). Estos métodos, aunque

*Autor para correspondencia: jpalaciosl2300@alumno.ipn.mx

Correo electrónico: jpalaciosl2300@alumno.ipn.mx (Jim Steven Palacios-Lazo), rgalang@ipn.mx (Rosalba Galván-Guerra), pninos@ipn.mx (Paola Andrea Niño-Suárez), jvelazquezv@ipn.mx (Juan Eduardo Velázquez-Velázquez), eortizo1901@alumno.ipn.mx (Emanuel Ortiz-Ortiz)

Historial del manuscrito: recibido el 17/07/2025, última versión-revisada recibida el 19/10/2025, aceptado el 14/10/2025, publicado el 25/03/2026. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v14iEspecial.15510>



efectivos, requieren una caracterización física bastante precisa y gran capacidad computacional. Como alternativa, se han explorado métodos de identificación de sistemas basados en datos (Chen *et al.*, 2025; Quevedo *et al.*, 2021), tales como redes neuronales (Giorelli *et al.*, 2013; Yoon *et al.*, 2024), regresión gaussiana (Relaño *et al.*, 2023) y técnicas iterativas (Shi *et al.*, 2023). Sin embargo, estos enfoques presentan limitaciones relacionadas con la interpretabilidad del modelo y la generalización frente a perturbaciones.

En este contexto, los operadores de Koopman han emergido como una herramienta poderosa para representar sistemas no lineales como sistemas lineales en un espacio elevado de funciones observables (Williams *et al.*, 2015; Mauroy y Mezić, 2016). Esta reformulación lineal permite aplicar herramientas del control lineal a sistemas inherentemente no lineales. En robótica suave, este enfoque ha demostrado utilidad en la identificación de dinámica de brazos neumáticos (Bruder *et al.*, 2019b), control mediante descomposición de modos dinámicos (Proctor *et al.*, 2016) y control predictivo basado en modelos (MPC) (Bruder *et al.*, 2020, 2021).

Además, se han desarrollado marcos específicos para la robótica suave que contemplan el diseño de funciones de levantamiento de datos, el tratamiento de entradas y la reducción del modelo (Shi *et al.*, 2023; Haggerty *et al.*, 2020). La extensión de la teoría de Koopman a sistemas con entrada ha sido abordada mediante técnicas como Extended Dynamic Mode Decomposition with Control (EDMDc) (Proctor *et al.*, 2018a), permitiendo modelar sistemas de control afín o considerando la entrada como parte del estado.

La literatura muestra que tanto modelos afines como aquellos con estado extendido pueden usarse para representar la dinámica entrada-salida de robots suaves, pero con distintas implicaciones computacionales y estructurales (Proctor *et al.*, 2018a; Haggerty *et al.*, 2020; Bruder *et al.*, 2019a).

En este trabajo se propone un estudio comparativo entre dos estructuras de modelado mediante operadores de Koopman: un modelo con entrada afín y un modelo con estado extendido, aplicados a un actuador neumático suave tipo PneuNet con una sola cavidad y deformación unidireccional. Se implementa una plataforma experimental, se capturan datos reales y se construyen representaciones lineales de la dinámica entrada-salida del sistema. La comparación entre ambos enfoques se realiza en términos de la raíz del error medio cuadrático (RMSE) y de la complejidad computacional asociada.

El resto del artículo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2, se presenta los preliminares matemáticos de la teoría de los operadores de Koopman. La formulación del problema se expone en la Sección 3. La sección 4, describe el diseño experimental de la plataforma de pruebas. Finalmente se presentan en la Sección 5 los Resultados obtenidos y la Sección 6 concluye el artículo.

2. Preliminares Matemáticos

2.1. Operador de Koopman

La teoría del operador de Koopman ha emergido como una herramienta poderosa para analizar y modelar sistemas dinámicos no lineales mediante representaciones lineales en espacios elevados. Su principal aporte radica en que, aunque el sistema

original es no lineal, su evolución puede describirse linealmente en un espacio de funciones observables (Mauroy *et al.*, 2020).

Dado un sistema dinámico discreto:

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad (1)$$

el operador de Koopman actúa sobre funciones observables $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, lo que permite analizar la evolución del sistema observando cómo evolucionan funciones del estado en lugar del estado directamente. Se define como:

$$\mathcal{K}g(x) = g(F(x)),$$

donde $x \in \mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$ son las variables de estado del sistema en $t > 0$ y $\mathbf{F}(x)$ es un campo vectorial polinomial no conocido a priori, sino propuesto a partir de datos. Se considera que la dinámica real del sistema, como la de un robot suave, está gobernada por ecuaciones en derivadas parciales. Sin embargo, se supone que esta dinámica puede aproximarse mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, cuya forma puede plantearse bajo dos estructuras distintas, descritas más adelante.

El objetivo del método de identificación es determinar una representación aproximada del campo vectorial $\mathbf{F}$ a partir de un conjunto de K pares de mediciones instantáneas experimentales (snapshot pairs) de las trayectorias del sistema, del tipo $(a_k, b_k) \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ para cada $k \in \{1, \dots, K\}$:

$$\begin{aligned} a_k &= x_k + \sigma_k \\ b_k &= \varphi_{T_s}(x_k) + \lambda_k, \end{aligned} \quad (2)$$

donde x_k corresponde al estado medido en la k -ésima observación, σ_k y λ_k representan el ruido de medición, modelado como una variable aleatoria gaussiana con media 0 y desviación estándar dada. T_s es el periodo de muestreo. Además, los pares (a_k, b_k) pueden provenir de distintas trayectorias del sistema.

Una de las ventajas del enfoque del operador de Koopman frente a métodos de identificación de caja negra (como redes neuronales) es que permite obtener un modelo explícito e interpretable, con estructura lineal, adecuado para análisis y diseño de controladores. Además, no requiere derivadas temporales, lo que lo hace aplicable incluso con datos de baja frecuencia de muestreo (Bruder *et al.*, 2019a; Mauroy y Goncalves, 2020).

2.2. Representación en el espacio elevado

En lugar de trabajar directamente con la dinámica no lineal en el espacio de estados, se eleva el sistema a un espacio de funciones observables $\mathcal{F}$, típicamente un espacio de Hilbert (Proctor *et al.*, 2018b). En este espacio, la dinámica no lineal del sistema (1) puede representarse mediante un operador lineal de dimensión infinita $\mathcal{K}$, definido como un operador de composición:

$$\mathcal{K}g = g \circ F.$$

Así, la evolución temporal de las observables g a lo largo de una trayectoria del sistema se define como:

$$g(x_{k+1}) = \mathcal{K}g(x_k), \quad (3)$$

lo que permite interpretar la dinámica como una evolución lineal en el espacio de funciones, incluso si la dinámica del estado original es no lineal.

2.3. Relación con DMD, EDMD y sistemas con entradas

El trabajo de (Proctor *et al.*, 2018b) extiende la teoría de Koopman a sistemas no autónomos, es decir, con entradas externas. En este contexto, se consideran dos estructuras dinámicas.

Caso de estado extendido. Cuando la entrada varía en el tiempo de forma general, Proctor *et al.* proponen definir las observables como funciones tanto del estado como de la entrada:

$$x_{k+1} = F(x_k, u_k), \quad (4)$$

y el levantamiento de los datos se aplica a funciones de (x_k, u_k) , por lo que (3) se extiende a la forma:

$$g(x_{k+1}, u_{k+1}) \triangleq \mathcal{K}g(x_k, u_k), \quad (5)$$

donde las entradas se consideran como un estado adicional. Esto implica que el operador de Koopman actúa sobre un espacio extendido de dimensión $n + p$ y requiere conocer o modelar también la evolución de la entrada. La aproximación del campo vectorial de (4) en este caso se propone como una combinación lineal de observables evaluadas en el par $([a_k, u_k], [b_k, u_k])$:

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^N \omega_i g_i(x_k, u_k). \quad (6)$$

Caso de entrada afín. Cuando la dinámica del sistema es afín en la entrada:

$$x_{k+1} = F(x_k) + B(x_k)u_k, \quad (7)$$

es posible estructurar el levantamiento de forma que la acción de la entrada se represente separadamente. En este caso, se modela:

$$g(F(x_k, u_k), 0) \triangleq \mathcal{K}g(x_k, u_k),$$

donde el operador no intenta predecir una entrada futura, sino que propaga las observables futuras que dependen únicamente del estado. El campo vectorial de (7) se propone entonces como:

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^N \omega_i g_i(x_k) + \omega_{N+1} u_k, \quad (8)$$

donde ω_i representa los coeficientes (o pesos) a identificar en cada modelo, N es el número de funciones observables definido más adelante, y el procedimiento para calcular los ω_i se describe en la sección 2.3.2.

2.3.1. Levantamiento de los datos

Teóricamente, el operador de Koopman trabaja en un espacio infinito-dimensional de observables $\mathcal{F}$. Sin embargo, para su implementación numérica es necesario definir una cantidad finita $N > n$ de funciones observables $\{g_i\}_{i=1}^N \in \mathcal{F}_N \subset \mathcal{F}$.

Asumiendo que el campo vectorial es polinomial, se selecciona una base de monomios de la forma:

$$g_i(x) \in \{x_1^{s_1} \cdots x_n^{s_n} \mid (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{N}^n, s_1 + \cdots + s_n \leq m\},$$

donde m es el grado total de los monomios. El número de observables se calcula con:

$$N = \zeta(n, m) := \frac{(n+m)!}{n!m!}, \quad (9)$$

y se define la función de elevación $\mathbf{P} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ como:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_N(x) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

En sistemas con entrada variable en el tiempo, se forman pares de datos $([a_k, u_k], [b_k, u_k]) \in \mathbb{R}^{(n+p) \times 2}$. Estos datos se elevan mediante (10) y se organizan en las matrices:

$$\Psi_a := \begin{bmatrix} \mathbf{P}(a[1])^\top \\ \vdots \\ \mathbf{P}(a[K])^\top \end{bmatrix}, \Psi_b := \begin{bmatrix} \mathbf{P}(b[1])^\top \\ \vdots \\ \mathbf{P}(b[K])^\top \end{bmatrix}, \quad \Psi_a, \Psi_b \in \mathbb{R}^{K \times N}. \quad (11)$$

Para sistemas afines en la entrada, la elevación se modifica para mantener u_k lineal, sin incluirla en la base no lineal. En este caso, los datos se elevan como:

$$\gamma[k] = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(a[k]) \\ u[k] \end{bmatrix}, \quad \delta[k] := \begin{bmatrix} \mathbf{P}(b[k]) \\ u[k] \end{bmatrix},$$

y se organizan en las matrices:

$$\Psi_\gamma := \begin{bmatrix} \gamma[1]^\top \\ \vdots \\ \gamma[K]^\top \end{bmatrix}, \quad \Psi_\delta := \begin{bmatrix} \delta[1]^\top \\ \vdots \\ \delta[K]^\top \end{bmatrix}, \quad \Psi_\gamma, \Psi_\delta \in \mathbb{R}^{K \times (N+p)}. \quad (12)$$

Posteriormente, se identifica el operador de Koopman $\mathcal{K}$ para $t = T_s$, restringido a un rango finito denotado como $\mathcal{K}_N : \mathcal{F}_N \rightarrow \mathcal{F}_N$, elegido para proporcionar el mejor ajuste por mínimos cuadrados a los datos observados. Usando (11) o (12), dependiendo del modelo utilizado, se calcula $\mathcal{K}_N$ como (Bruder *et al.*, 2019a):

$$\mathcal{K}_N := \Psi_a^\dagger \Psi_b \quad \text{o} \quad \mathcal{K}_N := \Psi_\gamma^\dagger \Psi_\delta. \quad (13)$$

2.3.2. Identificación del campo vectorial

Una vez estimado el operador de Koopman en un espacio de dimensión finita, es posible identificar los coeficientes ω_i del campo vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1, \dots, F_n)^\top$, representado como una combinación lineal de funciones base (9), cuya estructura depende del tipo de sistema considerado según los casos (6) y (8).

Denotando ω_k^j como el k -ésimo coeficiente asociado a la j -ésima componente del campo vectorial, el problema de identificación se reduce a encontrar nN coeficientes ω_k^j .

Para ello, se seleccionan índices $l \in \{1, \dots, N\}$ tales que la función base $p_l(x)$ coincide con la j -ésima componente del estado, es decir, $p_l(x) = x_j$. Estas funciones actúan como extractores de cada variable de estado.

Dado un índice l que cumple esta condición, los coeficientes se obtienen directamente de la matriz del operador de Koopman estimado mediante:

$$\hat{\omega}_k^j = [\mathcal{K}_N]_{kl}. \quad (14)$$

2.4. Algoritmos

Los métodos de elevación utilizados en la identificación del sistema según los casos de entrada extendida y entrada afín se resumen en los Algoritmo 1 y 2 respectivamente.

Algorithm 1 Método principal de elevación para la identificación de sistemas no lineales con **estado extendido**.

```

1: Definir  $m, n, p, K$ 
2: Calcular  $N = \zeta(n + p, m)$  según (9) y base  $\{g_i(x, u)\}_{i=1}^N$ 
3: for  $k = 1$  to  $K$  do
4:   Medir  $a_k = [x_k, u_k]$ ,  $b_k = [x_{k+1}, u_{k+1}]$  (2)
5:   Calcular  $\mathbf{P}(a_k, u_k)$  y  $\mathbf{P}(b_k, u_k)$  (10)
6: end for
7: Construir  $\Psi_a, \Psi_b$ 
8: Calcular  $\mathcal{K}_N = \Psi_a^\dagger \Psi_b$ 
9: for  $j = 1$  to  $n$  do
10:  Buscar  $l$  tal que  $p_l(x, u) = x_j$ 
11:  Obtener  $\omega_i^j = [\mathcal{K}_N]_{il}$  para  $i = 1, \dots, N$ 
12: end for

```

Algorithm 2 Método principal de elevación para la identificación de sistemas no lineales con **entrada afín**.

```

1: Definir  $m, n, p, K$ 
2: Calcular  $N = \zeta(n, m)$  según (9) y base  $\{g_i(x)\}_{i=1}^N$ 
3: for  $k = 1$  to  $K$  do
4:   Medir  $a_k = x_k$ ,  $b_k = x_{k+1}$  y  $u_k$ 
5:   Calcular  $\gamma_k = [\mathbf{P}(a_k); u_k]$ ,  $\delta_k = [\mathbf{P}(b_k); u_k]$ 
6: end for
7: Construir  $\Psi_\gamma, \Psi_\delta$  con (12)
8: Calcular  $\mathcal{K}_N = \Psi_\gamma^\dagger \Psi_\delta$ 
9: for  $j = 1$  to  $n$  do
10:  Buscar  $l$  tal que  $p_l(x) = x_j$ 
11:  Obtener  $\omega_i^j = [\mathcal{K}_N]_{il}$  para  $i = 1, \dots, N$ 
12: end for

```

3. Formulación del problema

En la robótica suave, uno de los principales desafíos es desarrollar modelos dinámicos que describan adecuadamente el comportamiento de actuadores como los PneuNet. Estos dispositivos presentan deformaciones complejas, continuas y no lineales, lo que dificulta el uso de modelos físicos tradicionales. Una representación completa de su dinámica requeriría recurrir a ecuaciones en derivadas parciales y disponer de información detallada sobre la geometría y los materiales.

Este trabajo se centra en la identificación de la dinámica entrada-salida de un actuador PneuNet mediante un enfoque basado en datos, evitando el uso de modelos físicos explícitos. El objetivo es caracterizar la evolución temporal del sistema a partir de datos experimentales de la presión (entrada) y posición (salida), considerando señales de entrada variables en el tiempo.

Un aspecto crítico de este enfoque es la selección de la estructura adecuada para representar la dinámica: un modelo donde la entrada actúe de forma afín, o bien uno en el que la entrada influya directamente en la evolución de los eigenvalores del sistema. Esta decisión afecta la aplicabilidad del modelo en tareas

de control, donde asumir entradas constantes resulta poco realista.

Para abordar este problema, se emplea el operador de Koopman, el cual permite aproximar sistemas no lineales en un espacio de funciones observables mediante un operador lineal. A través de la elevación de los datos experimentales, se identifican y comparan ambas estructuras, con el fin de determinar cuál ofrece un mejor desempeño en la representación de la dinámica entrada-salida de un actuador PneuNet.

4. Descripción del robot suave neumático

Se desarrolló un actuador neumático suave tipo PneuNet junto con una plataforma experimental diseñada para recopilar datos bajo diferentes condiciones de operación. El actuador fue fabricado mediante impresión 3D por estereolitografía (SLA), utilizando resina elástica 50A V2. Su diseño CAD, realizado en CATIA V5, consta de diez cámaras internas interconectadas por una única cavidad, lo que permite controlar el movimiento mediante una sola entrada neumática (ver Figura 1).

El actuador se encuentra suspendido desde su extremo superior en un soporte fijo, mientras que en el extremo inferior se acopla un diodo láser que proyecta un haz sobre una superficie plana, lo que permite registrar sus desplazamientos.

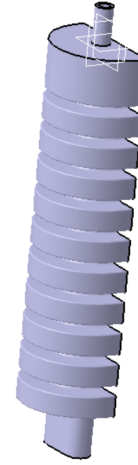


Figura 1: Actuador neumático suave de una sola cavidad fabricado mediante impresión 3D por estereolitografía.

La plataforma experimental empleada para este trabajo está compuesta por los siguientes elementos:

- Una cámara Intel RealSense utilizada como sensor exteroceptivo, encargada de capturar la posición del punto láser.
- Un sistema neumático capaz de generar presiones reguladas dentro del rango de operación requerido.

La Figura 2 muestra la plataforma de pruebas utilizada para la adquisición de datos.

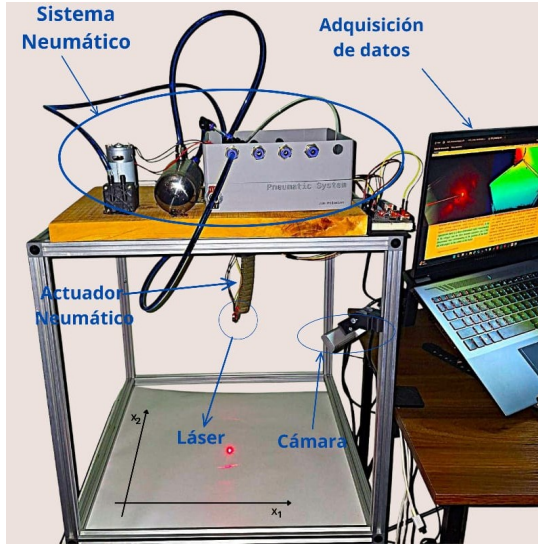


Figura 2: Plataforma experimental utilizada para la identificación del robot suave.

Durante las pruebas, el haz del láser se proyecta sobre una superficie plana de $45 \text{ cm} \times 45 \text{ cm}$, situada a 30 cm por debajo de la posición inicial del láser. Las coordenadas del punto sobre esta superficie son capturadas por la cámara, la cual se encuentra montada en una posición elevada y lateral respecto al plano de proyección.

Con el fin de garantizar que el haz del láser permanezca dentro de los límites del tablero durante las pruebas, las deformaciones del actuador se controlan regulando las presiones de entrada en un rango de $[5, 20] \text{ kPa}$. Este control se implementa mediante un esquema combinado: un controlador PID para la bomba de presión y un controlador por modos deslizantes de primer orden para la válvula. En este contexto, el sistema se modela con una única entrada (la presión) y un estado bidimensional, correspondiente a la posición del punto láser en el plano.

4.1. Configuración de la entrada

Para excitar el sistema se utiliza una señal de entrada sinusoidal definida por:

$$u[k] = \frac{1}{2}A(1 + \sin(2\pi T_s t)), \quad (15)$$

donde A es una amplitud seleccionada aleatoriamente dentro del rango de 5 a 20 kPa y $T_s = 0.016 \text{ s}$ corresponde al periodo de muestreo. Bajo esta excitación, el actuador genera trayectorias rectilíneas de distinta longitud, en función de la presión ($u[k]$) aplicada. Las trayectorias descritas por el apuntador láser son obtenidas directamente de la cámara. La forma de estas trayectorias está directamente relacionada con la geometría del actuador, que le permite deformarse en una sola dirección, de modo que la proyección del láser sobre la superficie describe una línea recta.

5. Resultados Experimentales

Para llevar a cabo la identificación del modelo dinámico del sistema mediante operadores de Koopman, se construyó un conjunto de K pares de instantáneas de la forma

$([a_k, u_k], [b_k, u_k])$, capturados cada T_s segundos a lo largo de 350 trayectorias experimentales. El número de trayectorias se determinó de manera empírica; sin embargo, este debe ser suficientemente amplio para garantizar un modelo preciso, ya que una cantidad reducida de pares de datos puede conducir al fallo del método. Las condiciones iniciales de cada trayectoria estuvieron definidas por la entrada $u[k]$, en particular por la amplitud A , la cual selecciona aleatoriamente una presión inicial en el rango de $[5, 20] \text{ kPa}$ en $t = 0$. En consecuencia, las condiciones iniciales de la entrada se encuentran en el intervalo $[2.5, 10]$, lo que da lugar a trayectorias con perfiles similares pero de distinta magnitud.

La Figura 3 presenta una toma instantánea de la adquisición de datos de salida, capturado por la cámara Intel RealSense, donde se observa la posición del punto láser en un instante específico de la trayectoria. Cabe resaltar que la posición (x, y) en coordenadas cartesianas corresponde a las variables x_1 y x_2 utilizadas mas adelante.

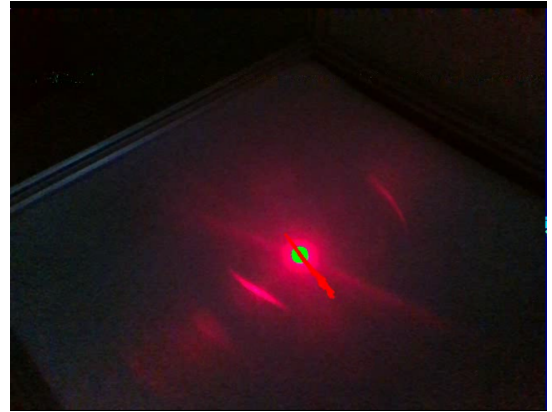


Figura 3: Captura de la posición del punto láser mediante una cámara Intel RealSense.

Nota: Cabe resaltar que debido a la disparidad entre las frecuencias de muestreo de los sensores utilizados, la cámara que opera a 60 fps (aproximadamente 16.67 ms), y el sensor de presión que presenta un tiempo de respuesta del orden de 2.5 ms , los datos de presión se marcaron con *timestamps* y posteriormente se interpolaron o promediaron con el fin de alinearlos con cada captura de la cámara. De esta forma, fue posible sincronizar adecuadamente las señales de entrada y salida durante el procesamiento fuera de línea.

5.1. Identificación del modelo de Koopman

A partir de los datos experimentales obtenidos, se realizó la identificación del modelo dinámico utilizando los algoritmos 1 y 2, en los cuales se implementaron las ecuaciones presentadas en la Sección 2, empleando el entorno de MATLAB. En total, se utilizaron 176141 pares de datos de la forma $([a_k, u_k], [b_k, u_k])$. Para elevar los datos al espacio de observables se evaluaron distintas bases de monomios $g_i(x)$, variando sus grados máximos m entre 2 y 12. El objetivo fue analizar el impacto de la complejidad de la base en el desempeño del modelo.

La exactitud de cada modelo se evaluó mediante la raíz del error cuadrático medio (RMSE, por sus siglas en inglés), cuantificando así la calidad del ajuste en la reconstrucción de los

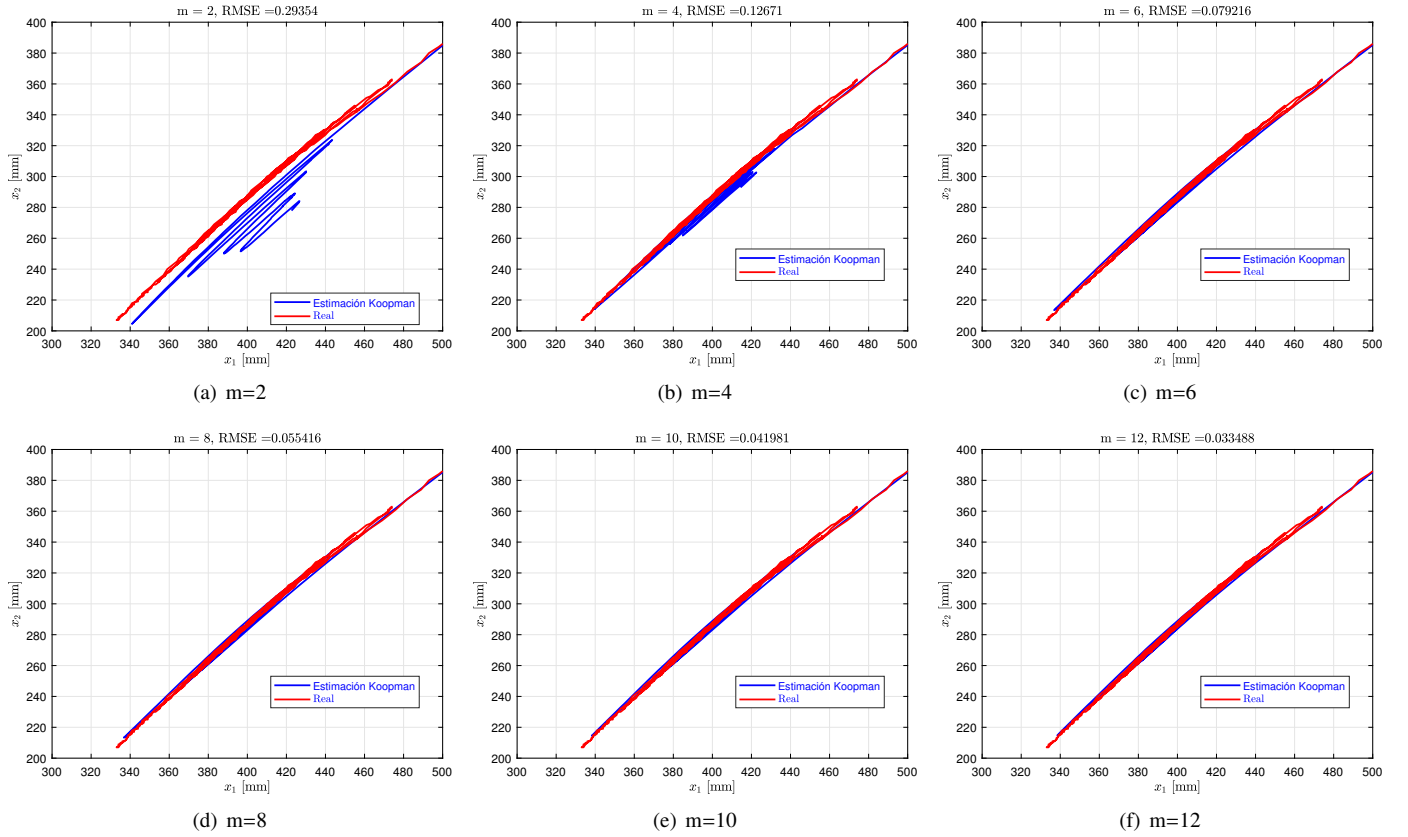


Figura 4: Identificación de la dinámica entrada-salida utilizando el modelo de estado extendido para diferentes grados máximos de polinomio (m).

estados x_1 y x_2 del actuador neumático suave (Mauroy y Gonçalves, 2020):

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{nN} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^N (a_k - \bar{a}_k)^2}. \quad (16)$$

En el caso del modelo de estado extendido, la Figura 4 muestra la comparación entre las salidas medidas y las estimadas para cada grado máximo considerado. El polinomio de grado 8 se seleccionó como el más adecuado, al ofrecer un balance entre reducción del RMSE y costo computacional. Para este grado, el RMSE obtenido fue de 5.54×10^{-2} . En el modelo con entrada afín también se evaluó el desempeño de cada base. En este caso, la cantidad de observables N es menor para grados elevados, dado que la entrada no se proyecta en el espacio de observables. La Figura 5 presenta la comparación entre los datos medidos y las predicciones obtenidas con este modelo, mostrando que entre los grados 6 y 12 no se observan variaciones significativas en el error. Este modelo, al ser menos demandante computacionalmente, permite trabajar con grados más elevados, manteniendo un comportamiento dinámico consistente con el modelo de estado extendido (Figura 4).

La Tabla 1 resume los RMSE obtenidos para ambos modelos al variar el grado máximo del polinomio.

Tabla 1: RMSE para ambos modelos con diferente grado máximo de polinomio.

Modelo		Grado máximo del polinomio					
		2	4	6	8	10	12
RMSE	Estado extendido	0.293	0.127	0.079	0.055	0.042	0.033
	Entrada afín	0.391	0.211	0.163	0.127	0.106	0.090

6. Conclusiones

Se llevó a cabo la identificación de un actuador neumático suave con una única entrada de presión y un estado bidimensional, correspondiente a la posición (x, y) del haz de luz del láser ubicado en el extremo libre del actuador. Para capturar adecuadamente la dinámica entrada-salida del sistema, se diseñaron y ejecutaron 350 trayectorias con distintas condiciones iniciales. Como resultado, se obtuvieron aproximadamente 176141 pares de instantáneas, empleados en la identificación del modelo dinámico mediante operadores de Koopman. Se utilizaron dos enfoques: un modelo de estado extendido con una base de 165 funciones observables linealmente independientes (monomios) y un modelo con entrada afín con 45 observables, ambos con un grado polinómico máximo de 8. Para seleccionar el grado adecuado se realizaron simulaciones variando entre 2 y 12. Se observó que el RMSE disminuye al incrementar el grado del polinomio; sin embargo, se seleccionó el grado 8 como valor óptimo, ya que en identificación de sistemas es conocido que

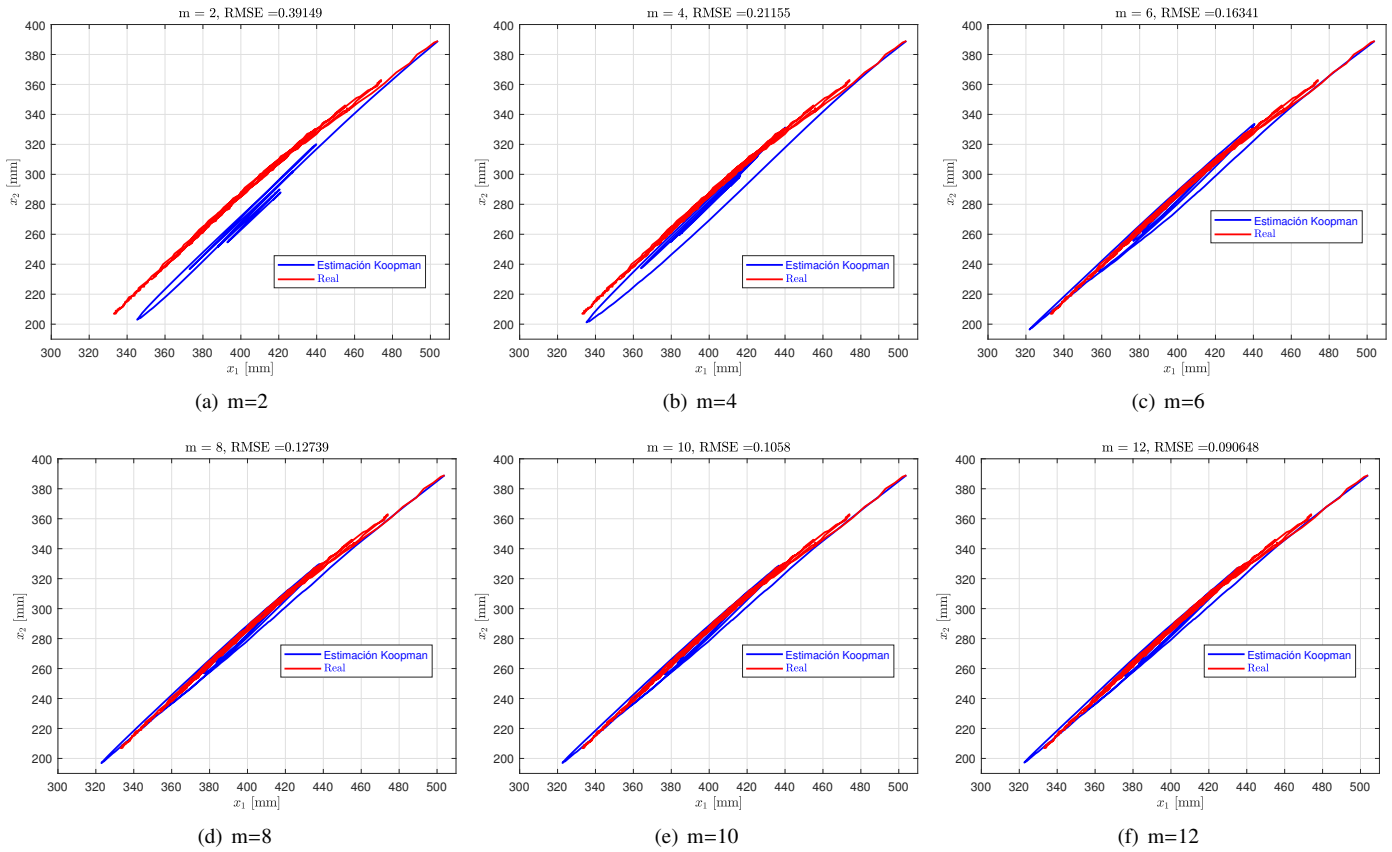


Figura 5: Identificación de la dinámica entrada-salida del sistema considerando el modelo de entrada afín para diferentes grados máximos de polinomio (m).

una aproximación muy exacta puede llevar a modelar también el ruido. En este sentido, el grado 8 ofrece un error reducido y un costo computacional aceptable. Los resultados experimentales muestran que los modelos con entrada afín resultan más eficientes computacionalmente, aunque con menor precisión en la estimación, mientras que los modelos de estado extendido capturan dinámicas más complejas a costa de un mayor costo de cómputo. En este estudio, el modelo de estado extendido mostró una mejor estimación de los estados con respecto al modelo de entrada afín. Estos resultados confirman que los métodos basados en operadores de Koopman constituyen una alternativa viable para modelar la dinámica entrada-salida de robots suaves sin requerir descripciones físicas explícitas ni el uso de ecuaciones diferenciales parciales. A pesar de sus ventajas, el proceso de identificación es sensible a la calidad del preprocesamiento y a la sincronización de datos, lo que resalta la necesidad de estandarizar estrategias para su implementación. En cuanto a posibles líneas de investigación, cabe señalar que la metodología presentada abre la puerta a diversas extensiones. Una de ellas corresponde a la exploración de bases de funciones alternativas en la identificación mediante operadores de Koopman, lo que podría permitir representar con mayor fidelidad las dinámicas observadas. Asimismo, otra posibilidad a considerar en trabajos futuros es la aplicación de operadores de Koopman en el marco de modelos de parámetros distribuidos.

Referencias

- Bruder, D., Gillespie, B., Remy, C. D., y Vasudevan, R. (2019a). Modeling and control of soft robots using the koopman operator and model predictive control. *arXiv preprint arXiv:1902.02827*.
- Bruder, D., Remy, C. D., y Vasudevan, R. (2019b). Nonlinear system identification of soft robot dynamics using koopman operator theory. En *2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pp. 6244–6250. IEEE.
- Bruder, D., Fu, X., Gillespie, R. B., Remy, C. D., y Vasudevan, R. (2020). Data-driven control of soft robots using koopman operator theory.
- Bruder, D., Fu, X., Gillespie, R. B., Remy, C. D., y Vasudevan, R. (2021). Koopman-based control of a soft continuum manipulator under variable loading conditions. *IEEE robotics and automation letters*.
- Chen, Z., Renda, F., Le Gall, A., Mocellin, L., Bernabei, M., Dangel, T., Ciuti, G., Cianchetti, M., y Stefanini, C. (2025). Data-driven methods applied to soft robot modeling and control: A review. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 22:2241–2256.
- Della Santina, C. y Rus, D. (2019). Control oriented modeling of soft robots: The polynomial curvature case. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 5(2):290–298.
- Della Santina, C. (2020). The soft inverted pendulum with affine curvature. En *2020 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 4135–4142. IEEE.
- Giorelli, M., Renda, F., Ferri, G., y Laschi, C. (2013). A feed forward neural network for solving the inverse kinetics of non-constant curvature soft manipulators driven by cables. En *Dynamic Systems and Control Conference*, volumen 56147, p. V003T38A001. American Society of Mechanical Engineers.
- Haggerty, D. A., Banks, M. J., Curtis, P. C., Mezić, I., y Hawkes, E. W. (2020). Modeling, reduction, and control of a helically actuated inertial soft robotic arm via the koopman operator. En *arXiv preprint arXiv:2011.07939*.
- Korda, M. y Mezić, I. (2018). On convergence of extended dynamic mode decomposition to the koopman operator. *J Nonlinear Sci*, 28(2):687–710.
- Mauroy, A. y Mezić, I. (2016). Global stability analysis using the eigenfun-

- ctions of the koopman operator. *IEEE Trans Autom Control*, 61(11):3356–3369.
- Mauroy, A., Susuki, Y., y Mezić, I. (2020). *Introduction to the Koopman Operator in Dynamical Systems and Control Theory*, pp. 3–33. Springer International Publishing, Cham.
- Mauroy, A. y Goncalves, J. (2020). Koopman-based lifting techniques for nonlinear systems identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(6):2550–2565.
- Polygerinos, P., Lyne, S., Wang, Z., Nicolini, F. L., Mosadegh, B., Whitesides, G. M., y Walsh, C. J. (2013). Towards a soft pneumatic glove for hand rehabilitation. En *IROS*, pp. 1512–1517.
- Proctor, J. L., Brunton, S. L., y Kutz, J. N. (2016). Dynamic mode decomposition with control. *SIAM J Appl Dyn Syst*, 15(1):142–161.
- Proctor, J. L., Brunton, S. L., y Kutz, J. N. (2018a). Generalizing koopman theory to allow for inputs and control. *SIAM J Appl Dyn Syst*, 17(1):909–930.
- Proctor, J. L., Brunton, S. L., y Kutz, J. N. (2018b). Generalizing koopman theory to allow for inputs and control. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 17(1):909–930.
- Quevedo, F., Muñoz, J., Castano Pena, J. A., y Monje, C. A. (2021). 3d model identification of a soft robotic neck. *Mathematics*, 9(14):1652.
- Relaño, C., Muñoz, J., y Monje, C. A. (2023). Gaussian process regression for forward and inverse kinematics of a soft robotic arm. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 126:107174.
- Rus, D. y Tolley, M. T. (2015). Design, fabrication and control of soft robots. *Nature*, 521(7553):467–475.
- Shi, L., Liu, Z., y Karydis, K. (2023). Koopman operators for modeling and control of soft robotics. *Curr Robot Rep*, 4:23–31.
- Trivedi, D., Lotfi, A., y Rahn, C. D. (2008). Geometrically exact models for soft robotic manipulators. *IEEE Transactions on Robotics*, 24(4):773–780.
- Williams, M., Kevrekidis, I., y Rowley, C. (2015). A data-driven approximation of the koopman operator: extending dynamic mode decomposition. *J Nonlinear Sci*, 25(6):1307–1346.
- Yoon, T., Chai, Y., Jang, Y., Lee, H., Kim, J., Kwon, J., Kim, J., y Choi, S. (2024). Kinematics-informed neural networks: Enhancing generalization performance of soft robot model identification. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 9(4):3068–3075.