

Control adaptable estadístico para sistemas térmicos Statistical adaptive control for thermal systems

J. A. Oidor-Valencia ^a, M. A. Ojeda-Misses ^a, R. Villafuerte-Segura ^a, O. A. Domínguez-Ramírez ^a, V. Rodríguez-Lugo ^b, H. Gómez-Pozos ^a

^a Área Académica de Computación y Electrónica, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Pachuca, Hidalgo, México.

^b Área Académica de Ciencias de la Tierra y Materiales, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Pachuca, Hidalgo, México.

Resumen

Sin lugar a duda, los sistemas de control de temperatura juegan un papel muy importante en el diseño, creación, evaluación y sintetización de nuevos materiales avanzados. En este sentido, las técnicas de control adaptable han mostrado ser eficientes para mantener una temperatura deseada en un sistema térmico. Sin embargo, se debe emplear una tasa de aprendizaje o ganancia de adaptación γ que suele ser desconocida y que típicamente se deja a criterio del diseñador o experto en el área. En este trabajo se propone un esquema de control adaptable estadístico por modelo de referencia (CAEMR) para un sistema térmico con parámetros desconocidos, basado en la corrección del error de seguimiento. A diferencia de los esquemas clásicos, aquí se introduce un algoritmo estadístico para determinar la dinámica de la ganancia de adaptación $\gamma := \gamma_N$ usando el Teorema de Límite Central y la corrección del error de seguimiento. Para lo cual, se calcula la desviación estándar del error de seguimientos y se obtiene una variable normal estándar para estimar la probabilidad en una distribución normal, finalmente, se estima mediante una función de mapeo de probabilidad para obtener la dinámica de la ganancia de adaptación $\gamma = \gamma_N$. Para validar nuestra propuesta, se realizan pruebas vía simulación usando Simulink de Matlab y vía experimentación usando una plataforma térmica conocida como QNET-HVAC de Quanser[®]. Los resultados numéricos y experimentales muestran la eficacia del algoritmo propuesto para lograr el seguimiento de la trayectoria de la señal de referencia bajo incertidumbres en los parámetros y/o parámetros desconocidos del sistema térmico, validando la viabilidad de incorporar criterios estadísticos en la teoría de control adaptable. Además, se observa que este enfoque mejora la robustez y estabilidad del controlador.

Palabras Clave: Control adaptable, control estocástico, modelo de referencia, sistema térmico, ganancia de adaptación estadística.

Abstract

Undoubtedly, temperature control systems have a crucial role in the design, creation, evaluation, and synthesis of new advanced materials. In this regard, adaptive control techniques have proven efficient in maintaining a desired temperature in a thermal system. However, a learning rate or adaptation gain, γ , must be employed, which is often unknown and typically left to the discretion of the designer or expert in the field. This paper proposes a statistical adaptive control scheme using a reference model (CAEMR) for a thermal system with unknown parameters, based on tracking error correction. Unlike classical schemes, this approach introduces a statistical algorithm to determine the dynamics of the adaptation gain $\gamma := \gamma_N$ using the Central Limit Theorem and tracking error correction. To this end, the standard deviation of the tracking error is calculated, and a standard normal variable is obtained to estimate the probability in a normal distribution. Finally, a probability mapping function is used to estimate the dynamics of the adaptation gain $\gamma = \gamma_N$. To validate our proposal, tests are performed via simulation using Matlab's Simulink and via experimentation using a thermal platform known as QNET-HVAC from Quanser[®]. The numerical and experimental results show the effectiveness of the proposed algorithm in tracking the reference signal's trajectory under uncertainties in the parameters and/or unknown parameters of the thermal system, validating the feasibility of incorporating statistical criteria into adaptive control theory. Furthermore, this approach is observed to improve the controller's robustness and stability.

Keywords: Adaptive control, stochastic control, reference model, thermal system, statistical adaptation gain.

* Autor para correspondencia: villafuerte@uaeh.edu.mx

Correo electrónico: oi507891@uaeh.edu.mx (J. A. Oidor-Valencia), manuel_ojeda@uaeh.edu.mx (M. A. Ojeda-Misses), villafuerte@uaeh.edu.mx (R. Villafuerte-Segura), omar@uaeh.edu.mx (O. A. Domínguez-Ramírez), venturar@uaeh.edu.mx (V. Rodríguez-Lugo), gpozos@uaeh.edu.mx (H. Gómez-Pozos).

Historial del manuscrito: recibido el 24/09/2025, última versión-revisada recibida el 31/10/2025, aceptado el 01/11/2025, publicado el 06/04/2026. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v14iEspecial2.16131>



1. Introducción

El campo de los nuevos materiales se ha presentado como una de las áreas más prometedoras y revolucionarias de la ciencia moderna, ampliamente reconocido como una rama de la ciencia aplicada con impacto transversal en múltiples sectores tecnológicos e industriales. En la actualidad, la investigación se centra en el diseño, la síntesis y la caracterización de materiales avanzados a escala micro y nanométrica, con el objetivo de optimizar sus propiedades físicas, químicas, electrónicas y mecánicas (Kaufmann y Vecchio, 2024). Numerosos estudios buscan establecer relaciones entre la composición química, la nanoestructuración, los procesos de fabricación, y las propiedades emergentes de estos materiales, permitiendo el desarrollo de aplicaciones innovadoras en campos como la electrónica, la biomedicina, la energía renovable, la tecnología cuántica (Pau-del *et al.*, 2022), entre otros.

Una relación importante en las investigaciones sobre materiales, es la conexión entre la composición química, los tratamientos térmicos, la microestructura y las propiedades de las nuevas caracterizaciones de los materiales (Sandu, 2023). En otras palabras, las variaciones en la composición química y los tratamientos térmicos aplicados durante la fabricación pueden afectar directamente la microestructura resultante, afectando así sus propiedades. Con base en estas relaciones y la comprensión asociada, los investigadores tienden a seleccionar un grado adecuado junto con su ruta metalúrgica que se ajuste a las especificaciones que se aplican frecuentemente a escala industrial. Esto requiere además el desarrollo de diferentes estrategias que integren la caracterización de nuevos materiales mediante parámetros críticos como temperatura, presión, tiempo de procesamiento, entre otros. Estos parámetros son regulados mediante el control de sistemas térmicos, permitiendo predecir su comportamiento durante los procesos de síntesis y fabricación (Łach y Svyetlichnyy, 2025). Asimismo, se demanda la aplicación de controladores avanzados que optimicen parámetros críticos facilitando una transferencia tecnológica eficiente desde el laboratorio (Lab) hacia la fabricación industrial (Fab), pero también en un ciclo iterativo Lab–Fab–Lab, donde los resultados experimentales retroalimentan el diseño y control de los procesos para mejorar continuamente las propiedades y el rendimiento de los materiales.

Ciertamente, los sistemas térmicos, como los de calefacción, refrigeración, generación de energía y control de temperatura, son de gran importancia tanto en la vida cotidiana como en el desarrollo de materiales avanzados. En particular, los sistemas de control de temperatura desempeñan un papel fundamental en el diseño, la creación, la evaluación y la síntesis de nuevos materiales, ya que garantizan condiciones térmicas precisas durante los procesos de transformación. Desde sus inicios, las técnicas de control adaptable han demostrado ser altamente eficientes para mantener una temperatura deseada en sistemas térmicos; sin embargo, requieren la selección de una tasa de aprendizaje o ganancia de adaptación, la cual suele ser desconocida y depende del criterio del diseñador o experto en el área.

En este contexto, surge la justificación del presente trabajo, que radica en la necesidad de desarrollar estrategias de control más robustas, precisas y autónomas, capaces de adaptarse a sistemas térmicos con parámetros inciertos o cambiantes. La

industria moderna y los laboratorios de materiales avanzados demandan controladores que no solo respondan eficazmente a perturbaciones, sino que también integren principios estadísticos y probabilísticos que mejoren su capacidad de adaptación ante condiciones variables. Los métodos convencionales, como los controladores PID o los adaptativos tradicionales, presentan limitaciones cuando el sistema térmico posee una dinámica compleja o poco modelada, lo que puede afectar la estabilidad o el tiempo de respuesta del sistema.

Por ello, en este trabajo de investigación se propone un esquema de Control Adaptable Estadístico por Modelo de Referencia (CAEMR) para un sistema térmico con parámetros desconocidos, basado en la corrección del error de seguimiento. A diferencia de los esquemas clásicos, este enfoque introduce un algoritmo de estimación estadístico que determina la dinámica de la ganancia de adaptación en función del error entre el modelo de referencia y el sistema real, así como de su desviación estándar. Posteriormente, se calcula una variable normal estándar para estimar la probabilidad dentro de una distribución normal y, finalmente, se obtiene la dinámica de la ganancia de adaptación mediante una función de mapeo probabilístico.

Este método mejora la robustez, estabilidad y desempeño del controlador, proporcionando una respuesta más precisa y eficiente ante incertidumbres en los parámetros del sistema. Los resultados numéricos y experimentales confirman la eficacia del algoritmo para lograr el seguimiento de la señal de referencia, validando la viabilidad de incorporar criterios estadísticos en la teoría de control adaptable aplicada a sistemas térmicos en el desarrollo de nuevos materiales. En consecuencia, este trabajo contribuye al avance del control moderno al ofrecer una alternativa metodológica sólida que integra fundamentos estadísticos dentro de la dinámica adaptativa, respondiendo así a las exigencias actuales de precisión, eficiencia y confiabilidad en los sistemas térmicos industriales y científicos.

El resto de artículo se estructura de la siguiente manera, en la Sección 2 se presenta un estado del arte sobre los sistemas térmicos. En la Sección 3 se describe la plataforma experimental empleada para la validación de los resultados teóricos propuestos aquí y se dan resultados teóricos referentes a los sistemas de control adaptable, así como el algoritmo estadístico para determinar la dinámica de la ganancia de adaptación γ_N . Mientras que, en la Sección 4 se presenta la metodología para la implementación de nuestra propuesta. Resultados derivados de la implementación vía simulación son dados en la Sección 5 y los derivados de implementaciones vía experimentación en la Sección 6. Una discusión sobre los resultados vía simulación y vía experimentación es dada en la Sección 7. El trabajo culmina con las conclusiones en la Sección 8.

2. Estado del arte: control de sistemas térmicos

El control de sistemas térmicos ha evolucionado significativamente a lo largo de las últimas décadas, impulsado por la necesidad de garantizar una regulación precisa de la temperatura en procesos industriales, científicos y tecnológicos cada vez más complejos. Estos sistemas, presentes en aplicaciones que van desde la manufactura de nuevos materiales hasta la generación y almacenamiento de energía, requieren estrategias de

control que aseguren estabilidad, eficiencia energética y adaptabilidad frente a perturbaciones e incertidumbres. En este contexto, se han desarrollado diversos enfoques de control, clásicos, modernos e inteligentes, que buscan optimizar la respuesta dinámica de los sistemas térmicos, como se mencionan a continuación.

Entre los más utilizados se encuentran los controladores Proporcional Integral Derivativo (PID), ideales para mantener una temperatura estable mediante el ajuste automático de la potencia de calefactores y/o enfriadores (Tan *et al.*, 2004). Entre los controladores adaptables (Åström, 1983), (Åström y Wittenmark, 1973) se encuentra el controlador adaptable basado en modelo de referencia (CAMR por sus siglas en español), STR (reguladores autoajustables), control por programación de ganancias, control adaptable con redes neuronales, control adaptable difuso, por hacer mención de algunos de ellos, no obstante en este manuscrito abordaremos el CAMR. Los controladores difusos (fuzzy) permiten gestionar sistemas térmicos no lineales o con alta incertidumbre (Fatunmbi *et al.*, 2024), tomando decisiones basadas en reglas lingüísticas más que en modelos matemáticos exactos (Ahn *et al.*, 2017). En aplicaciones más complejas, se integran controladores inteligentes que combinan redes neuronales (Yoon y Ahn, 2020), algoritmos evolutivos (Ji *et al.*, 2016) o aprendizaje por refuerzo (Landl *et al.*, 2023) para mejorar la eficiencia y adaptabilidad del control (Ahn, 2020). Esta diversidad de técnicas permite enfrentar desafíos como la inercia térmica, la variabilidad de cargas y la eficiencia energética, logrando sistemas más estables, precisos y sostenibles.

A medida que transcurre el tiempo, en la teoría de control se busca adentrarse a la creación de nuevas vertientes, que se ha desarrollado para manejar la creciente complejidad de las plantas modernas y requisitos cada vez más exigentes (Sandu, 2023). Asimismo, dentro del control moderno existen diversos tipos de control, como control óptimo (Balli *et al.*, 2024), control robusto, control estocástico, control no lineal, control adaptable, entre otros. Los controladores adaptables se emplean cuando las características térmicas del sistema varían con el tiempo, ajustando dinámicamente sus parámetros para mantener un rendimiento óptimo (Chekifi y Boukraa, 2023).

Los controladores CAMR han ayudado a lo largo de los años, una primera aplicación es en aeronaves que operaban a una amplia gamma de altitudes y velocidades para pilotos automáticos (Annaswamy y Fradkov, 2021). Este controlador permite proponer una estructura donde algunos o todos los parámetros del sistema son desconocidos, ya sea por dinámicas no modeladas o desconocimiento total de dichos parámetros, o bien, los parámetros variables en el tiempo, este reto fue atacado por la regla de MIT (Massachusetts Institute of Technology), presentada de forma explícita y publicada por Whitaker *et al.* (1958). La ventaja es su aplicación en los pilotos automáticos y otros sistemas debido a que requieren de una rápida adaptación, ventaja que el CAMR proporcionaba. Sin embargo, como fue mencionado por Parks (1966) algunos sistemas conducían hacia una adaptación inestable, debido a la regla antes propuesta, pero basada de forma heurística. Una alternativa propuesta por (Parks, 1966) fue diseñar una estrategia de CAMR basándose en la teoría de Lyapunov, proporcionando una adaptación estable. Por otro lado, en la década de los 70s, fue diseñado un

nuevo enfoque utilizado en los CAMR, que a diferencia de los CAMR comunes, las derivadas de la salida de la planta no eran utilizadas, debido a que en la práctica insertan ruido y perturbaciones, así que se introdujo la señal de error aumentada, la cual desempeña un papel durante el periodo transitorio de adaptación y llega a cero cuando la adaptación ha sido completada (Monopoli, 2003).

De manera general, algunas ventajas del CAMR frente a otros tipos de controladores en sistemas térmicos son, que es simple de implementar, pues no necesita cálculos extensivos de optimización ni modelos excesivamente complejos, permite ajustar automáticamente sus parámetros para que la respuesta del sistema siga de forma óptima un modelo de referencia deseado (Sánchez-Sánchez *et al.*, 2025), incluso ante cambios en las condiciones de operación o perturbaciones externas (Tao, 2003). A diferencia de los controladores PID, que requieren una sintonización manual y presentan limitaciones cuando hay retardos térmicos o no linealidades, el CAMR se adapta dinámicamente sin necesidad de reajustes constantes. Además, frente a los controladores inteligentes que requieren grandes cantidades de datos y entrenamiento previo, el CAMR es más eficiente y responde en tiempo real, lo que lo hace ideal para sistemas térmicos con alta inercia y variabilidad. Frente a los controladores difusos, que dependen de reglas predefinidas y del conocimiento experto, el CAMR se basa en principios matemáticos sólidos, logrando mayor precisión y estabilidad. Gracias a estas características, el CAMR combina robustez, adaptabilidad y simplicidad, posicionándose como una de las soluciones más efectivas para ser aplicado en un control térmico debido a que pueden presentar variaciones bruscas en la carga o en el ambiente (Yuan *et al.*, 2015). Estas variaciones generan retardos en la respuesta del controlador, afectando la estabilidad transitoria. Además, la sintonización constante del modelo puede incrementar la complejidad computacional y el riesgo de oscilaciones no deseadas.

Actualmente, existen diversas aplicaciones con los controladores CAMR, debido a la confiabilidad como el control de navegación de pilotos automáticos de barcos o buques implementado por (Van Amerongen, 1984), de igual forma se han implementado otras estrategias de control combinadas con el CAMR para el control de barcos como control robusto y difuso (Yang *et al.*, 2003), con el uso del PID He *et al.* (2023) e inclusive se aplicó en vehículos remotos con sistemas de control predictivo con redes neuronales y un PID autoajutable por (Du *et al.*, 2025). Además, se ha implementado el CAMR en aeronaves por (Abusaid y Elmelhi, 2024) combinándolo con una estimación por medio de mínimos cuadrados recursivos, en (Benavides *et al.*, 2024; Ynineb y Ladaci, 2022) se presenta con modelos de orden fraccional, finalmente en (Guo *et al.*, 2011) es aplicado a sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO). Por otro lado, se implementó como un sistema administración personalizada de medicamentos para tratar el cancer (Babaei y Salamci, 2015, 2019). Esta variedad de aplicaciones muestra la versatilidad del CAMR en diferentes entornos.

Hemos de recalcar que estos tipos de controladores también tienen sus desventajas como la dificultad a la hora de demostrar estabilidad, ya que, se utilizan técnicas no triviales como la estabilidad de Lyapunov o la hiperestabilidad de Popov (Khan y Swamy, 2016). Una de las principales problemáticas de los con-

troladores adaptables es que el parámetro de ganancia de adaptación γ , suele ser desconocido o difícil de elegir con precisión (Swathi y Ramesh, 2017). La elección incorrecta de γ puede provocar una adaptación lenta si es muy pequeña o inestabilidad si es demasiado grande, lo que complica la implementación práctica (Ramesh y Yadaiah, 2017). Además, de llevar a cabo el control de sistemas, también permite estimar parámetros desconocidos y variantes en el tiempo, esto hace que la elección de dicha ganancia de adaptación sea una parte crucial en el diseño de este tipo de controladores. Aunque en algunos casos algunos otros controladores requieren mayor complejidad y recursos, el controlador CAMR sigue siendo una solución eficiente para sistemas térmicos como un sistema de primer orden, siempre que se realice un diseño cuidadoso de la ganancia de adaptación γ para garantizar estabilidad y buen desempeño.

Por lo tanto, la contribución de este trabajo es la propuesta de un controlador adaptable estadístico para sistemas térmicos modelado como un sistema de primer orden, el cual introduce una ley estocástica de estimación capaz de calcular de manera automática la ganancia de adaptación γ , logrando así una de las principales limitaciones presentes en los CAMR. A diferencia de los métodos tradicionales, donde γ debe definirse de forma manual y puede comprometer la estabilidad y/o la velocidad de convergencia (Ioannou y Sun, 1996), la estrategia propuesta utiliza propiedades estadísticas de las señales de entrada y salida para ajustar γ en tiempo real, adaptándose a las condiciones variables del sistema. Además, la estrategia de control adaptable estadística permite estimar simultáneamente los parámetros del sistema térmico y del controlador, logrando una optimización conjunta que mejora la precisión, la robustez y la eficiencia energética. Este enfoque ofrece una solución innovadora para el control de sistemas térmicos con alta incertidumbre y variabilidad dinámica, proporcionando un esquema más estable, autoajutable y confiable en comparación con los controladores clásicos.

El controlador adaptable estadístico se basa en un algoritmo basado en datos muestrales aplicando el Teorema Central del Límite (TLC) (Carlton y Devore, 2017). En cada iteración, el error entre la salida de la red y la referencia se normaliza mediante la media y desviación estándar muestral, y luego se transforma con la función de distribución acumulada normal, lo que lo convierte en un valor entre 0 y 1. Este error normalizado guía la actualización de la ganancia γ para la estimación de las ganancias del controlador adaptable permitiendo el control del sistema térmico y la estimación de las ganancias del sistema de primer orden, respectivamente. Finalmente, esto permite que el controlador estime γ a partir del error entre el modelo de referencia y el sistema real, logrando un sistema estable y estadísticamente adaptado a la naturaleza de los datos muestrales.

3. Resultados teóricos: preliminares y principales

Como se ha mencionado anteriormente, los sistemas térmicos juegan un rol importante para la sintetización de nuevos materiales avanzados. Aquí el diseño y la sintonización de controladores que garanticen el establecimiento a una temperatura deseada es de suma relevancia. Para este fin, primero se presenta la plataforma térmica experimental de la marca Quanser®, conocida como QNET-HVACT. Seguida de algunos resultados

teóricos referentes a los sistemas de control adaptables. Finalmente, se presentan los resultados principales referentes a determinar la ganancia de adaptación estadística, nuestra aportación/propuesta al área del conocimiento del control adaptable.

3.1. Resultados preliminares: plataforma térmica QNET-HVAC

A continuación, se presenta la plataforma térmica experimental en la cual se implementará el controlador adaptable propuesto en este trabajo. Esta plataforma emula las dinámicas de un sistema térmico, es conocida como QNET-HVAC de Quanser®, ver Figura 1.



Figura 1: Plataforma térmica QNET-HVAC de Quanser®.

En la Figura 2 se muestra el actuador de calefacción del sistema térmico QNET-HVAC. Mientras que, en la Tabla 1 se presentan las especificaciones técnicas.



Figura 2: Actuador de calefacción del QNET-HVAC.

Tabla 1: Especificaciones técnicas del actuador del QNET-HVAC

Característica	Valor
Voltaje	12V
Potencia	50W
Base / casquillo	Gu 5.3
Flujo luminoso	770Lm
Vida media en horas	4000

3.1.1. Modelo matemático del QNET-HVAC

Los sistemas térmicos son aquellos que involucran la transferencia de calor de una sustancia a otra, donde el calor puede fluir de tres formas diferentes como conducción, convección y radiación. En la mayor parte de procesos térmicos en los sistemas de control no involucran transferencia de calor por radiación (Ogata, 2010). La convección es el modo de transferencia de calor entre una superficie y un fluido adyacente que se encuentra en movimiento. Existen dos tipos de convección, en donde se nombra convección forzada si el fluido es forzado a fluir sobre la superficie mediante medios externos como un ventilador, una bomba o el viento. Por otro lado, se le llama convección natural o libre si el movimiento del fluido es causado por las fuerzas de empuje que son inducidas por las diferencias de densidades debidas a la variación de la temperatura en dicho fluido (Cengel y Ghajar, 2007).

El fenómeno de la convección puede modelarse por la ley de enfriamiento o calentamiento de Newton

$$\dot{T}(t) = -hA(T(t) - T_a), \quad (1)$$

donde

- $h \in \mathbb{R}$ es el coeficiente de transferencia de calor por convección.
- $A \in \mathbb{R}^+$ es el área superficial en donde existe la transferencia de calor por convección.
- $T(t) \in \mathbb{R}$ es la temperatura ($^{\circ}\text{C}$).
- $T_a \in \mathbb{R}$ es la temperatura del ambiente ($^{\circ}\text{C}$).

Note que la velocidad de transferencia de calor por convección es proporcional a la diferencia de temperatura. Por otra parte, el signo de h será determinado por $T(t) - T_a$ en donde si dicha diferencia es positiva h tomará un valor negativo por lo que se interpreta que esta enfriando, en caso de que el valor de la diferencia sea negativa h tendrá signo positivo y como caso contrario se interpreta que esta calentando, generando

$$\dot{T}(t) = -hA(T_a - T(t)).$$

Para fines de control se desea inducir fuente de calor externa para modificar la temperatura, la cual nombraremos $u(t)$ y una constante $b \in \mathbb{R}^+$, por lo que el modelo se expresa como

$$\dot{T}(t) = -hA(T(t) - T_a) + bu(t).$$

Se desplazará el punto de equilibrio del sistema, por lo que se propone $hA = a$, $T(t) = x(t) + T_A \implies \dot{T}(t) = \dot{x}(t)$, en donde se obtiene la ecuación que representa el sistema térmico

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -hAx(t) - hAT_a + hAT_a + bu(t) \\ &= -ax(t) + bu(t), \end{aligned} \quad (2)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}^+$, son los parámetros del sistema, y $x(t), u(t) \in \mathbb{R}$ son las señales de salida y entrada/control del sistema, respectivamente.

3.2. Resultados preliminares: sistemas de control adaptable

Típicamente, los sistemas de control adaptables se clasifican en indirectos e directos. En los indirectos se obtiene una estimación de los parámetros de la planta a controlar. Basado en la suposición de que la estimación de los parámetros es buena, se emplean estos parámetros en el controlador como una solución al problema de diseño. Mientras que en los directos el mecanismo de ajuste de parámetros, indica directamente en que forma los parámetros del controlador se deben ajustar. Además, los esquemas adaptables directos requiere ciertas propiedades de la planta a los que va ha ser aplicado, en cambio los esquemas indirectos son de aplicación más general ya que se pueden aplicar distintos métodos de identificación y en bases a los parámetros obtenidos diseñar un controlador específicos.

En este contexto, la comunidad del área considera que los métodos indirectos corresponden con los reguladores auto sintonizados (Self Tuning Regulator) y los esquemas directos a los reguladores con modelo de referencia (Model Reference Adaptive Control). Actualmente esta separación no es tan tajante. Otra terminología utilizada para esta separación es la de controladores adaptables explícitos (indirectos) e implícitos (directos) (Peña, 2011).

3.2.1. Esquema directo: Controlador adaptable por modelo de referencia

En este trabajo de investigación se empleará un controlador adaptable por modelo de referencia, cuyo esquema general es dado en la Figura 3.

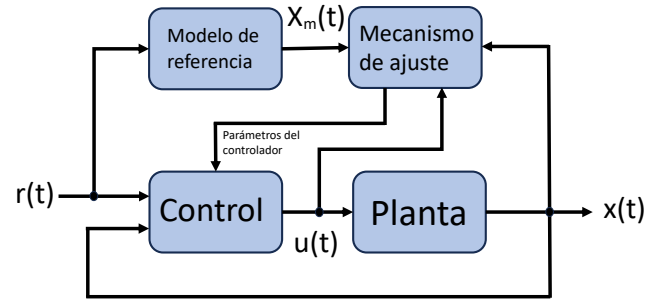


Figura 3: Esquema general de un sistemas de control adaptables por modelo de referencia.

El modelo de referencia (MF) indica como se debe de comportar el sistema de forma ideal, teniendo que escoger una dinámica que pueda ser alcanzada por el sistema a tratar. La siguiente ecuación describe el modelo de referencia:

$$\dot{x}_m(t) = -\alpha x_m(t) + \beta r(t), \quad (3)$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ son los parámetros del MF, $r(t) \in \mathbb{R}$ es la referencia o entrada del MR, $x_m(t) \in \mathbb{R}$ es la salida o temperatura del MR.

A diferencia del esquema clásico mostrado anteriormente, aquí se introduce un algoritmo de estimación estadístico para determinar la dinámica de la ganancia de adaptación, basado en la corrección del error de seguimiento. Esto se describirá a detalle en seguida.

3.3. Resultado principal: controlador adaptable estadístico por modelo de referencia

En esta apartado se presenta la estructura y la sintonización del controlador propuesto para tareas de seguimiento entre la plataforma térmica y el modelo de referencia. Es decir, se tiene como objetivo que la salida de plataforma experimental $x(t)$ siga la salida del MF $x_m(t)$.

Definiendo el error de seguimiento como $e(t) = x_m(t) - x(t)$, entonces usando (2) y (3) se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}_m(t) - \dot{x}(t) \\ &= -\alpha x_m(t) + \beta r(t) + ax(t) - bu(t). \end{aligned} \quad (4)$$

A continuación, para garantizar que $e(t)$ tienda a 0, cuando t tiende a ∞ , se implementan dos controladores $u(t)$, con sus respectivos algoritmos y se emplea el Teorema de Lyapunov (Teorema 1, Apéndice):

- el primero servirá para identificar los parámetros del sistema; y
- el segundo solo servirá como algoritmo de ajuste para el controlador propuesto.

Observación 1. Cabe mencionar que para la identificación, se debe proponer una señal de entrada $r(t)$ de alta frecuencia (Bitmead, 2003; Willems et al., 2005).

En seguida, se detallan los esquemas de controladores y sus respectivos algoritmos.

3.3.1. Algoritmo de identificación paramétrica

Suponiendo que b y a son desconocidas, entonces se propone el siguiente controlador

$$u(t) = \frac{1}{\hat{b}} [\hat{a}x(t) - \alpha x(t) + \beta r(t)]. \quad (5)$$

Por lo tanto, el sistema en lazo cerrado (SLC), (4)-(5), es

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}_m(t) - \dot{x}(t) \\ &= -\alpha x_m(t) + \beta r(t) + ax(t) \\ &\quad - b \frac{1}{\hat{b}} [\hat{a}x(t) - \alpha x(t) + \beta r(t)] \\ &= -\alpha e(t) + \left[1 - \frac{b}{\hat{b}}\right] \beta r(t) + \left[a - \alpha - \frac{b}{\hat{b}} \hat{a} + \frac{b}{\hat{b}} \alpha\right] x(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Ahora, se propone la función candidata de Lyapunov siguiente

$$v(e) = v_1(e) + v_2(t) + v_3(t), \quad (7)$$

donde

$$\begin{aligned} v_1(e) &= \frac{1}{2} e^2(t), \\ v_2(t) &= \frac{1}{2b\gamma} \left[a - \alpha + b \left[\frac{\alpha - \hat{a}(t)}{\hat{b}(t)} \right] \right]^2, \\ v_3(t) &= \frac{1}{2b\gamma} \left[1 - \frac{b}{\hat{b}(t)} \right]^2. \end{aligned}$$

Observe que $v(e) > 0$, si $b, \gamma > 0$. Aquí, γ es conocida como ganancia de adaptación y más adelante se propondrá un algoritmo estadístico para su estimación. Mientras que

$$\dot{v}(e) = \dot{v}_1(e) + \dot{v}_2(t) + \dot{v}_3(t), \quad (8)$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{v}_1(e) &= e(t)\dot{e}(t), \\ \dot{v}_2(t) &= -\frac{1}{\gamma \hat{b}^2(t)} \left[a - \alpha + b \left[\frac{\alpha - \hat{a}(t)}{\hat{b}(t)} \right] \right] \left[\hat{b}(t) \frac{d\hat{a}(t)}{dt} + [\alpha - \hat{a}(t)] \frac{d\hat{b}(t)}{dt} \right], \\ \dot{v}_3(t) &= \frac{1}{\gamma \hat{b}^2(t)} \left[1 - \frac{b}{\hat{b}(t)} \right] \left[\frac{d\hat{b}(t)}{dt} \right]. \end{aligned}$$

Sustituyendo (6) en $\dot{v}_1(e)$ y agrupando términos, se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{v}(e) &= -\alpha e^2(t) + \left[a - \alpha + b \left[\frac{\alpha - \hat{a}(t)}{\hat{b}(t)} \right] \right] e(t)x(t) \\ &\quad + \left[a - \alpha + b \left[\frac{\alpha - \hat{a}(t)}{\hat{b}(t)} \right] \right] \times \\ &\quad \times \left[e(t)x(t) - \left[\frac{1}{\gamma \hat{b}^2(t)} \right] \left[\hat{b}(t) \frac{d\hat{a}(t)}{dt} + [\alpha - \hat{a}(t)] \frac{d\hat{b}(t)}{dt} \right] \right] \\ &\quad + \left[1 - \frac{b}{\hat{b}(t)} \right] \left[\left[\frac{1}{\gamma \hat{b}^2(t)} \right] \left[\frac{d\hat{b}(t)}{dt} \right] + \beta r(t)e(t) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Observe que $\dot{v}(e) < 0$ si

$$\begin{aligned} e(t)x(t) - \left[\frac{1}{\gamma \hat{b}^2(t)} \right] \left[\hat{b}(t) \frac{d\hat{a}(t)}{dt} + [\alpha - \hat{a}(t)] \frac{d\hat{b}(t)}{dt} \right] &= 0, \\ \left[\frac{1}{\gamma \hat{b}^2(t)} \right] \left[\frac{d\hat{b}(t)}{dt} \right] + \beta r(t)e(t) &= 0. \end{aligned}$$

o equivalentemente a

$$\frac{d\hat{b}(t)}{dt} = -\gamma \hat{b}^2(t) \beta r(t) e(t), \quad (10)$$

$$\frac{d\hat{a}(t)}{dt} = \gamma \hat{b}(t) e(t) [x(t) + [\alpha - \hat{a}(t)] \beta r(t)]. \quad (11)$$

3.3.2. Algoritmo de ajuste

Ahora, considere el siguiente controlador

$$u(t) = -\theta_1 x(t) - \theta_2 r(t), \quad (12)$$

donde $\theta_{1,2}$ son ganancias de ajuste. Por lo tanto, el SLC, (4) con (12), es

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= -\alpha x_m(t) + \beta r(t) + ax(t) - b[-\theta_1 x(t) - \theta_2 r(t)] \\ &= -\alpha e(t) + [a - \alpha + b\theta_1] x(t) + [b\theta_2 + \beta] r(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Ahora, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$v(e) = \frac{1}{2} e^2(t) + \frac{1}{2b\gamma} [a - \alpha + b\theta_1]^2 + \frac{1}{2b\gamma} [\beta + b\theta_2]^2.$$

Observe que $v(e) > 0$ si $b, \gamma > 0$. Mientras que

$$\begin{aligned} \dot{v}(e) &= e(t)\dot{e}(t) + \frac{1}{\gamma} [a - \alpha + b\theta_1] \dot{\theta}_1 + \frac{1}{\gamma} [\beta + b\theta_2] \dot{\theta}_2 \\ &= -\alpha e^2(t) + [a - \alpha + b\theta_1] \left[e(t)x(t) + \frac{1}{\gamma} \dot{\theta}_1 \right] \\ &\quad + [\beta + b\theta_2] \left[e(t)r(t) + \frac{1}{\gamma} \dot{\theta}_2 \right]. \end{aligned}$$

Así, se tiene que $\dot{v}(e) < 0$, si

$$\begin{aligned} e(t)x(t) + \frac{1}{\gamma}\dot{\theta}_1 &= 0, \\ e(t)r(t) + \frac{1}{\gamma}\dot{\theta}_2 &= 0, \end{aligned}$$

o equivalentemente a

$$\dot{\theta}_1(t) = -\gamma e(t)x(t), \tag{14}$$

$$\dot{\theta}_2(t) = -\gamma e(t)r(t). \tag{15}$$

Observación 2. *Claramente, los controladores (5) y (12) tienen las ganancias de adaptación (10)-(11) y (14)-(15), respectivamente. Es bien sabido que la velocidad de convergencia de la respuesta del sistema $x(t)$ a la señal de referencia $x_m(t)$, así como una estimación buena de los parámetros, dependen de la elección de la ganancia de adaptación γ .*

En seguida, se presenta el algoritmo que permite el ajuste de la ganancia de adaptación γ usando herramientas estadísticas.

3.3.3. Ganancia de adaptación estadística

Es claro que los dos controladores presentados en (5) y (12), requieren de la ganancias de adaptación γ . Sin embargo, como se mencionó anteriormente, esta ganancia se deja a criterio del diseñar experto en el área. Si esta ganancia γ no es elegida adecuadamente, entonces se tendrá un desempeño desfavorable al usar cualquiera de los dos controladores presentados (5) y (12). Por lo tanto, en este trabajo se presenta un algoritmo para el ajuste de la ganancia de adaptación empleando el Teorema de Límite Central (Teorema 2, Apéndice).

Para el diseño de la ganancia de adaptación estadística se aplicará el teorema del límite central presentado en el teorema anterior, que ayuda en la formulación del algoritmo estadístico propuesto para estimar esta ganancia γ , mediante el error definido por la ecuación (4) de la siguiente forma:

$$\gamma_N := \gamma(N) = 5(1 + \exp\{-N(e_k)\}), \tag{16}$$

cuya función mapea del espacio de probabilidades, dado por la distribución normal, al espacio de ganancias, en donde la distribución normal $N := N(e)$ en término del error, es dada por

$$N(e_k) = \frac{\exp\left\{-\frac{(e_k - \mu_e)^2}{2\sigma_e^2}\right\}}{\sigma_e \sqrt{2\mu_e}}, \tag{17}$$

donde σ_e es la desviación estándar de $e(t)$

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^n (e_i(t) - \mu_e)^2}, \tag{18}$$

y μ_e es la media del error $e(t)$

$$\mu_e = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n e_i(t). \tag{19}$$

Es importante mencionar, que la desviación estándar σ_e y la media μ_e , ambas con base al error, $e(t)$, son estimadas empleando las últimas 100 muestras $n = 100$, en otras palabras, un

muestreo recursivo. Una vez presentados resultados preliminares del controlador adaptable estadístico que incluye el algoritmo de identificación, el algoritmo de ajuste, el algoritmo para la ganancia de adaptación estadística son presentados los resultados a nivel simulación y con la plataforma térmica QNET-HVAC de Quanser[®].

4. Metodología

Como se ha mencionado anteriormente, los sistemas térmicos juegan un rol importante en la síntesis y caracterización de nuevos materiales avanzados. En este contexto, el diseño y la sintonización de controladores que garanticen el establecimiento de una temperatura deseada resulta fundamental para asegurar la estabilidad y precisión del proceso. Con este fin, en esta sección se presenta una clasificación de los sistemas de control adaptables, así como la descripción de la plataforma térmica experimental QNET-HVACT de la marca Quanser, utilizada para la validación del esquema propuesto. La metodología se estructura en diversas etapas interrelacionadas que abarcan tanto los fundamentos teóricos del control adaptable como su aplicación experimental en un sistema térmico, la cual se describe a continuación:

1. Primeramente, se realiza una clasificación de los sistemas de control adaptable, en la que se analizan los principales enfoques reportados en la literatura y su pertinencia para el control de temperatura en sistemas no lineales o con parámetros inciertos.
2. Posteriormente, se desarrolla el modelo de la plataforma térmica o planta, que describe matemáticamente el comportamiento dinámico del sistema de calefacción y enfriamiento, identificando los parámetros térmicos, las constantes de tiempo y las variables de entrada y salida que definen la evolución de la temperatura.
3. En seguida, se plantea el modelo de referencia, el cual establece la trayectoria o temperatura deseada que debe seguirse, sirviendo como base para calcular el error de seguimiento y ajustar los parámetros del controlador.
4. Finalmente, una vez definidos el modelo de la planta y el modelo de referencia, se desarrolla el controlador adaptable estadístico, conformado por tres componentes principales:
 - a) el algoritmo de identificación paramétrica, encargado de estimar los parámetros desconocidos del sistema;
 - b) el algoritmo de ajuste, responsable de modificar los parámetros del controlador en función del error de seguimiento; y
 - c) la ganancia de adaptación estadística, que introduce un enfoque probabilístico basado en la desviación estándar y una función de mapeo de probabilidad derivada de la distribución normal.

Esta estructura metodológica permite integrar el modelado matemático, la estimación estadística y la validación experimental en un marco coherente que garantiza la evaluación efectiva del esquema CAEMR propuesto.

5. Simulaciones

A continuación se presentan simulaciones usando de los resultados teóricos propuestas en la sección anterior.

5.1. Implementación de algoritmo de ajuste vía simulación

A continuación, se presentan simulaciones usando el software Simulink de Matlab[®] versión 2018b. Aquí, se emplean los siguientes valores: $\alpha = 0.04$, $\beta = 0.025$ y $r(t) = 8$, $T_0 = 22^\circ C$. Además, consideremos que los parámetros desconocidos y por estimar de la planta son $a = 0.07$ y $b = 0.04$.

En la Figura 4, se muestra la respuesta del sistema térmico (2) en lazo cerrado con el controlador (5). Para corroborar y comparar nuestra propuesta, con γ estadística, se realizaron simulaciones usando la técnica clásica donde se proponen valores fijos para la ganancia de ajuste $\gamma = 1 \times 10^{-4}$, 5×10^{-4} , 5×10^{-3} . Note que la velocidad de convergencia del sistema con el modelo de referencia depende de escoger un valor de γ adecuado, por lo que la ganancia de adaptación estadística destaca por su desempeño en las fases transitorias o de estabilización.

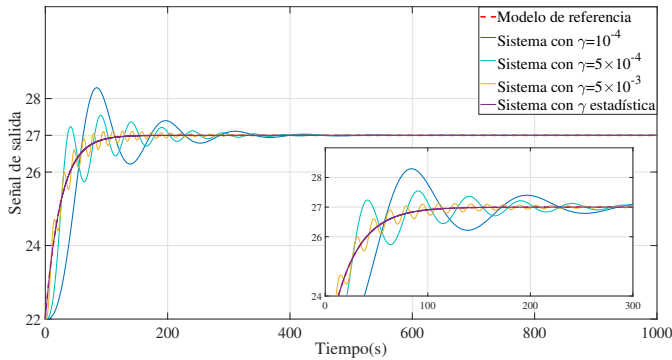


Figura 4: Respuesta de la simulación del sistema térmico (2), en lazo cerrado con el controlador (5), usando $\gamma = 1 \times 10^{-4}$, 5×10^{-4} , 5×10^{-3} ; y $\gamma = \gamma_N$ dada en (16).

En la Figura 5, se muestra la señal de entrada $u(t)$, dada en (12), para diferentes valores de γ . Aquí, se puede observar que las señales de entrada no saturarán el actuador, pero si se presenta alta frecuencia. También, se puede notar que la dinámica oscilante de $u(t)$ logra un valor estacionario a partir de un tiempo $t = 400$, aproximadamente.

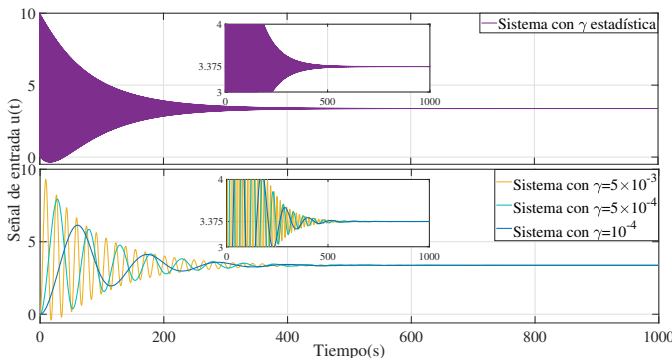


Figura 5: Señal de entrada $u(t)$ de la simulación del sistema térmico ante diferentes ganancias de adaptación.

En la Figura 6, se puede observar el valor de convergencia de la ganancia ajustable $\theta_1(t)$, dada en (14), del controlador (5). En la Tabla 2 se muestran los valores de convergencia de la ganancia ajustable $\theta_1(t)$, para los diferentes valores de la ganancia de adaptación γ . Note que en cada una de las simulaciones el valor de convergencia no varía de forma significativa.

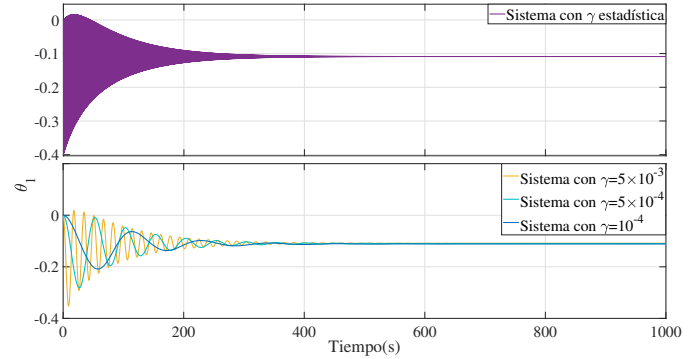


Figura 6: Convergencia de θ_1 de la simulación del sistema térmico ante diferentes ganancias de adaptación.

Tabla 2: Valores de convergencia de $\theta_1(t)$ para diferentes valores de γ .

γ	$\theta_1(t)$
γ_N	-0.1087
5×10^{-3}	-0.1086
5×10^{-4}	-0.1097
1×10^{-4}	-0.1115

Mientras que, en la Figura 7 se puede observar el valor de convergencia de $\theta_2(t)$, dada en (15), para diferentes valores de γ . La Tabla 3 contiene los valores a donde converge la ganancia ajustable $\theta_2(t)$. Como en la Tabla 1, los valores no varían drásticamente.

Observación 3. Es importante mencionar que para este caso, los valores a los que convergen las ganancias de ajuste $\theta_{1,2}$ no son importantes, ya que no se está realizando una identificación paramétrica. Lo único relevante aquí es tener una convergencia de ambas ganancias de ajuste.

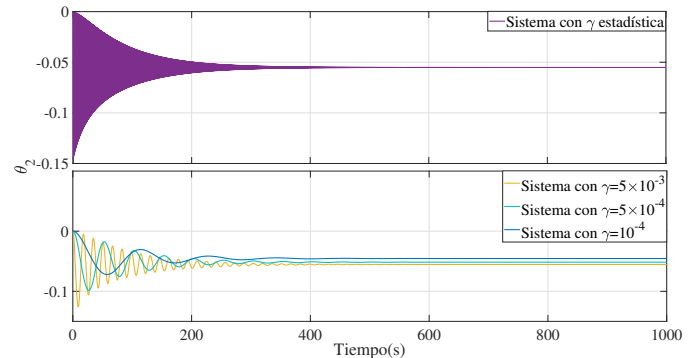


Figura 7: Convergencia de $\theta_2(t)$ de la simulación del sistema térmico ante diferentes valores de la ganancia de adaptación γ .

Tabla 3: Valores de convergencia de $\theta_2(t)$ para diferentes valor de γ .

γ	$\theta_2(t)$
estadística	-0.05513
5×10^{-3}	-0.0554
5×10^{-4}	-0.0515
1×10^{-4}	-0.0454

Por otra parte, usando el controlador (12) se pueden sintetizar los valores estimados de $\hat{a}(t)$ y $\hat{b}(t)$, donde

$$\hat{a}(t) = \alpha - \hat{b}\theta_1(t) \tag{20}$$

$$\hat{b}(t) = -\frac{\beta}{\theta_2(t)}. \tag{21}$$

En la Figura 8 se muestra la dinámica de convergencia/estimación de $\hat{a}(t)$, usando (20), para diferentes valores de la ganancia de adaptación γ .

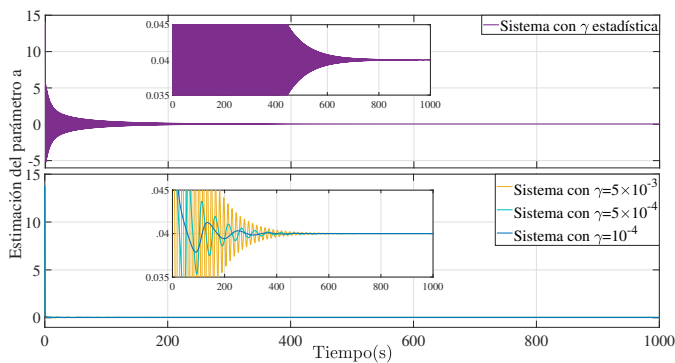


Figura 8: Estimación del parámetro $\hat{a}(t)$ de la simulación del sistema térmico ante diferentes ganancias de adaptación.

Mientras que, en la Figura 9 se puede observar la dinámica de convergencia de $\hat{b}(t)$, usando (21), para diferentes valores de la ganancia de adaptación γ .

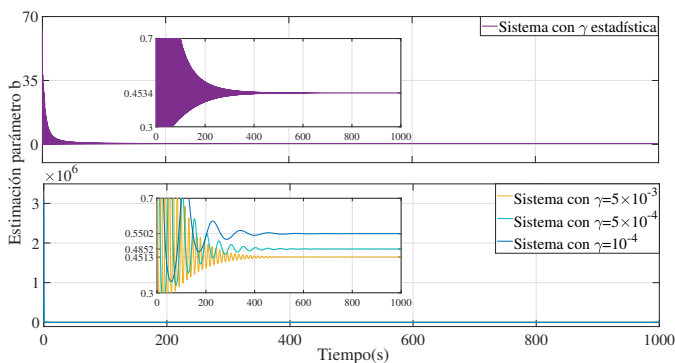


Figura 9: Estimación del parámetro $\hat{b}(t)$ de la simulación del sistema térmico ante diferentes ganancias de adaptación.

En la Tabla 4 se muestran los valores de los parámetros estimados, estos valores son incorrectos ya que $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{a}(t) = a$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{b}(t) = b$ y recordando, $a = 0027$ y $b = 0.04$, sin embargo, para esta ley de control o algoritmo de ajuste los parámetros no necesitan converger a los correctos para realizar un control adecuado. Cabe mencionar que la convergencia de estos

parámetros $\hat{a}(t)$ y $\hat{b}(t)$, al igual $u(t)$, dependen de las ganancias ajustables, si dichas ganancias no logran converger los parámetros tampoco lo harán.

Tabla 4: Valores de convergencia de $\hat{a}(t)$ y $\hat{b}(t)$ para diferentes valores de γ .

γ	$\hat{a}(t)$	$\hat{b}(t)$
γ_N	0.0399	0.4534
5×10^{-3}	0.04	0.4513
5×10^{-4}	0.04	0.4853
1×10^{-4}	0.04	0.5502

Para determinar el desempeño de la propuesta dada en este trabajo de investigación, se obtuvo la integral del cuadrado del error (ICE), o también conocido en lengua inglesa como "integral square error"(ISE). En la Figura 10 se observa la ICE para los diferentes valores de γ , a simple vista se nota que el sistema con la ganancia estadística $\gamma := \gamma_N$ es superior a la ganancia de adaptación tradicional. Sin embargo, para cuantificar este hecho, en la Tabla 5, se muestran los valores de la ICE, con cada ganancia de adaptación γ , lo cual nos permite visualizar la gran diferencia entre los valores, con esto se muestra que la ganancia de adaptación tiene un mejor desempeño que una ganancia tradicional.

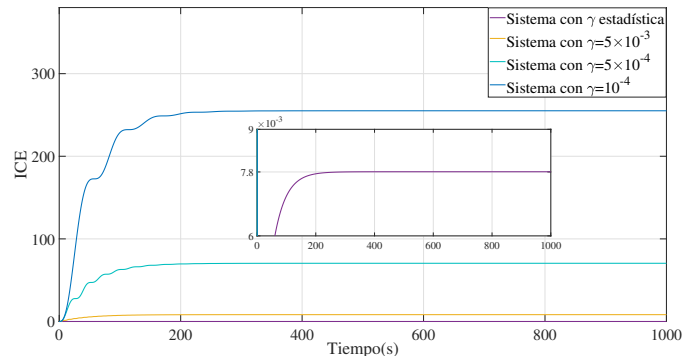


Figura 10: Integral del cuadrado del error de la simulación del sistema térmico ante diferentes ganancias de adaptación.

Tabla 5: Valores del ICE en cada simulación, usando algoritmo de ajuste.

γ	ICE
γ_N	$7.8(10)^{-3}$
γ_3	8.284
γ_2	70.47
γ_1	255.1

Mientras que, en la Figura 11 se muestra la dinámica de la ganancia de adaptación estadística γ_N . Note que esta dinámica coadyuva a que el ICE sea muy cercano a cero (ver Tabla 5) y por lo tanto, se obtiene un mejor desempeño en la respuesta del sistema térmico, superando a las técnicas clásicas donde se proponía un valor fijo de γ .

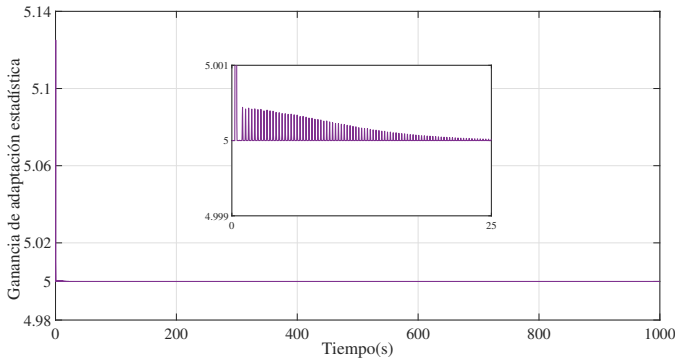


Figura 11: Dinámica de la ganancia de adaptación estadística.

5.2. Implementación del algoritmo de identificación

Ahora, se realizan simulaciones con los mismos parámetros que se presentan al inicio de la Subsección 5.1, pero usando $u(t)$ dada en (5). Además, como se indicó en la Observación 1, para implementar un algoritmo de identificación y que este converja a los parámetros del sistema térmico, se debe implementar una excitación persistente de alta frecuencia. Por lo cual, $r(t)$ se propondrá como un generador de números aleatorios random”, con amplitud 150 y frecuencia 5 rad/seg, para realizar una identificación paramétrica correcta.

En la Figura 12, se muestran las respuestas $x_m(t)$ del MF (3) y $x(t)$ del sistema térmico (2), para $\gamma = \gamma_N, 5 \times 10^{-4}, 5 \times 10^{-3}$. Observe que el seguimiento de la planta hacia el modelo de referencia se ve afectado por la ganancia de adaptación, como se mencionó anteriormente. Aquí podemos observar que la velocidad de convergencia de este algoritmo de identificación es más lenta, que la velocidad de convergencia del algoritmo de ajuste. Naturalmente, esto se atribuye a que en el algoritmo de ajuste, la ecuaciones para obtener θ_1 y θ_2 , dadas en (14) y (15), tienen forma de un gradiente descendente, permitiendo su convergencia más rápido y sin la necesidad de una estimación paramétrica correcta para realizar el seguimiento.

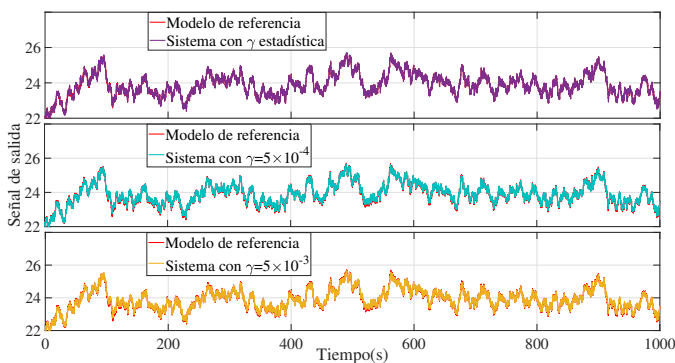


Figura 12: Respuesta del modelo de referencia y el sistema al realizar identificación con diferentes valores de γ .

Ahora, la Figura 13 muestra las diferentes señales de entrada $u(t)$, observe que esta señal oscila de forma violenta, por ende, la implementación física de este algoritmo o ley de control, no será posible implementarlo en la plataforma experimental utilizada en la implementación física, mostrada más adelante,

además que supera con creces las características del actuador mencionadas en la Tabla 1, con la posibilidad de causarle daños.

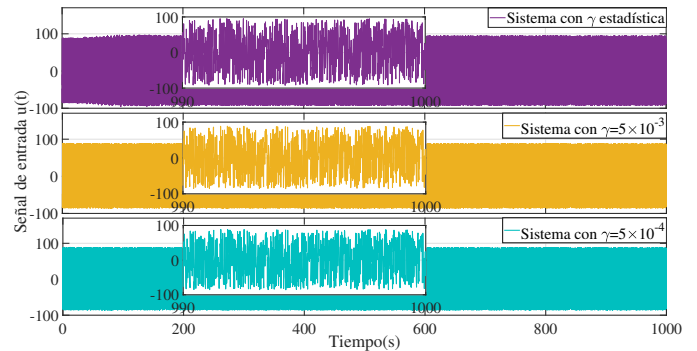


Figura 13: Señal de entrada $u(t)$ de la simulación del sistema térmico ante diferentes ganancias de adaptación.

En la Figura 14, se muestra la dinámica de $\hat{a}(t)$, obtenida a partir de la ecuación dada en (11), respectivamente. Por la naturaleza del algoritmo de identificación es necesario proponer condiciones iniciales, las cuales deben de aproximarse a los parámetros de la planta, cabe resaltar que estas condiciones iniciales pueden llegar a causar inestabilidad a la planta en caso de ser alejadas de los parámetros de la planta. En este caso la condición inicial es $\hat{a}_0 = 0.03$. Mientras que, en la Figura 15 se puede apreciar la dinámica de $\hat{b}(t)$ obtenida a partir de la ecuación dada en (10), la condición inicial es $\hat{b}_0 = 0.043$.

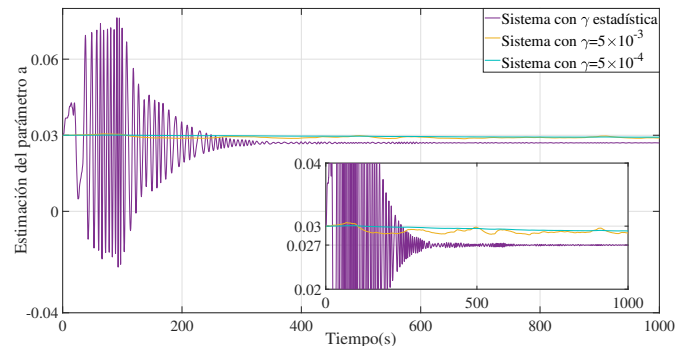


Figura 14: Estimación del parámetro $\hat{a}(t)$ de la simulación de la planta ante diferentes ganancias de adaptación.

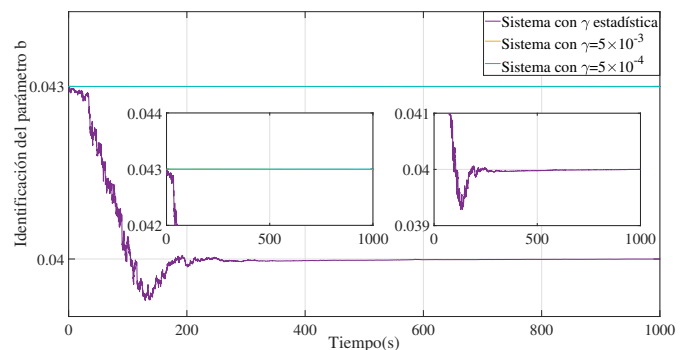


Figura 15: Estimación del parámetro $\hat{b}(t)$ de la simulación de la planta ante diferentes ganancias de adaptación.

Por otro lado, la Tabla 6 muestran los valores a donde logran converger $\hat{a}(t)$ y $\hat{b}(t)$, Note que en este caso la estimación paramétrica se llevó a cabo de forma correcta al tener la ganancia de adaptación estadística, ya que, $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{a}(t) = a = 0.027$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{b}(t) = b = 0.04$, por lo que se muestra la efectividad para realizar una identificación con esta ley de control o algoritmo, sin embargo, al tener la ganancia de adaptación tradicional no logra una estimación paramétrica correcta.

Tabla 6: Valores de convergencia de $\hat{a}(t)$ y $\hat{b}(t)$ para diferentes valor de γ .

γ	$\hat{a}(t)$	$\hat{b}(t)$
γ_N	0.027	0.04
5×10^{-3}	0.0289	0.0429
5×10^{-4}	0.0292	0.043

En la Figura 16 se muestra la dinámica de la ICE. Aquí se observa un mejor comportamiento en la convergencia cuando se emplean la ganancia de adaptación estadística γ_N , por lo que se puede presumir una buena estimación de los parámetros $\hat{a}(t)$ y $\hat{b}(t)$. Mientras que el ICE cuando se emplea el método tradicional no logra converger adecuadamente, por lo que se puede decir que la estimación paramétrica no es adecuada. En la Tabla 7 se muestran los valores finales del ICE para las diferentes γ 's empleadas. Por otro lado, en la Figura 17 se muestra la dinámica de la ganancia de adaptación γ_N empleada.

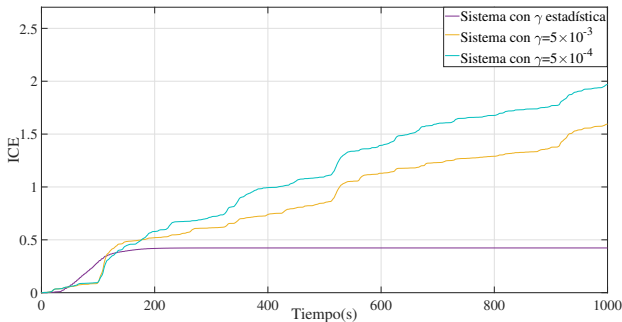


Figura 16: Integral del cuadrado del error de la simulación del sistema térmico ante diferentes ganancias de adaptación.

Tabla 7: Valores del ICE o ISE en cada simulación, usando algoritmo de identificación.

ICE	γ_N	γ_3	γ_2
ICE	0.4231	1.591	1.969

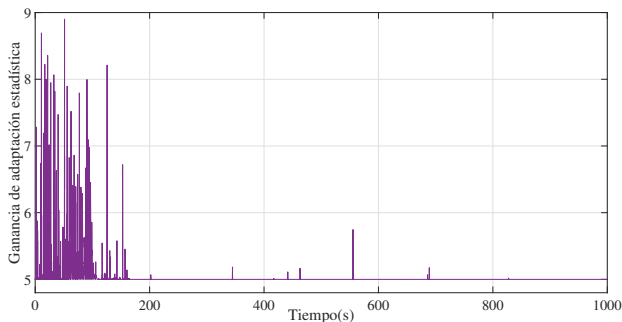


Figura 17: Dinámica de la ganancia de adaptación estadística γ_N .

6. Implementación física

La implementación física se llevó a cabo con la plataforma térmica experimental de la marca Quanser[®] conocida como QNET-HVACT (Figura 1), con un modelo desconocido. Además, se propone el MR como (3), con $\alpha = 0.04$ y $\beta = 0.025$, $r(t) = 8$, la aplicación experimental se llevo a cabo al rededor de una temperatura ambiente $T_0 = 22^\circ C$ y con la ley de control (12).

En la Figura 18 se muestran las salidas de la plataforma térmica experimental QNET-HVACT. Aquí, de manera análoga, se proponen los valores de la ganancia de adaptación como, $\gamma = 1 \times 10^{-4}$, 5×10^{-3} y la ganancia de adaptación estadística como, $\gamma_N = 63(10)^{-5}(1 + e^{-(x+2.1)})$. En los experimentos se aplicaron perturbaciones en el intervalo de $t_0 = 200$ a $t_1 = 300$. Note que la ganancia de adaptación γ puede llegar a inestabilizar la planta, al elegir un valor demasiado grande, como es el caso del sistema con $\gamma = 5 \times 10^{-3}$, de manera contraria, en el sistema con $\gamma = 1 \times 10^{-4}$ al ser un valor demasiado pequeño la velocidad de convergencia es muy lenta.

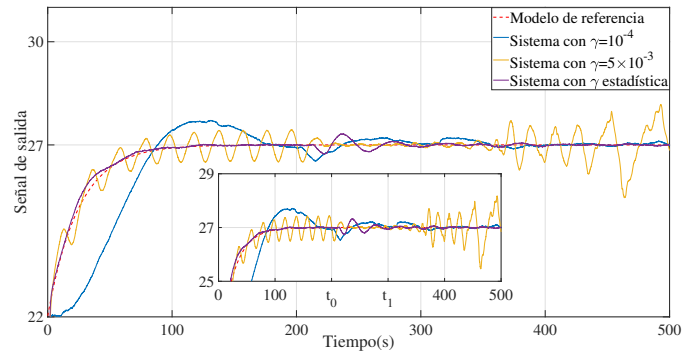


Figura 18: Señal de salida de la plataforma experimental QNET-HVACT y el MR con diferentes valores de γ

Mientras que, en la Figura 19 se muestra la señal de entrada $u(t)$ en el sistema con el $\gamma = 5(10)^{-3}$ se corta, ya que se añadió una saturación hacia la planta, para no dañar el actuador.

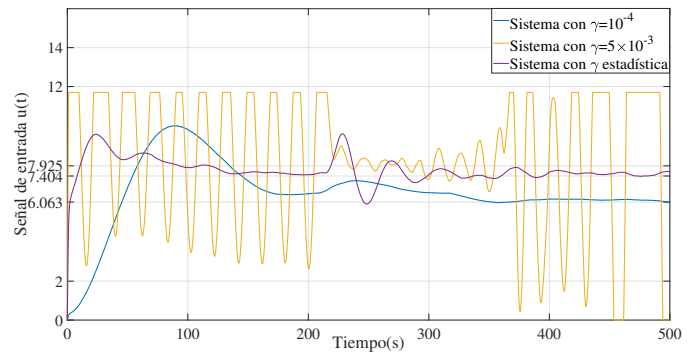


Figura 19: Señal de entrada $u(t)$ de la implementación experimental de la plataforma experimental QNET-HVACT ante diferentes ganancias de adaptación.

En la Figura 20, se puede observar el valor de convergencia de la ganancia ajustable $\theta_1(t)$, dada en (14), usando el controlador (5), para los diferentes valores de γ , descritos anteriormente. Estos valores son dados en la Tabla 8.

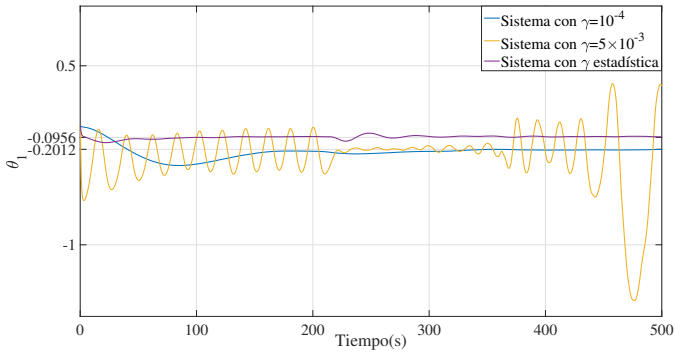


Figura 20: Convergencia de θ_1 de la implementación experimental de la plataforma experimental QNET-HVACT ante diferentes ganancias de adaptación..

Tabla 8: Valores de convergencia de $\theta_1(t)$ para diferentes valores de γ .

γ	$\theta_1(t)$
estadística	-0.0956
5×10^{-3}	-0.2077
1×10^{-4}	-0.2012

Observe que, en la Figura 21 el valor de convergencia de $\theta_2(t)$, para diferentes valores de γ . Estos valores son dados en la Tabla 9.

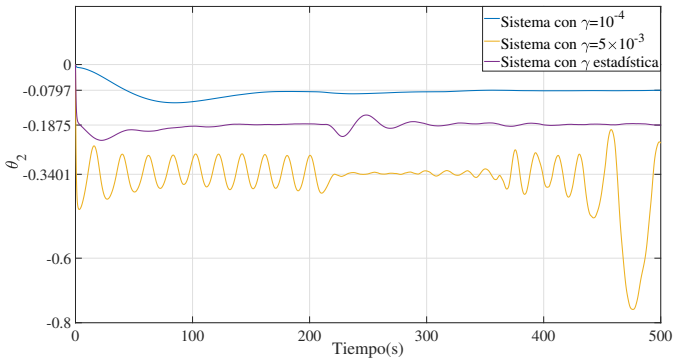


Figura 21: Convergencia de θ_2 de la implementación experimental de la plataforma experimental QNET-HVACT ante diferentes ganancias de adaptación.

Tabla 9: Valores de convergencia de $\theta_2(t)$ para diferentes valores de γ .

γ	$\theta_2(t)$
estadística	-0.0956
5×10^{-3}	-0.2077
1×10^{-4}	-0.2012

En las Figuras 22 y 23 se muestran las dinámicas de convergencia de $\hat{a}(t)$ y $\hat{b}(t)$. Mientras que, en la Tabla 10 se dan los valores de convergencia.

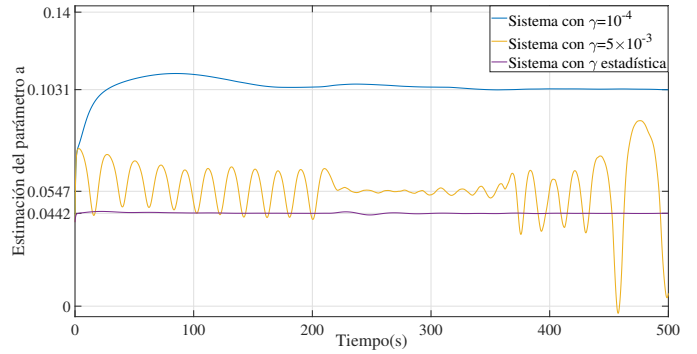


Figura 22: Estimación del parámetro $\hat{a}(t)$ de la simulación de la planta ante diferentes ganancias de adaptación.

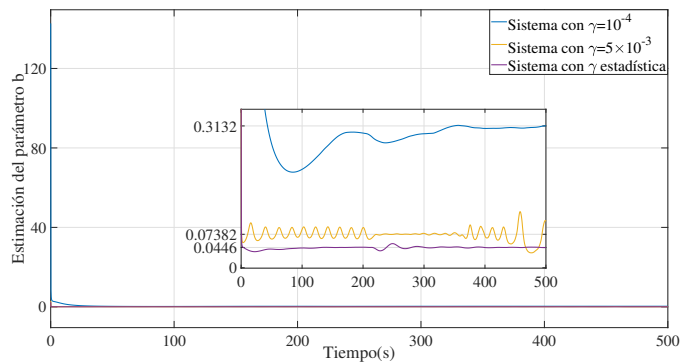


Figura 23: Estimación del parámetro $\hat{b}(t)$ de la simulación de la planta ante diferentes ganancias de adaptación.

Tabla 10: Valores de convergencia de $\hat{a}(t)$ y $\hat{b}(T)$ para diferentes valores de γ .

γ	$\hat{a}(t)$	$\hat{b}(T)$
estadística	0.0442	0.0446
5×10^{-3}	0.0547	0.0738
1×10^{-4}	0.1031	0.3132

En la Figura 24 se puede observar la dinámica de la ganancia adaptable estadística.

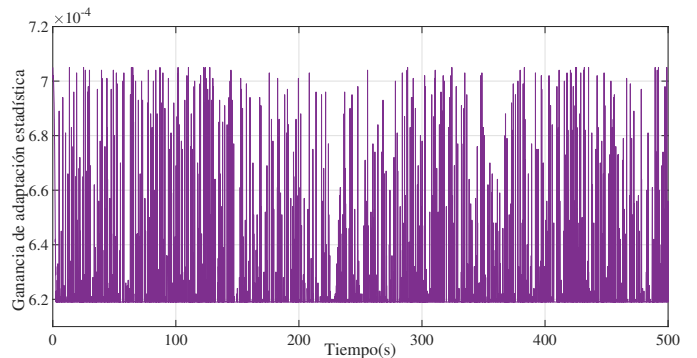


Figura 24: Dinámica de la ganancia de adaptación estadística γ_N .

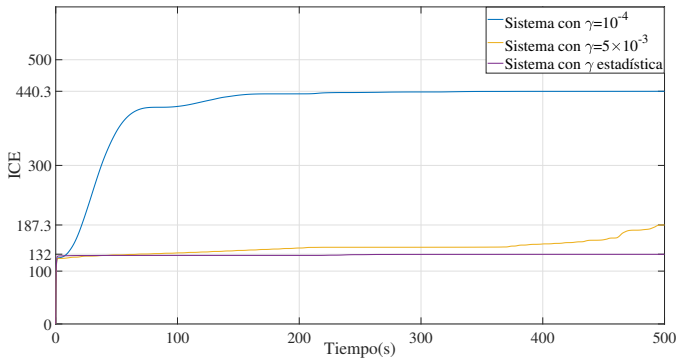


Figura 25: Integral del cuadrado del error de la plataforma experimental QNET-HVACT ante diferentes ganancias de adaptación.

7. Discusión

Los resultados obtenidos de la simulación y de la implementación física, con la plataforma QNET-HVAC, permiten validar la propuesta del control adaptable estadístico. En particular, que la ganancia de adaptación estadística propuesta mejora de manera significativa el desempeño del controlador adaptable por modelo de referencia (CAMR), aplicado al sistema térmico, en comparación de las ganancias fijas.

En las simulaciones, se observó que la integral del cuadrado del error (ICE) disminuyó notablemente al utilizar la ganancia estadística $\gamma := \gamma_N$, basada en el Teorema del Límite Central, en comparación con valores fijos de γ , lo que se tradujo en un seguimiento más preciso de la señal de referencia $x_m(t)$, una menor amplitud de la señal de control $u(t)$ y una convergencia más estable de los parámetros estimados del sistema $\hat{a}(t)$ y $\hat{b}(t)$. Este comportamiento evidencia que la incorporación de criterios estadísticos permite una respuesta más robusta frente a incertidumbres y variaciones dinámicas del sistema, sin comprometer la estabilidad.

En la implementación experimental, la ganancia estadística demostró un tiempo de establecimiento más corto y evitó inestabilidades, incluso ante perturbaciones externas y cambios en la temperatura ambiente, ver Figura 18. Los experimentos demostraron que valores de γ demasiado altos generaron saturación en el actuador y riesgo de inestabilidad, mientras que valores demasiado bajos ralentizaron la convergencia. La estrategia propuesta de ajuste automático resolvió ambos problemas, adaptando la ganancia en función del error y evidenciando la robustez y adaptabilidad del controlador.

Aunque en los primeros experimentos las estimaciones de los parámetros de planta (\hat{a} y \hat{b}) no convergieron exactamente a los valores reales, el desempeño de seguimiento no se vio comprometido, lo que refuerza la idea de que, en control adaptativo, la precisión en la identificación de parámetros no siempre es crítica cuando el objetivo principal es la regulación efectiva de la salida. Esto es especialmente relevante en aplicaciones industriales, donde las condiciones operativas varían y el control de la variable de interés (temperatura) es prioritario sobre la estimación exacta de los parámetros internos.

Además, la metodología estadística implementada mostró baja complejidad computacional, lo que la hace viable para su uso en sistemas embebidos y entornos industriales en tiempo

real, ampliando su aplicabilidad práctica. Los resultados obtenidos confirman que la integración de técnicas estadísticas en controladores adaptables no solo mejora la precisión y estabilidad del sistema, sino que también proporciona un enfoque más flexible y seguro frente a incertidumbres, un aspecto crucial para el control de procesos térmicos en síntesis de materiales avanzados, QNET-HVA y otras aplicaciones industriales de alta variabilidad. En conclusión, la discusión de los resultados evidencia que el control adaptable estadístico logra un equilibrio óptimo entre robustez, adaptabilidad y eficiencia computacional, superando las limitaciones de los métodos clásicos con ganancias fijas y ofreciendo un marco sólido para futuras extensiones hacia sistemas de mayor orden, circuitos eléctricos y procesos industriales complejos.

8. Conclusiones

En este trabajo se abordó el diseño e implementación de un controlador adaptable estadístico por modelo de referencia (CAEMR), para un sistema térmico de primer orden con parámetros desconocidos e implementado en la plataforma experimental térmica QNET-HVAC. Los sistemas térmicos, ampliamente presentes en procesos de calefacción, refrigeración, generación de energía y síntesis de materiales avanzados, requieren estrategias de control precisas que garanticen estabilidad, eficiencia y seguridad.

La contribución esencial de este estudio radica en la propuesta de un algoritmo estadístico para la estimación de la ganancia de adaptación γ , fundamentado en el Teorema del Límite Central. A partir del error entre la salida del sistema térmico $x(t)$ y la salida del modelo de referencia $x_m(t)$, el algoritmo calcula la media y la desviación estándar muestral σ_e , transformando dicho error en una variable normal estándar. Posteriormente, mediante una función de mapeo de probabilidad, se determina la dinámica de la ganancia de adaptación $\gamma := \gamma_N$. Esta estrategia elimina la necesidad de ajustar manualmente los parámetros del controlador, permitiendo una adaptación autónoma y dinámica frente a las variaciones del sistema y las condiciones ambientales, mejorando la robustez, estabilidad y capacidad de seguimiento del sistema térmico.

Los resultados de simulación y experimentales, obtenidos con la plataforma QNET-HVACT, demostraron que el esquema propuesto supera significativamente al controlador adaptable clásico de ganancia fija. Se logró un seguimiento más preciso de la señal de referencia, una reducción notable de la integral del cuadrado del error (ICE) y una respuesta más estable ante perturbaciones externas y variaciones de la temperatura ambiente. Además, se observó que la precisión en la estimación de los parámetros de la planta no comprometió la calidad del control, confirmando que la prioridad del método es la regulación efectiva de la salida más que la convergencia exacta de los parámetros.

En síntesis, se validó la viabilidad de incorporar criterios estadísticos en la adaptación de controladores CAMR, ofreciendo una alternativa innovadora y robusta para aplicaciones térmicas en las que la dinámica del sistema y sus parámetros varían con el tiempo. El enfoque propuesto mantiene una complejidad computacional baja, lo que lo hace adecuado para su implementación en sistemas embebidos y entornos industriales en tiempo

po real. Como trabajo futuro, se propone extender el esquema a sistemas térmicos de orden superior, explorar su aplicación en circuitos eléctricos y servomecanismos, y evaluar su desempeño en procesos industriales de mayor escala y variabilidad, consolidando así el potencial del control adaptable estadístico como herramienta versátil y eficiente para el control moderno de sistemas térmicos.

Referencias

- Abusaid, S. M. y Elmehi, A. M. (2024). Mrac with least squares for aircraft attitude control motion. En *2024 IEEE 7th International Conference on Advanced Technologies, Signal and Image Processing (ATSIP)*, volumen 1, pp. 284–289. IEEE.
- Ahn, J. (2020). Improvement of the performance balance between thermal comfort and energy use for a building space in the mid-spring season. *Sustainability*, 12(22).
- Ahn, J., Cho, S., y Chung, D. H. (2017). Analysis of energy and control efficiencies of fuzzy logic and artificial neural network technologies in the heating energy supply system responding to the changes of user demands. *Applied Energy*, 190:222–231.
- Annaswamy, A. M. y Fradkov, A. L. (2021). A historical perspective of adaptive control and learning. *Annual Reviews in Control*, 52:18–41.
- Åström, K. J. (1983). Theory and applications of adaptive control—a survey. *automatica*, 19(5):471–486.
- Babaei, N. y Salamci, M. U. (2015). Personalized drug administration for cancer treatment using model reference adaptive control. *Journal of theoretical biology*, 371:24–44.
- Babaei, N. y Salamci, M. U. (2019). Mixed therapy in cancer treatment for personalized drug administration using model reference adaptive control. *European Journal of Control*, 50:117–137.
- Balli, L., HLIMI, M., ACHENANI, Y., ATIFI, A., y HAMRI, B. (2024). Experimental study and numerical modeling of the thermal behavior of an industrial prototype ceramic furnace: Energy and environmental optimization. *Energy and Built Environment*, 5(2):244–254.
- Benavides, G. E. C., Duarte-Mermoud, M. A., Orchard, M. E., y Ehijo, A. (2024). Improving pitch rate control performance of an f-16 aircraft using fractional order direct-mrac adaptive control instead of using the classic direct-mrac adaptive control.
- Bitmead, R. (2003). Persistence of excitation conditions and the convergence of adaptive schemes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 30(2):183–191.
- Carlton, M. A. y Devore, J. L. (2017). *Probability with applications in engineering, science, and technology*. Springer.
- Cengel, Y. A. y Ghajar, A. J. (2007). *Transferencia de calor y masa*, volumen 53. McGraw-Hill Interamericana New York, NY, USA.
- Chekifi, T. y Boukraa, M. (2023). Cfd applications for sensible heat storage: A comprehensive review of numerical studies. *Journal of Energy Storage*, 68:107893.
- Chen, C.-T. (1999). *Linear system theory and design*. Oxford university press.
- Devore, J. L., Berk, K. N., y Carlton, M. A. (2021). *Modern mathematical statistics with applications*. Springer Nature.
- Du, J., Zhao, S., Wang, J., Yang, R., y Chang, A. (2025). Active heave compensation for remotely operated vehicle recovery operations under random wave disturbances. *Physics of Fluids*, 37(3).
- Fatunmbi, E. O., Obalalu, A., Khan, U., Hussain, S. M., y Muhammad, T. (2024). Model development and heat transfer characteristics in renewable energy systems conveying hybrid nanofluids subject to nonlinear thermal radiation. *Multidiscipline Modeling in Materials and Structures*, 20(6):1328–1342.
- Guo, J., Tao, G., y Liu, Y. (2011). A multivariable mrac scheme with application to a nonlinear aircraft model. *Automatica*, 47(4):804–812.
- He, J., Li, S., Guan, H., Hu, X., y Liu, J. (2023). Ship heading control based on model reference adaptive control. En *2023 7th International Conference on Transportation Information and Safety (ICTIS)*, pp. 1437–1442. IEEE.
- Ioannou, P. A. y Sun, J. (1996). *Robust adaptive control*, volumen 1. PTR Prentice-Hall Upper Saddle River, NJ.
- Ji, Y., Xu, P., Duan, P., y Lu, X. (2016). Estimating hourly cooling load in commercial buildings using a thermal network model and electricity submetering data. *Applied Energy*, 169:309–323.
- Kaufmann, K. y Vecchio, K. S. (2024). Autonomous materials research and design: Characterization. *Current Opinion in Solid State and Materials Science*, 32:101192.
- Khan, A. y Swamy, M. S. (2016). Modified mrac based on lyapunov theory for improved controller efficiency. En *2016 International Conference on Automatic Control and Dynamic Optimization Techniques (ICADOT)*, pp. 989–995. IEEE.
- Łach, Ł. y Svyetlichnyy, D. (2025). Advances in numerical modeling for heat transfer and thermal management: a review of computational approaches and environmental impacts. *Energies*, 18(5):1302.
- Landl, M., Prieler, R., Monaco, E., y Hoehnauer, C. (2023). Numerical investigation of conjugate heat transfer and natural convection using the lattice-boltzmann method for realistic thermophysical properties. *Fluids*, 8(5).
- Monopoli, R. (2003). Model reference adaptive control with an augmented error signal. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(5):474–484.
- Ogata, K. (2010). *Modern control engineering*. Prentice hall.
- Parks, P. (1966). Liapunov redesign of model reference adaptive control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11(3):362–367.
- Paudel, H. P., Syamlal, M., Crawford, S. E., Lee, Y.-L., Shugayev, R. A., Lu, P., Ohodnicki, P. R., Mollot, D., y Duan, Y. (2022). Quantum computing and simulations for energy applications: Review and perspective. *ACS Engineering Au*, 2(3):151–196.
- Peña, M. E. (2011). *Control Adaptable*. Universidad Nacional de San Juan, Argentina.
- Ramesh, P. y Yadaiah, N. (2017). Mrac with variable adaptation gain for first order systems. En *TENCON 2017-2017 IEEE Region 10 Conference*, pp. 585–590. IEEE.
- Sánchez-Sánchez, P., Guillermo Cebada-Reyes, J., Montiel-Martínez, A., y Reyes-Cortés, F. (2025). Optimizing dehydration systems: Implementing model reference adaptive control for enhanced efficiency. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 39(5):871–893.
- Sandu, A. V. (2023). New materials and advanced procedures of obtaining and processing—applied sciences insights. *Applied Sciences*, 13(5):1–5.
- Swathi, M. y Ramesh, P. (2017). Modeling and analysis of model reference adaptive control by using mit and modified mit rule for speed control of dc motor. En *2017 IEEE 7th International Advance Computing Conference (IACC)*, pp. 482–486. IEEE.
- Tan, W., Liu, J., Fang, F., y Chen, Y. (2004). Tuning of pid controllers for boiler-turbine units. *ISA transactions*, 43(4):571–583.
- Tao, G. (2003). *Adaptive control design and analysis*. John Wiley & Sons.
- Van Amerongen, J. (1984). Adaptive steering of ships—a model reference approach. *Automatica*, 20(1):3–14.
- Whitaker, H. P., Yamron, J., y Kezer, A. (1958). *Design of model-reference adaptive control systems for aircraft*. Massachusetts Institute of Technology, Instrumentation Laboratory.
- Willems, J. C., Rapisarda, P., Markovsky, I., y De Moor, B. L. (2005). A note on persistency of excitation. *Systems & Control Letters*, 54(4):325–329.
- Yang, Y., Zhou, C., y Ren, J. (2003). Model reference adaptive robust fuzzy control for ship steering autopilot with uncertain nonlinear systems. *Applied Soft Computing*, 3(4):305–316. Soft Computing for Control of Non-Linear Dynamical Systems.
- Ynneb, A. R. y Ladaci, S. (2022). Mrac adaptive control design for an f15 aircraft pitch angular motion using dynamics inversion and fractional-order filtering. *International Journal of Robotics and Control Systems*, 2(2):240–250.
- Yoon, S. H. y Ahn, J. (2020). Comparative analysis of energy use and human comfort by an intelligent control model at the change of season. *Energies*, 13(22).
- Yuan, Y., Liang, S., Xiong, Q., Zhong, J., Zhang, Y., y Li, J. (2015). Temperature control using hybrid control with mrac and ecs into a mimo microwave heating process. *Journal of Microwave Power and Electromagnetic Energy*, 49(1):46–54.
- Åström, K. y Wittenmark, B. (1973). On self tuning regulators. *Automatica*, 9(2):185–199.

Apéndice A.

labelSec:Anpendice

Teorema 1 (Lyapunov, Chen (1999)). *Considerare el sistema dado en (4) en lazo cerrado con un controlador $u(t)$. Si existe una función $V : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciable*

tal que,

$$V(0) = 0 \quad \text{y} \quad V(e) > 0 \quad \text{en} \quad D \setminus \{0\},$$

$$\dot{V}(e) \leq 0 \quad \text{en} \quad D,$$

entonces, el sistema (4) es estable. Además, si

$$\dot{V}(e) < 0 \quad \text{en} \quad D \setminus \{0\},$$

entonces, el sistema (4) es asintóticamente estable.

Teorema 2 (Límite Central, Devore et al. (2021)). Sea $\{e_k\}_{k=1}^n$ una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza σ^2 . Entonces si n es suficientemente grande, \bar{e} tiene aproximadamente una distribución normal con $\mu_{\bar{e}} = \mu$ y $\sigma_{\bar{e}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$, T_0 también tiene aproximadamente una distribución normal con $\mu_{T_0} = n\mu$, $\sigma_{T_0}^2 = n\sigma^2$. Mientras más grande es el valor de n , mejor es la aproximación.