

Control PID estadístico para la regulación de variables en un modelo de Lorenz Statistical PID control for the regulation of variables in a Lorenz model

J. E. Rodríguez-Bravo ^a, J. M. Cruz-Olguín ^a, A. Franco-Arcega ^a, M. A. Ojeda-Misses ^a, F. Hernández-Morales ^{a,*}

^aÁrea Académica de Computación y Electrónica, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Pachuca, Hidalgo, México.

Resumen

Este artículo presenta la regulación de un sistema caótico de Lorenz mediante dos estrategias de control, un controlador proporcional (P) y un controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID) con un algoritmo de sintonización basado en adaptación estadística. A diferencia de los métodos convencionales que requieren un modelo matemático preciso, la propuesta ajusta las ganancias mediante la normalización del error, usando la media y la desviación estándar para estimar la probabilidad del error y una función de mapeo, que permite ajustar las ganancias en tiempo real. Este enfoque ayuda en la robustez del controlador reduciendo las oscilaciones. Los resultados de simulación muestran que el control proporcional sólo atenúa parcialmente las oscilaciones del sistema de Lorenz, mientras que el PID estadístico logra estabilizar los estados x, y, z hacia la referencia deseada, controlando el atractor caótico con menores oscilaciones. Finalmente, se presentan las señales de error, los errores cuadráticos medios y las señales de control, confirmando el desempeño del controlador estadístico en sistemas complejos.

Palabras Clave: Modelo de Lorenz, caos, controlador PID, control estadístico, estabilización.

Abstract

This article presents the regulation of a Lorenz chaotic system using two control strategies: a proportional (P) controller and a proportional-integral-derivative (PID) controller with a tuning algorithm based on statistical adaptation. Unlike conventional methods that require a precise mathematical model, this approach adjusts the gains by normalizing the error, using the mean and standard deviation to estimate the error probability and a mapping function, which allows for real-time gain adjustment. This approach enhances controller robustness by reducing oscillations. Simulation results show that proportional control only partially attenuates the Lorenz system's oscillations, while the statistical PID controller stabilizes the x, y, z states toward the desired reference, controlling the chaotic attractor with fewer oscillations. Finally, the error signals, mean squared errors, and control signals are presented, confirming the performance of the statistical controller in complex systems.

Keywords: Lorenz model, chaos, PID controller, statistical control, stabilization.

1. Introducción

Los sistemas caóticos representan uno de los retos más importantes dentro del análisis y control de sistemas dinámicos no lineales. La regulación de sistemas con dinámicas no lineales no es una tarea trivial, especialmente cuando nos enfrentamos a la naturaleza aperiódica de atractores. El modelo de Lorenz, que originalmente surgió para explicar la convección en la atmósfera, se ha consolidado como el estándar para poner a prueba cualquier algoritmo de control debido a su "efecto mariposa" intrínseco (Sparrow, 1982). En la implementación, trabajamos bajo el régimen de parámetros

$\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$. Son seleccionados estos parámetros precisamente porque generaran un comportamiento caótico en el modelo de Lorenz. Bajo estos valores, el sistema presenta alta sensibilidad a las condiciones iniciales, trayectorias no periódicas y la formación del conocido atractor extraño de Lorenz, lo que lo convierte en un escenario de referencia para el análisis de dinámicas no lineales, control caótico y sincronización de sistemas dinámicos, donde las trayectorias de x, y, z nunca se repiten, lo que exige una respuesta del controlador extremadamente precisa para evitar el desborde de las señales.

*Autor para la correspondencia: he471504@uaeh.edu.mx

Correo electrónico: ro440680@uaeh.edu.mx (J. E. Rodríguez Bravo), cr233109@uaeh.edu.mx (J. M. Cruz Olguín), afranco@uaeh.edu.mx (A. Franco-Arcega), manuel_ojeda@uaeh.edu.mx (M. A. Ojeda-Misses), he471504@uaeh.edu.mx (F. Hernández Morales).

La búsqueda de una supresión efectiva del caos ha generado una vasta cantidad de literatura. Se han propuesto desde observadores de estados hasta técnicas de control por modo deslizante para controlar el atractor (Wang et al., 2021). Sin embargo, un problema recurrente que observamos en propuestas como las de Sun et al. (2023) es que, aunque funcionan en entornos ideales de simulación, su rendimiento decae ante la presencia de ruido estocástico. Esto sucede porque muchos esquemas ignoran la incertidumbre inherente a los datos capturados en tiempo real. Investigaciones fronterizas, como las de Uy et al. (2024), subrayan que la cuantificación de dicha incertidumbre es la pieza que falta para lograr una estabilidad robusta en sistemas de alta complejidad.

La motivación detrás de este diseño surge de la evidente rigidez del PID convencional frente al ruido de medición. Si bien un controlador proporcional (P) simple puede atenuar la magnitud de las oscilaciones, resulta insuficiente para colapsar el atractor de forma definitiva cuando existen perturbaciones constantes. Durante la fase experimental, notamos que, para estabilizar realmente las tres variables, se requería un mecanismo que no solo mirara el error puntual, sino que interpretara la estadística del error. Al integrar el cálculo dinámico de la media y la desviación estándar en el lazo de realimentación, logramos que las ganancias se modulen según el comportamiento probabilístico de la señal, filtrando picos de ruido sin necesidad de recurrir a filtros analógicos complejos.

Este artículo no solo describe una simulación, sino que valida una metodología para hibridar el control clásico con el análisis probabilístico. A lo largo de las siguientes secciones, detallamos el desarrollo matemático del controlador y demostramos mediante resultados cuantitativos cómo nuestro esquema logra llevar a x_1 , x_2 , x_3 a un punto de equilibrio estable en menos tiempo que los métodos tradicionales. El enfoque aquí presentado abre una vía para tratar otros sistemas caóticos donde la precisión paramétrica es incierta pero la estabilidad es innegociable.

2. Estado del arte

Para contextualizar el desarrollo del controlador propuesto, es imperativo analizar la evolución del modelo de Lorenz desde su concepción como un pilar de la dinámica no lineal hasta las técnicas de regulación más sofisticadas de la actualidad.

Dentro de la teoría del caos, los atractores extraños, las dimensiones fractales y la sensibilidad extrema a las perturbaciones iniciales permiten explicar cómo pequeñas variaciones pueden amplificarse y generar comportamientos radicalmente distintos. En este contexto, los sistemas caóticos no solo exhiben impredecibilidad a largo plazo, sino también patrones emergentes que revelan formas de orden interno (Díaz Rojas y Pino, 2023).

2.1 Dinámica del atractor de Lorenz, estabilidad y bifurcaciones

El comportamiento del modelo de Lorenz se define por su extrema sensibilidad a las condiciones iniciales, una propiedad donde variaciones infinitesimales en el estado inicial derivan en trayectorias divergentes y aperiódicas. Como señala Oestreicher (2007), esta característica de los sistemas

deterministas implica que, aunque las leyes de evolución sean conocidas, la predictibilidad a largo plazo es nula debido a la naturaleza no lineal de sus ecuaciones. Esta 'impredecibilidad determinista' es lo que define al atractor extraño como el conjunto hacia el cual colapsan las trayectorias del sistema. En este contexto, cualquier perturbación externa o ruido de medición puede tener un efecto desproporcionado en la estabilidad, lo que constituye la principal limitación de los esquemas de control tradicionales basado en tener ganancias fijas y motiva el desarrollo de estrategias adaptativas que consideren el ajuste de ganancias mediante técnicas estadísticas.

El estudio de la transición hacia el desorden en flujos turbulentos encuentra su pilar fundamental en el modelo de Lorenz. Esta estructura dinámica se ha consolidado como el estándar para analizar cómo leyes deterministas pueden dar lugar a trayectorias impredecibles y complejas (Sparrow, 1982). Investigaciones críticas, como las de Shen et al. (2018), han logrado mapear con precisión las fronteras entre regiones estables e inestables del sistema, un paso fundamental para determinar los límites de autoridad de un controlador. No basta con conocer el modelo; hay que entender sus restricciones operativas. En esa línea, Dhooze et al. (2024) emplearon algoritmos de continuación numérica para identificar superficies de bifurcación donde coexisten múltiples atractores ante variaciones mínimas de los parámetros del sistema.

Esta capacidad de controlar transiciones topológicas ha permitido que investigadores como Wang et al. (2018) demuestren algo sorprendente: es factible forzar al sistema a abandonar su régimen caótico y saltar a una órbita periódica mediante leyes de control que alteran la estabilidad de los puntos de equilibrio (bifurcaciones de Hopf). Este tipo de manipulación geométrica convierte al modelo de Lorenz en un laboratorio ideal para sistemas más complejos, desde modelos climáticos de gran escala hasta representaciones de orden fraccionario que buscan capturar la disipación real en fluidos.

2.2 Paradigmas de control: de la retroalimentación clásica a la robustez

La literatura se divide entre quienes buscan modelos exactos y quienes diseñan para la incertidumbre. La necesidad de controlar la inestabilidad del atractor ha impulsado una vasta gama de metodologías de control. Los enfoques pioneros, como el método OGY (Ott et al., 1990), demostraron que pequeñas perturbaciones aplicadas en secciones de Poincaré pueden estabilizar órbitas periódicas inestables. El control por retroalimentación retrasada, propuesto por Pyragas (1992), sigue siendo una técnica elegante para estabilizar órbitas inestables sin desplazar los puntos de equilibrio originales.

Sin embargo, en la práctica de la ingeniería, la rigidez de estos métodos suele ser su perdición. Enfoques más modernos, como la retroalimentación linealizante analizada por Villafuerte y Ávila (2020), intentan simplificar el problema transformando la dinámica no lineal en una lineal equivalente, aunque su éxito depende totalmente de qué tan limpia sea la medición de los estados x_1 , x_2 , x_3 .

Para enfrentar las perturbaciones externas y el ruido paramétrico, se han propuesto esquemas de control por modos deslizantes (SMC). Recientemente, Wang et al. (2021) desarrollaron un controlador SMC basado en observadores de

ganancias variantes en el tiempo, logrando una sincronización robusta incluso en presencia de perturbaciones no modeladas. A pesar de estos avances, el fenómeno del *chattering* (oscilaciones de alta frecuencia) sigue siendo un reto técnico importante. Esto motiva la exploración de controladores que integren una capa de adaptación estadística, permitiendo que las ganancias de control evolucionen dinámicamente para suavizar la respuesta del actuador y mejorar la precisión en el seguimiento de trayectorias.

Estas técnicas contemporáneas ofrecen alternativas robustas al control de caos, aunque generalmente requieren conocimiento completo del modelo matemático del sistema. Estas generalizaciones se han convertido en herramientas clave para analizar la predictibilidad de métodos numéricos, especialmente en meteorología y ciencias atmosféricas, donde el caos inherente del sistema atmosférico impone límites naturales a la predicción determinista (Chou et al., 2010).

2.3 Modelado climático, predicción y el auge del aprendizaje profundo

Desde la década de 1930, los estudios atmosféricos han identificado discontinuidades y cambios abruptos en variables meteorológicas, característicos de la dinámica caótica de la atmósfera (Krishnamurti y Ramanathan, 1982). La utilidad del modelo de Lorenz trasciende la teoría de control y se posiciona como el núcleo de los experimentos de predicción atmosférica. En este ámbito, Sun et al. (2023) han utilizado variantes del modelo (específicamente el Lorenz-96) para simular eventos climáticos extremos, demostrando que la predictibilidad no es una constante, sino que depende de la escala de las perturbaciones iniciales y del ruido de fondo.

Esta línea de investigación sugiere que cualquier intento de controlar el clima o procesos industriales similares debe contemplar la naturaleza estocástica del sistema. En concordancia, Palmer et al. (2005) argumenta que la representación de la incertidumbre mediante modelos estocásticos es fundamental para superar las limitaciones de los modelos deterministas tradicionales en la predicción del tiempo.

Por otro lado, la integración de la Inteligencia Artificial ha abierto una nueva frontera. Investigaciones como las de Milinski et al. (2021) han explorado el uso de grandes conjuntos de datos (*ensembles*) para entrenar arquitecturas que capturen la dinámica de largo plazo del atractor de Lorenz.

Sin embargo, surge un conflicto técnico evidente: aunque las redes neuronales pueden predecir trayectorias con una precisión asombrosa en el corto plazo, carecen de las garantías de estabilidad que ofrece la teoría de control clásica. Esta opacidad de los modelos de aprendizaje profundo es lo que motiva la búsqueda de soluciones híbridas que conserven la estructura física del sistema, pero integren la capacidad de adaptación de los métodos modernos.

2.4 Cuantificación de incertidumbre y enfoques estadísticos en control

El desafío actual de la ingeniería no es simplemente suprimir el caos en condiciones de laboratorio, sino gestionar la incertidumbre que permea en los sistemas reales. La literatura más reciente ha girado hacia la cuantificación probabilística para robustecer los lazos de control. Un trabajo

referente es el de Uy et al. (2024), quienes proponen el uso de expansiones de caos polinómico para evaluar cómo el ruido de medición se propaga a través de las variables de estado. Su hallazgo es crítico: un controlador que ignora la dispersión estadística del error está destinado a la inestabilidad. Esto valida la necesidad de mecanismos que, en lugar de ganancias fijas, operen sobre métricas de segundo orden como la desviación estándar.

La transición desde la predicción hacia el control efectivo requiere una gestión rigurosa de la incertidumbre paramétrica. Métodos numéricos avanzados, como los propuestos por Liao y Wang (2014), han logrado mitigar la acumulación de errores en simulaciones de largo plazo, pero la incertidumbre inherente al caos sigue siendo el principal obstáculo. Para cuantificar esta dispersión, se han adoptado métricas probabilísticas modernas como la divergencia de Kullback-Leibler en pronósticos por ensambles (Ding et al., 2019) y técnicas de expansión de caos polinomial (SE-PCE) para evaluar promedios temporales con alta eficiencia computacional (Uy et al., 2024).

En este contexto, investigaciones lideradas por Ding et al. (2019) resaltan que la adaptación basada en el análisis de la distribución del error permite una convergencia mucho más suave en sistemas altamente no lineales. Al respecto, Chen et al. (2014) ya habían advertido que la principal causa de falla en los controladores PID convencionales aplicados a sistemas de Lorenz es la amplificación del ruido de alta frecuencia cuando las ganancias son elevadas. Nuestra propuesta se inserta precisamente en este vacío técnico. Al utilizar la normalización estadística y el cálculo dinámico de la media para modular la acción de control, logramos un filtrado intrínseco que protege al sistema de divergencias inesperadas. Esta aproximación no solo mejora el tiempo de estabilización de las variables x_1, x_2, x_3 , sino que proporciona un marco de seguridad operativa frente a la sensibilidad paramétrica característica del atractor.

Desde el ámbito de la estabilidad teórica, el método directo de Lyapunov ha permitido establecer condiciones para el diseño de leyes de control en sistemas caóticos estocásticos, garantizando la convergencia en media cuadrática (Chen et al., 2014). Sin embargo, existe una brecha significativa entre estos complejos análisis probabilísticos y la implementación de controladores prácticos que puedan adaptarse al ruido en tiempo real. La sensibilidad de los parámetros atmosféricos, que puede provocar la aparición o desaparición súbita del caos (Chakraborty y Veerasha, 2024), exige un esquema de control que sea intrínsecamente adaptable.

2.5 Asimilación de datos y el límite de la predictibilidad por Inteligencia Artificial

El uso del modelo de Lorenz como sistema de evaluación para técnicas de asimilación de datos ha sido fundamental para entender la fragilidad de los pronósticos. Métodos tradicionales de asimilación, como el 3D-Var, presentan una dependencia crítica de la precisión de las condiciones iniciales; una mínima desviación en estas captura la divergencia exponencial de las trayectorias, invalidando la estabilidad del modelo en horizontes temporales cortos (Harter et al., 2015). En un esfuerzo por extender esta predictibilidad, se ha recurrido al aprendizaje automático. Investigaciones pioneras de Pasini y Pelino (2005) demostraron que las redes neuronales

pueden aprender la dinámica temporal del modelo de Lorenz para estimar límites de predicción atmosférica, sentando las bases para el uso de modelos simplificados en el estudio de sistemas reales.

Recientemente, el aprendizaje profundo ha expandido estas capacidades mediante el uso de redes neuronales recurrentes (RNN), las cuales han probado ser capaces de corregir sesgos sistemáticos en simulaciones climáticas, superando a los métodos de asimilación tradicionales en el modelo Lorenz-96 (Penny et al., 2023). Dentro de este paradigma, el *reservoir computing* ha emergido como una solución eficiente para predicciones de corto plazo, mientras que las arquitecturas LSTM destacan en la captura de dependencias de largo alcance (Chattopadhyay et al., 2020). Incluso se han propuesto enfoques híbridos que combinan el modelo de Lorenz con restricciones físicas derivadas de leyes de conservación, logrando robustez ante datos ruidosos (Pandey y Schumacher, 2021). No obstante, a pesar de la capacidad de estas herramientas para anticipar eventos extremos (Pathak et al., 2020), la literatura aún presenta un vacío en cuanto a la regulación activa y sencilla de estas variables bajo un esquema que no dependa de una infraestructura computacional masiva.

A diferencia de los enfoques de control robusto que exigen modelos exactos o las soluciones de IA que operan como cajas negras, en este artículo se propone un controlador PID con adaptación estadística. Al interpretar el modelo de Lorenz como una representación simplificada de la dinámica del cambio climático, se identifica que el reto no es solo predecir la trayectoria, sino influir en ella. Mientras que la literatura se ha centrado en la asimilación y la predicción probabilística (Buizza, 2018).

En este artículo se propone una estrategia de control PID mediante una técnica de sintonización estadística aplicado al modelo de Lorenz, entendido como una representación simplificada de la dinámica del cambio climático. Dado que dicho modelo exhibe comportamiento caótico, su análisis permite estudiar cómo pequeñas perturbaciones pueden generar trayectorias climáticas divergentes. La implementación del PID busca demostrar que, aun en presencia de caos determinista, es posible regular y estabilizar las variables del sistema, lo que en el contexto real se interpreta como el conjunto de acciones humanas coordinadas, políticas ambientales, mitigación de emisiones, intervención tecnológica y gestión de recursos, necesarias para influir y atenuar la evolución del cambio climático desde una perspectiva de un modelo dinámico.

3. Metodología

El modelo de Lorenz (Lorenz, 1963) se define como un conjunto de tres ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas que representan la esencia de la dinámica no lineal y la sensibilidad paramétrica. Para los fines de este estudio, el modelo se expresa utilizando las variables de estado x , y , z , de la siguiente manera (Sparrow, 1982):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z \end{aligned} \quad (1)$$

donde x, y, z son variables dinámicas proporcionales a diferentes magnitudes físicas según sea el sistema en que se implementa el modelo de Lorenz, σ , ρ , y β son parámetros positivos que representan propiedades físicas del sistema como el número de Prandtl, el número de Rayleigh y ciertos aspectos geométricos (Curry, 1978).

Para las simulaciones, se han seleccionado los parámetros $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$. Esta configuración es fundamental, ya que sitúa al sistema en el punto de bifurcación donde las trayectorias abandonan los equilibrios estables y desarrollan el atractor extraño clásico. De acuerdo con Shen et al. (2018), este régimen paramétrico garantiza un entorno de prueba riguroso para evaluar leyes de control, debido a la divergencia exponencial de las trayectorias y la inestabilidad de las órbitas periódicas subyacentes.

Por otro lado, el algoritmo de control empleado en este trabajo consiste en una propuesta de controlador estadístico, integrado dentro de un esquema de control tipo PID, donde el error se define como la diferencia entre la referencia deseada $r(t)$ y la salida del sistema $x(t)$, es decir:

$$e(t) = r(t) - x(t). \quad (2)$$

El objetivo del controlador es que, a medida que el sistema evoluciona en el tiempo, la salida $x(t)$ converja hacia el valor deseado $r(t)$. En términos del error, esto equivale a exigir que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0. \quad (3)$$

El controlador estadístico propuesto está fundamentado en el análisis de datos muestrales obtenidos mediante muestreo aleatorio (Ojeda et al., 2024), con el fin de garantizar resultados válidos, estables y generalizables. A diferencia de esquemas PID tradicionales, este controlador incorpora conceptos estadísticos, como el Teorema Central del Límite y la distribución normal, para normalizar el error, calcular probabilidades y ajustar los parámetros del control de manera adaptativa.

En este esquema, los datos muestrales del error no solo se emplean para estimar la acción de control instantánea, sino también para evaluar la estabilidad, robustez y la capacidad del sistema controlado para compensar perturbaciones externas. Un preprocesamiento adecuado de los datos mejora la precisión del control, reduce oscilaciones y optimiza el desempeño global del sistema. Esta propuesta destaca el potencial de los enfoques estadísticos para mejorar controladores aplicados a sistemas no lineales y caóticos, como el modelo de Lorenz.

Los métodos tradicionales de control asumen un error instantáneo directamente en el PID; sin embargo, en este trabajo el error se procesa mediante un mecanismo probabilístico, que determina la probabilidad de que el sistema mantenga una desviación significativa respecto a la referencia. Esto permite ajustar de forma inteligente las ganancias del controlador. El esquema PID general empleado es:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}. \quad (4)$$

pero con parámetros adaptativos modulados por el análisis estadístico. El procesamiento estadístico del error se basa en analizar los datos del error para estimar la media muestral:

$$\mu_e(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=t-N}^t e(k) \quad (5)$$

y la desviación estándar:

$$\sigma_e(t) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=t-N}^t (e(k) - \mu_e(t))^2} \quad (6)$$

El Teorema Central del Límite (TCL) permite asumir que, para muestras suficientemente grandes, la distribución de la media muestral se aproxima a una normal (Bitseki y Delmas, 2024). Así, el error se estandariza como:

$$z(t) = \frac{e(t) - \mu_e(t)}{\sigma_e(t) + \varepsilon} \quad (7)$$

Este valor indica cuántas desviaciones estándar se separa el error instantáneo del comportamiento promedio esperado del sistema (Ojeda-Misses *et al.*, 2025). Con $z(t)$, se calcula la probabilidad de desviación mediante la función de distribución acumulada normal estándar:

$$P(t) = \Phi(z(t)) \quad (8)$$

La interpretación física es que $P(t)$ mide la probabilidad acumulada de que el sistema se encuentre por encima del nivel de error observado. La expresión analítica de la función de distribución acumulada o distribución normal es:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{s^2}{2}} ds \quad (9)$$

Las funciones de activación probabilística para el ajuste del controlador son definidas en función del esquema estadístico capaz de modular las ganancias, es decir, comúnmente para las ganancias derivativa e integral se ajustan en magnitudes pequeñas y la ganancia integral en magnitudes mayores.

Por lo que, las funciones quedan a consideración del diseñador del controlador. En este caso, se consideraron funciones sigmoideas capaces de regular de manera no lineal y de forma moderada dichas ganancias. Finalmente, las ganancias del controlador se ajustan de manera probabilística para cada variable del modelo como se muestra en la Figura 1.

$$K_P = f(P), K_I = g(P), K_D = h(P). \quad (10)$$

donde cada función regular la ganancia para mejorar el amortiguamiento y evitar divergencias propias del modelo de Lorenz. El objetivo del control es regular simultáneamente estas tres variables $x(t), y(t), z(t)$ hacia las referencias deseadas:

$$r_x(t), r_y(t), r_z(t) \quad (11)$$

definiendo el error para cada variable y su normalización estadística se tiene:

$$e_x(t) = r_x(t) - x(t) \quad (12)$$

$$e_y(t) = r_y(t) - y(t) \quad (13)$$

$$e_z(t) = r_z(t) - z(t). \quad (14)$$

Dado el carácter caótico del sistema, cada error se transforma mediante un filtro estadístico basado en media y desviación estándar:

$$z_{e_{xP}}(t) = \frac{e_{xP}(t) - \mu_{e_{xP}}(t)}{\sigma_{e_{xP}}(t) + \varepsilon} \quad (15)$$

$$z_{e_{xI}}(t) = \frac{\int e_{xI}(t) - \mu_{e_{xI}}(t)}{\sigma_{e_{xI}}(t) + \varepsilon} \quad (16)$$

$$z_{e_{xD}}(t) = \frac{\dot{e}_{xD}(t) - \mu_{e_{xD}}(t)}{\sigma_{e_{xD}}(t) + \varepsilon} \quad (17)$$

Este procesamiento estadístico suaviza fluctuaciones extremas y hace al controlador más robusto frente al caos.

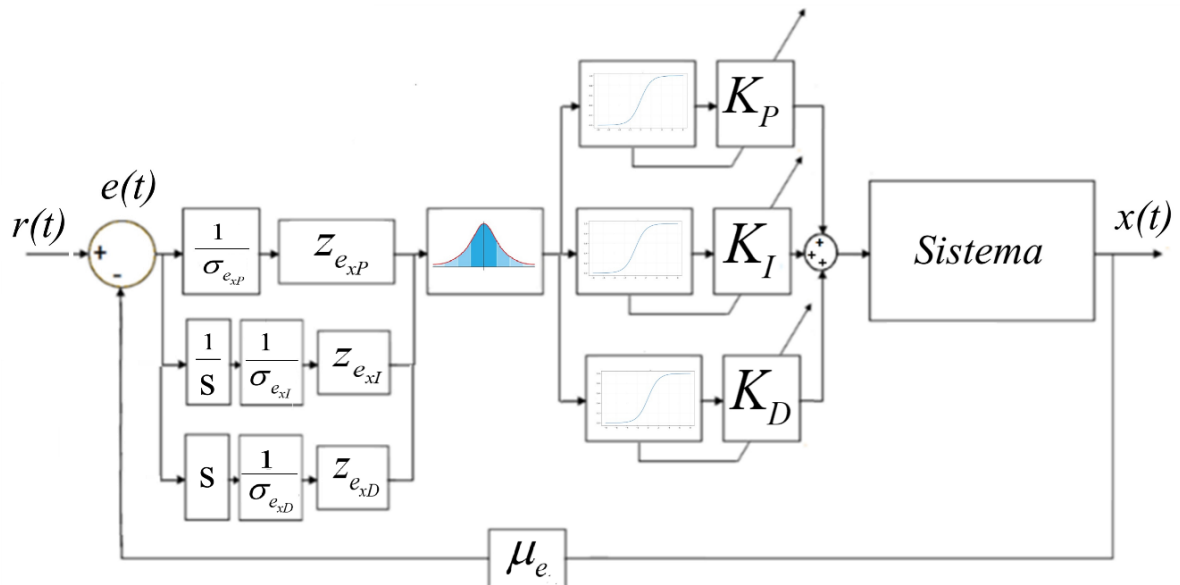


Figura 1. Controlador PID estadístico para la regulación de variables.

Además, es aplicado para cada variable $x(t), y(t), z(t)$ que permite ajustar el PID para cada variable del sistema. Para cada error estadístico se aplica un PID independiente:

$$u_x(t) = K_p e_x(t) + K_i \int_0^t e_x(\tau) d\tau + K_D \frac{de_x(t)}{dt} \quad (18)$$

Así, el sistema posee tres señales de control:

$$u_x(t), u_y(t), u_z(t) \quad (19)$$

cada una actúa en el modelo del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) + b_x u_x(t) \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y + b_y u_y(t) \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z + b_z u_z(t) \end{aligned} \quad (20)$$

donde $u_x(t), u_y(t), u_z(t)$ son las estrategias de control PID reguladas mediante el algoritmo adaptable estadístico. Finalmente, puede agregarse b_x, b_y, b_z que permitan regular la dinámica del sistema fuera del ajuste estadístico propuesto en este trabajo.

La aplicación combinada del controlador PID y un algoritmo estadístico propuesto con el modelo de Lorenz permite dar sentido físico y conceptual a cómo un sistema caótico puede ser estabilizado mediante acciones de control diseñadas. En el contexto matemático, el modelo de Lorenz exhibe extrema sensibilidad a las condiciones iniciales, dando lugar a trayectorias divergentes e impredecibles aun cuando el sistema es completamente determinista. El controlador PID actúa regulando cada una de las variables x, y, z hacia valores de referencia deseados, mientras que la normalización estadística suaviza la magnificación natural del error propia del caos. Esta combinación representa una forma de desactivar la tendencia del modelo a escapar de cualquier trayectoria estable, lo que, desde una perspectiva teórica, constituye un mecanismo de domesticación del caos.

Interpretado en términos de cambio climático, este enfoque simbólicamente modela cómo los sistemas climáticos reales, complejos, no lineales y altamente sensibles a perturbaciones, requieren intervenciones coordinadas para evitar su desestabilización. En esta analogía, las variables del modelo de Lorenz pueden considerarse representaciones simplificadas de fenómenos climáticos interdependientes, tales como temperatura, concentración de gases de efecto invernadero y circulación atmosférica. Cada controlador PID asignado a x, y, z refleja acciones específicas dirigidas a regular cada una de las variables: mitigación de emisiones, restauración de ecosistemas o modificación de patrones de consumo energético.

4. Resultados experimentales

La implementación computacional del controlador PID con ajuste estadístico se desarrolló en Python y se aplicó al modelo de Lorenz, que se define mediante las ecuaciones diferenciales no lineales clásicas. Se seleccionaron los valores clásicos de

$\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$, debido a que representan el régimen de mayor inestabilidad y comportamiento caótico (atractor de Lorenz), lo cual es ideal para probar la robustez del controlador propuesto. Para resolver estas ecuaciones, se emplea el método de integración numérica de Runge–Kutta de cuarto orden (RK4), implementado en la función `rk4_step`, la cual actualiza el estado del sistema en cada intervalo de tiempo.

La simulación es llevada a cabo mediante un paso de $dt = 0.005$ segundos durante un tiempo total de $T = 40$ segundos, generando un total de $N = T/dt$ muestras por cada una de las trayectorias simuladas. Se realizan de manera simultánea dos simulaciones, la primera para el modelo de Lorenz sin control y la segunda, bajo la acción del controlador estadístico propuesto.

El modelo de Lorenz ha sido usado en la literatura para describir la convección atmosférica y, con ello, se ha sido usado como uno de los primeros ejemplos matemáticos de un sistema caótico. En este trabajo las tres variables representan magnitudes climáticas simplificadas, como la temperatura, la humedad y los índices de rayos ultravioleta (UV), donde es importante considerar que es un modelo de baja dimensión, es decir, es capaz de modelar una propiedad fundamental del clima real y una alta sensibilidad a las condiciones iniciales.

El modelo de Lorenz se emplea como un modelo con analogía del cambio climático donde cada variable puede interpretarse como un indicador global del planeta. El comportamiento caótico puede asemejarse como perturbaciones provocando cambios abruptos y difíciles de predecir, como sucede actualmente con el cambio climático. Este ejemplo se considera con el fin de concientizar y considerar que un sistema como el de Lorenz equivale a diseñar leyes de control para un sistema climático sustancialmente inestable y buscar contrarrestar los efectos y que evolucione hacia regímenes extremos.

Por lo tanto, el modelo de Lorenz se definen condiciones iniciales en $X_0 = [0.1, 1, 0]$, mientras que la referencia deseada $X_{ref} = [22.6, 62, 1]$ corresponde a una temperatura de 22.6 °C, 62 % de humedad y 1 de UV.

A continuación, se especifican las ganancias del controlador PID clásico K_p, K_i, K_D para cada una de las tres ecuaciones del modelo de Lorenz. Sin embargo, la componente derivativa no se utiliza de manera fija, sino que se ajusta dinámicamente mediante un algoritmo estadístico basado en la normalización del error derivado. Para ello, el código mantiene una ventana temporal móvil de tamaño $window = 0.6/dt$, en la cual se recopilan las derivadas del error correspondientes a cada canal. Este conjunto de datos se emplea para estimar la media μ y la desviación estándar σ y se obtiene el valor probabilístico asociado a través de la función de distribución acumulada normal estándar $P = \Phi(z)$.

Este parámetro permite regular las ganancias similares a un enfoque adaptable que están acotadas entre valores mínimos y máximos para evitar divergencia. Así, cuando el error varía el algoritmo es capaz de medir datos que se encuentran fuera de la media permitiendo ajustar de forma inmediata el controlador para evitar inestabilidad en el sistema. Este algoritmo define el novedoso método de sintonización del controlador PID estadístico presentado. Sin embargo, es importante considerar que, debido a las no linealidades del modelo de Lorenz, la señal

$u(t)$ no se aplica directamente como entrada, sino que se suma para compensar la dinámica interna, similar a un *feedback linearization*.

Esta técnica permite que el controlador actúe sobre un sistema aproximado como lineal, facilitando la estabilización de los estados del sistema. Cada actualización del estado controlado se realiza mediante RK4, y posteriormente se le añade ruido gaussiano a través de `np.random.normal`, modelando dicho ruido como incertidumbres en las mediciones que permitan simularlo bajo condiciones realistas.

La implementación presentada e implementada computacionalmente permite validar la eficiencia del controlador PID con ajustes estadísticos adaptativos y compensación dinámica para sistemas caóticos tan sensibles como el modelo de Lorenz. En términos físicos, esta estabilización representa una metáfora computacional de cómo estrategias coordinadas, basadas en datos y adaptativas, pueden contribuir a mitigar y controlar fenómenos climáticos altamente inestables.

4.1 Controlador proporcional

En esta sección es presentado un controlador proporcional (P) usando el enfoque estadístico. Se presenta la comparativa para el modelo de Lorenz sin acción de control, es decir, el atractor libre y por otro lado, con la acción del controlador PID estadístico presentado la trayectoria controlada, como uno de los resultados más relevantes. Sin embargo, a pesar de emplear solamente un controlador proporcional con el algoritmo estadístico, en la Figura 2 puede observarse el atractor libre exhibe el comportamiento típico del modelo de Lorenz dinámico, caótico y con oscilaciones.

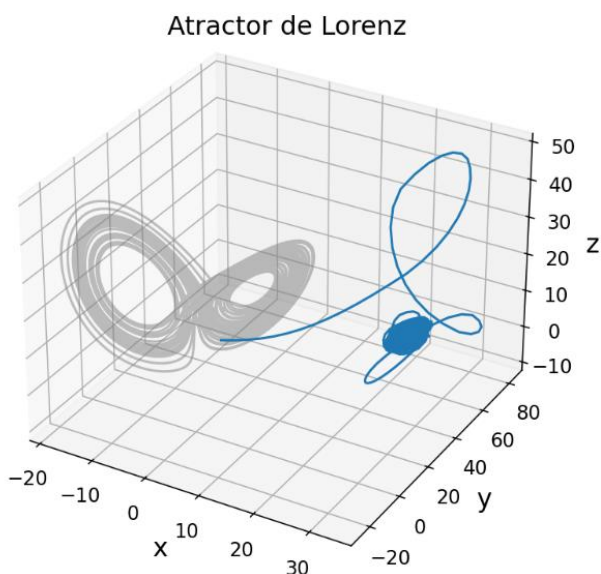


Figura 2. Comparación entre el atractor libre y la trayectoria estabilizada mediante el controlador Proporcional.

En contraste, el atractor controlado deja de mostrar patrones caóticos y se concentra alrededor de una región específica del espacio de estados, donde se ubican los valores de referencia del controlador. Esto demuestra que el controlador no solo atenúa la naturaleza caótica, sino que conlleva al sistema a un nuevo régimen dinámico estable, en el que el sistema permanece confinado y cercano a la referencia. La supresión

del caos sin perder estabilidad es un resultado notable, especialmente considerando la naturaleza no lineal y sensible del modelo.

Por otro lado, la Figura 3 se muestra la convergencia de los estados x, y, z , lo que confirma lo observado en el atractor. Tras un estado transitorio inicial los estados convergen hacia la referencia establecida. La oscilación alrededor del valor objetivo es moderada y constante, lo que confirma que el controlador compensa adecuadamente los errores.

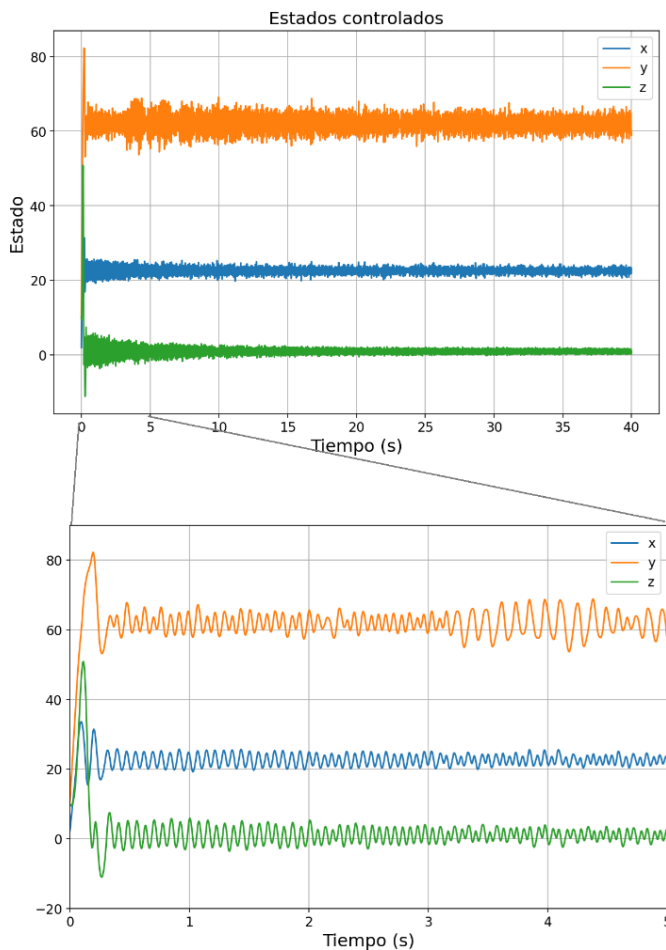


Figura 3. Evolución temporal de los estados x, y, z para el modelo de Lorenz usando el controlador proporcional (P).

Mientras tanto, en la Figura 4 se muestra la evolución temporal de los errores de los tres estados del sistema. Se observa una respuesta transitoria abrupta al inicio, lo cual es típico cuando el controlador debe compensar una desviación significativa entre las condiciones iniciales y el estado objetivo. Tras el pico inicial asociado a las condiciones iniciales y a la naturaleza no lineal del modelo de Lorenz, los tres errores convergen gradualmente alrededor de cero, sin embargo, presentan oscilaciones de amplitud acotadas.

Las oscilaciones presentadas se deben a la dinámica caótica del sistema como a la acción proporcional, que introduce un compromiso entre rapidez de respuesta y estabilidad, especialmente en sistemas altamente no lineales. A pesar de ello, el controlador P demuestra ser suficiente para estabilizar el sistema y acotar el error en un entorno cercano al origen. El comportamiento de las oscilaciones es coherente debido a que solamente se usa un controlador proporcional (P), el cual

permite reducir el error, pero no garantiza su eliminación completamente, por tal motivo, se implementará un controlador sumando las acciones integral y derivativa.

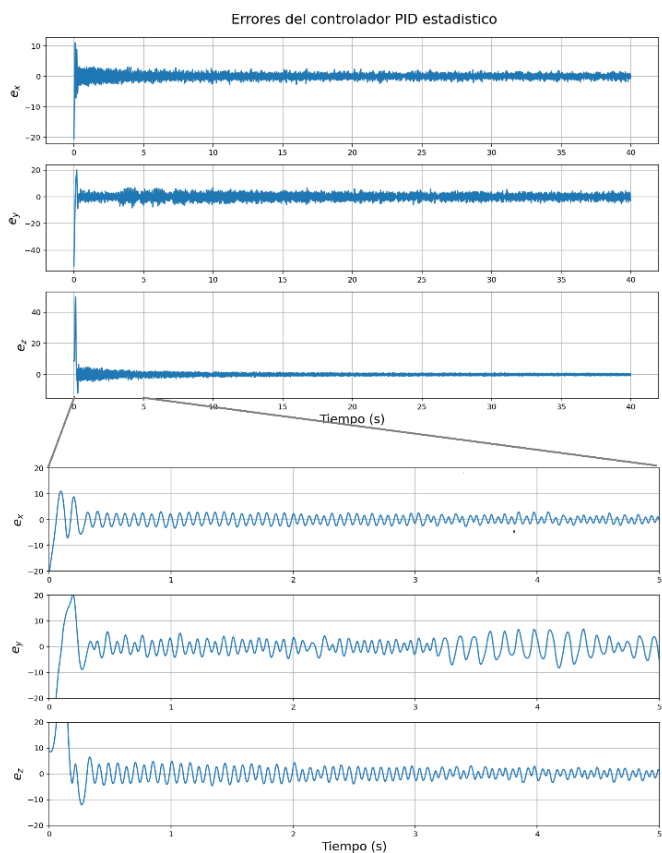


Figura 4. Evolución temporal de los errores de los estados x, y, z para el modelo de Lorenz usando el controlador proporcional (P).

Con el objetivo emplear una métrica que permita medir el rendimiento y el desempeño del controlador, se calcula el Error Cuadrático Medio (ECM) para cada error, el cual permite medir la energía promedio del error a lo largo del tiempo. Un valor reducido del ECM indica que, en promedio, los errores de estado permanecen cercanos a cero, aun cuando existan oscilaciones transitorias, como puede verse en la Figura 5.

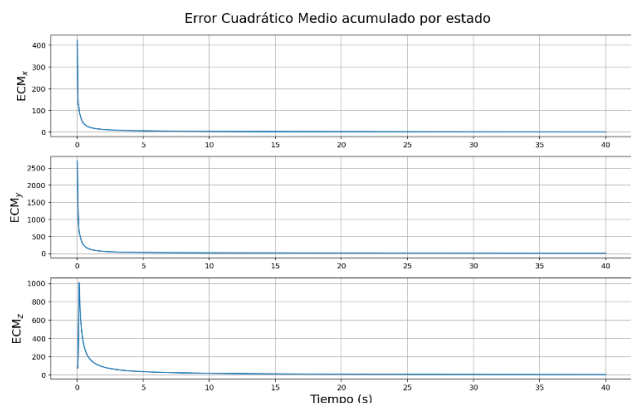


Figura 5. Evolución temporal de los errores cuadráticos medios de los estados x, y, z para el modelo de Lorenz usando el controlador proporcional (P).

Finalmente, son presentadas las señales de control las cuales tienen un comportamiento coherente con la acción proporcional inmediata requerida para compensar los errores

iniciales (véase Figura 6). En la etapa inicial se observan picos de magnitud considerable, los cuales se justifican por la marcada no linealidad del modelo de Lorenz y por la necesidad del controlador de forzar la dinámica del sistema desde una condición inicial fuera del régimen deseado, característico de la dinámica caótica, hacia la región objetivo dada por los estados del modelo de Lorenz.

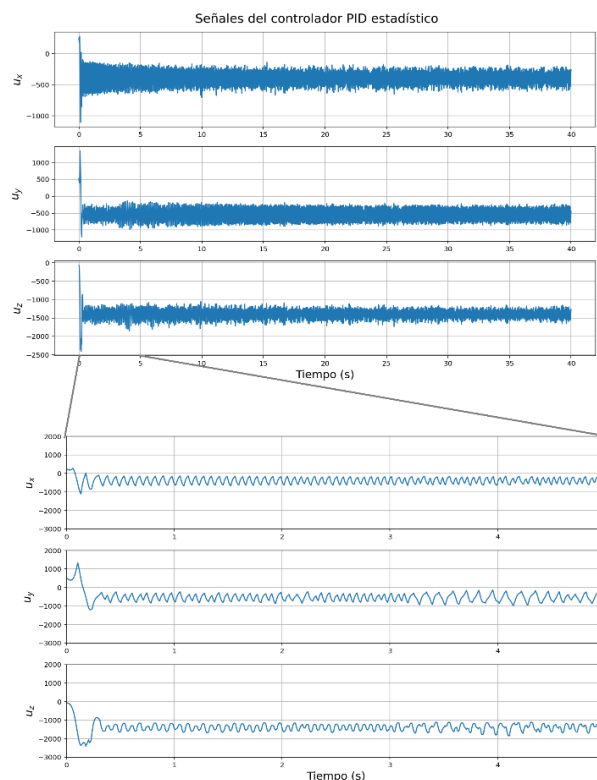


Figura 6. Evolución temporal de las señales de control para los estados x, y, z para el modelo de Lorenz usando el controlador proporcional (P).

En general, después del transitorio, las señales se estabilizan alrededor de valores medios constantes, aunque con fluctuaciones. Estas oscilaciones son consecuencia del algoritmo estadístico, que ajusta adaptativamente los parámetros del controlador en función de la densidad probabilística del error. Aun así, las señales se mantienen acotadas, sin divergencia demostrando que la acción de control sigue siendo físicamente realizable dentro del marco del modelo.

A pesar de que el controlador proporcional presenta un desempeño aceptable, a continuación, se implementa un controlador PID, incorporando las acciones integral y derivativa con el fin de mejorar el desempeño del sistema. La acción integral contribuye a la eliminación del error en estado estacionario, mientras que la acción derivativa atenúa las oscilaciones y mejora la respuesta transitoria.

4.2 Controlador Proporcional Integral Derivativo (PID)

En esta sección es presentado el controlador PID estadístico, se compara el atractor libre de control y el atractor controlado, donde puede observarse una visualización clara del impacto del controlador. El atractor libre mostrado en la Figura 7 presenta el comportamiento caótico característico dado por

oscilaciones amplias, trayectorias divergentes y alternancia irregular entre los dos lóbulos del atractor de Lorenz.

En contraste, el atractor controlado colapsa hacia una trayectoria estable cercana a la referencia deseada. En lugar de recorrer los dos lóbulos, la dinámica controlada se dirige rápidamente hacia los estados deseados, lo que indica que el caos ha sido prácticamente suprimido mediante la acción de control.

Este resultado es significativo, ya que demuestra que el PID estadístico no solo reduce los errores, sino que controla cualitativamente el comportamiento global de los estados del sistema.

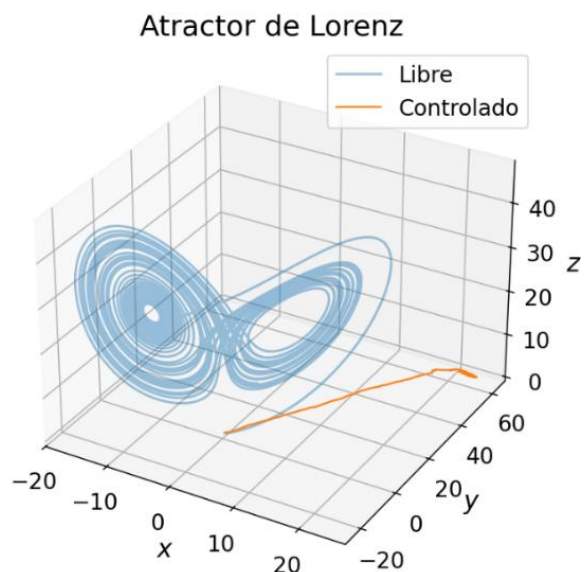


Figura 7. Comparación entre el atractor libre y la trayectoria estabilizada mediante el controlador PID.

Por otro lado, la Figura 8 muestra las gráficas de los estados x, y, z en conjunto con las referencias, dicha figura muestra que el controlador logra llevar cada estado hacia su valor objetivo con una dinámica rápida y estable.

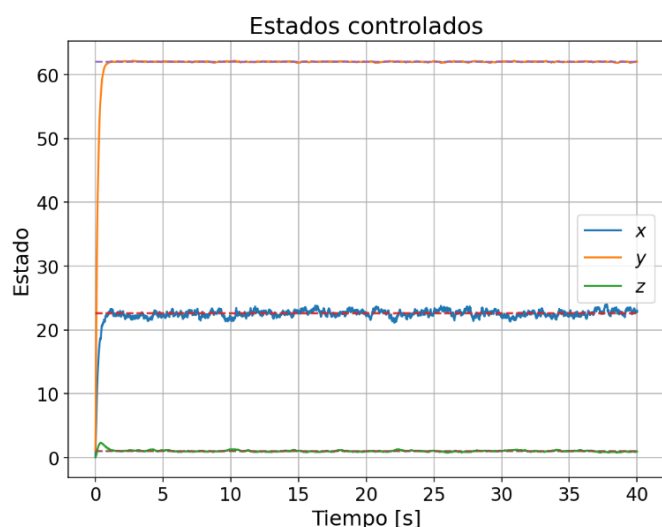


Figura 8. Evolución temporal de los estados x, y, z para el modelo de Lorenz usando el controlador PID.

Para el estado x , el controlador PID estadístico logra una convergencia rápida hacia la referencia, seguida de

oscilaciones mayores y acotadas alrededor del valor objetivo, lo que indica una adecuada acción derivativa y un filtrado estadístico efectivo. En el estado y , se observa el menor tiempo de establecimiento, coherente con la dinámica interna del modelo de Lorenz. La convergencia cercana a la referencia confirma un ajuste adecuado de la acción integral. Finalmente, el estado z , a pesar de ser el más sensible del sistema, es estabilizado de manera efectiva. Tras un pico inicial de control, la trayectoria converge y se mantiene próxima a la referencia con oscilaciones pequeñas y estables.

A continuación, en la Figura 9 se muestra el comportamiento temporal de los errores e_x, e_y y e_z , presentados en la parte inferior de la figura, donde se observa una reducción abrupta durante los primeros instantes, seguida de una estabilización en torno a cero. Este comportamiento confirma la eficacia del controlador PID en su acción proporcional integral derivativa para corregir rápidamente los errores iniciales. Asimismo, el algoritmo estadístico contribuye y ayuda a suavizar las fluctuaciones y a prevenir la amplificación de pequeñas perturbaciones, fenómeno típico en sistemas caóticos no controlados. En conjunto, ambos mecanismos dan lugar a errores pequeños, lo que indica estabilidad práctica del sistema controlado.

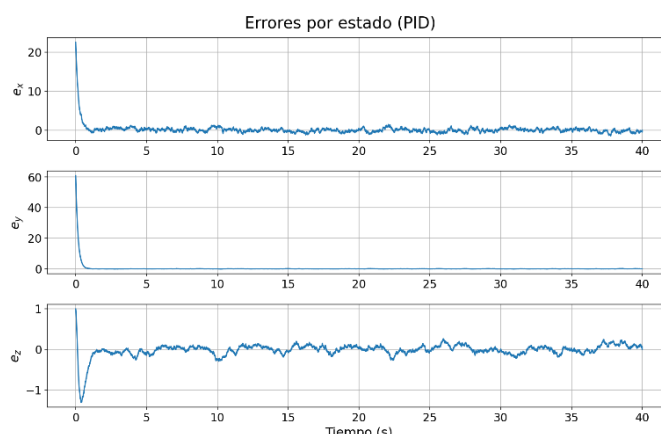


Figura 9. Evolución temporal de los errores de los estados x, y, z para el modelo de Lorenz usando el controlador PID.

Para evaluar el desempeño del controlador, se calcula el Error Cuadrático Medio (ECM) de cada estado como puede observarse en la Figura 10. Los valores obtenidos para e_x, e_y y e_z reflejan un bajo nivel de error promedio a lo largo del tiempo, lo que indica que las trayectorias de los estados permanecen cercanas a sus referencias una vez superada la etapa transitoria. En particular, el ECM asociado al estado z resulta ligeramente mayor, lo cual es consistente con su mayor sensibilidad dinámica dentro del modelo de Lorenz. No obstante, en todos los casos, los valores de ECM se mantienen acotados y estables observando una convergencia a cero, confirmando la robustez y efectividad del controlador PID estadístico.

Finalmente, en la Figura 11 se muestra la evolución temporal de las tres señales de control u_x, u_y y u_z . Durante los primeros instantes, las señales reflejan un esfuerzo de control requerido para contrarrestar la divergencia exponencial característica del modelo de Lorenz a partir de condiciones iniciales alejadas de la región deseada. Una vez superado este

régimen transitorio, las acciones de control convergen hacia valores aproximadamente constantes, presentando únicamente oscilaciones de pequeña amplitud, las cuales se asocian al componente estadístico del controlador y al ruido inherente del sistema.

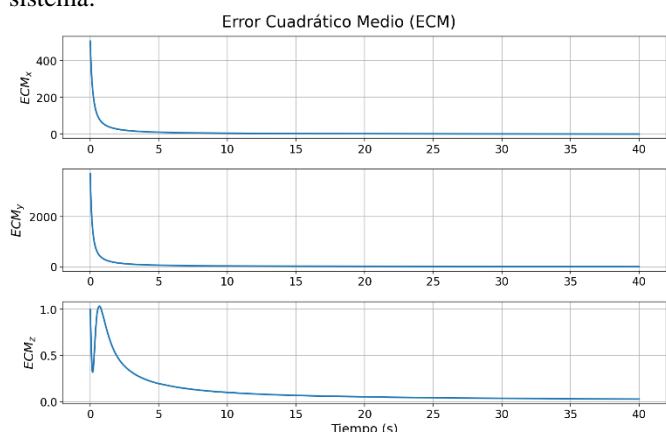


Figura 10. Evolución temporal de los errores cuadráticos medios de los estados x, y, z para el modelo de Lorenz usando el controlador PID.

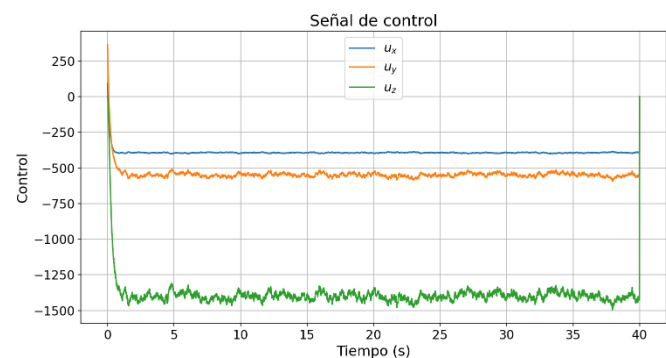


Figura 11. Evolución temporal de las señales de control para los estados x, y, z para el modelo de Lorenz usando el controlador PID.

5. Discusión de resultados

En cuanto al desempeño del controlador proporcional aplicado al modelo de Lorenz permite identificar con claridad tanto sus alcances como sus limitaciones frente a dinámicas altamente no lineales. El análisis de los errores de seguimiento muestra que, pese a la elevada sensibilidad a las condiciones iniciales propia del sistema, el controlador es capaz de reducir de manera concisa los errores iniciales entre los estados y sus referencias. Es importante mencionar que durante el régimen transitorio aparecen picos dados en las señales del error, que tienden a reducirse en un intervalo de tiempo relativamente corto, de modo que los errores permanecen acotados dentro de un régimen cercano al cero. Sin embargo, al tratarse de una estrategia de control proporcional, persisten oscilaciones, lo que permite observar la ausencia controladores adicionales que permitan el amortiguamiento, que puede lograrse mediante las acciones derivativas y/o integrales.

Por otro lado, las señales de control reflejan un comportamiento similar dado por oscilaciones, durante los primeros instantes presentan una respuesta activa, asociada a la magnitud elevada del error inicial, para alcanzar los valores deseados en estado transitorio. Posteriormente, las señales se estabilizan alrededor de niveles casi constantes, manteniéndose acotadas a pesar de la presencia de oscilaciones

y ruido. Este hecho indica que el controlador proporcional no introduce inestabilidad al sistema, aunque la acción de alta frecuencia revela una capacidad limitada para suavizar la dinámica caótica subyacente.

En suma, la evolución temporal de los estados muestra una tendencia de convergencia hacia las referencias deseadas. En particular, para los estados x, y, z se logra que converjan hacia los objetivos de control, a pesar de tener oscilaciones persistentes pero estables, mientras que el estado y alcanza una región cercana a la referencia con fluctuaciones de mayor amplitud. En conclusión, puede observarse que los estados permanecen dentro de un régimen dinámico controlado y no presentan divergencia en el sistema.

Es importante mencionar que la comparativa entre el atractor libre de control y el atractor con aplicación del control permiten la regulación de los estados del sistema, a pesar de solamente tener un controlador proporcional, es decir, el sistema es controlado a pesar de tener una dinámica caótica natural. Pude decirse que es forzado a ser controlador alrededor de una región distinta de su naturaleza, aunque no se alcance un error igual a cero, pero puede converger a una referencia deseada. Lo anterior, permite afirmar que, el patrón caótico característico del atractor de Lorenz puede ser modificado, lo que confirma que, una estrategia de control proporcional puede controlar el caos e inducir un comportamiento estable.

Por otro lado, la implementación del controlador PID estadístico permite reafirmar lo anterior, es decir, es modificar la dinámica del sistema mediante las acciones integral y derivativa. En contraste, sin la acción de control las trayectorias se presentan en los estados oscilaciones irregulares y una marcada sensibilidad a las condiciones iniciales. Sin embargo, al activar el esquema PID, los estados del sistema $x(t), y(t)$ y $z(t)$ muestran una estabilización progresiva en torno a sus valores de referencia.

Por lo que, el algoritmo estadístico mediante la normalización del error, la estimación de la media, la desviación estándar, la estimación de la probabilidad de error y la función de mapeo permiten tener un buen desempeño, ya que evita ampliaciones abruptas en la señal de control ante perturbaciones pequeñas, permitiendo una acción más suave y reduciendo oscilaciones dadas por el ruido numérico o por la propia naturaleza del sistema. Como resultado, puede verse esto en los errores, pues disminuyen de forma gradual, evidenciando la convergencia hacia las referencias.

Más allá de los resultados numéricos, este trabajo tiene como contribución un algoritmo estadístico capaz de regular los estados de un sistema mediante técnicas conocidas, sin necesidad de conocer explícitamente al sistema brindando una visión computacional y conceptual relevante para la combinar la teoría del control clásico con herramientas computacionales estadísticas para llevar a cabo el control de sistemas caóticos sin hacer de menos los sistemas complejos.

Es importante mencionar, que el controlador PID estadístico no elimina el carácter no lineal del modelo de Lorenz, sino que compensa mediante la retroalimentación apoyado de datos estadísticos e información probabilística. Lo que ayuda a controlar los estados del modelo de Lorenz en un comportamiento estable y controlable. Desde un punto de vista teórico, este enfoque permite abrir un nuevo campo de estudio de controladores clásicos mediante nuevas técnicas de sintonización usando conceptos estadísticos y probabilísticos como el Teorema Central del Límite, la distribución normal,

entre otros temas.

Finalmente, los resultados presentados permiten integrar la teoría del control, la probabilidad, la estadística y la teoría del caos y pueda extrapolarse, al menos de manera conceptual, al análisis de sistemas complejos como el clima. Al igual que el modelo de Lorenz, los sistemas climatológicos presentan incertidumbres, cambios, ruidos y extremas sensibilidades a perturbaciones externas. En este sentido, el algoritmo propuesto presenta una estrategia basada en regulación mediante el uso de la estadística y un enfoque probabilístico, sin embargo, puede considerarse que pueda ser aplicado en control de procesos, sistemas robóticos, sistemas mecatrónicos, entre otros.

6. Conclusiones

En este trabajo se presentó la aplicación y la implementación dos esquemas de control aplicados al sistema caótico de Lorenz, primero, un controlador proporcional (P) y un controlador Proporcional Integral Derivativo (PID) con un algoritmo de sintonización adaptable estadístico. El modelo de Lorenz es conocido como un modelo que ha sido usado para modelar dinámicas climáticas que permite compararlo con las problemáticas actuales del planeta como el calentamiento global y las crecientes incertidumbres asociadas a los fenómenos y cambios climáticos.

Los resultados obtenidos muestran que el esquema de control proporcional, si bien logra una reducción parcial de las oscilaciones, no es suficiente para garantizar la convergencia estable de los estados del sistema ni para suprimir las oscilaciones del comportamiento caótico del modelo de Lorenz. En contraste, el controlador PID con sintonización estadística demuestra un desempeño superior, al lograr la estabilización efectiva de los estados x, y, z hacia las referencias deseadas, reduciendo significativamente las oscilaciones y colapsando el atractor caótico del sistema.

Es importante considerar que la principal contribución de este trabajo es la propuesta de una novedosa técnica de sintonización que no requiere del conocimiento explícito del modelo matemático del sistema a controlar. Dicho algoritmo se basa en la normalización dinámica del error, basada en el cálculo en línea de la media y la desviación estándar, posteriormente, se estima la probabilidad del error que permite ajustar las ganancias del controlador mediante una función de mapeo dada por una función sigmoide. Este enfoque dota al controlador de mayor robustez frente a la no linealidad, la incertidumbre y la sensibilidad a condiciones iniciales, características propias de sistemas dinámicos complejos y caóticos.

En cuanto a las señales de error, del error cuadrático medio y de las señales de control, dichas señales confirman que la inclusión de las acciones integral y derivativa, junto con la adaptación estadística, mejora sustancialmente el desempeño del sistema en términos de estabilidad y suavidad de la respuesta. En particular, se observa una disminución notable del error sostenido y una mejor amortiguación de las oscilaciones transitorias en comparación con el control proporcional.

Finalmente, los hallazgos obtenidos validan la viabilidad de emplear técnicas estadísticas como una alternativa innovadora para la sintonización de controladores PID en sistemas

dinámicos complejos. Este enfoque permite ver nuevos enfoques y líneas de investigación para el control de sistemas y su posible extrapolación a modelos climáticos más elaborados, donde la incertidumbre y la variabilidad juegan un papel central. En el contexto de los problemas climáticos actuales, los resultados sugieren que estrategias de control adaptativas y basadas en estadísticas pueden aportar herramientas útiles para la comprensión, mitigación y regulación de dinámicas no lineales asociadas al clima y al calentamiento global en el planeta.

Agradecimientos

Los autores quieren agradecer a la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo por apoyo otorgado durante la realización del proyecto DI-0674-2025 titulado “Desarrollo y aplicación de un algoritmo estadístico para controladores y redes neuronales”. Los autores agradecen el apoyo brindado por la SECIHTI otorgado a J. M. Cruz Olgún, a través de una beca de maestría.

Referencias

- Bitseki Penda, S. V., & Delmas, J.-F. (2024). Central limit theorem for bifurcating Markov chains. *Statistics & Probability Letters*. <https://doi.org/10.1080/17442508.2023.2295847>
- Buizza, R. (2018). Introduction to the special issue on “25 years of ensemble forecasting”. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 144(S1), 1–2. <https://doi.org/10.1002/qj.3170>
- Chakraborty, A., & Veerasha, P. (2024). Effects of global warming, time delay and chaos control on the dynamics of a chaotic atmospheric propagation model within the frame of Caputo fractional operator. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 128, 107657. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107657>
- Chattopadhyay, A., Hassanzadeh, P., & Subramanian, D. (2020). Data-driven predictions of a multiscale Lorenz 96 chaotic system using machine-learning methods. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 27(3), 373–389. <https://doi.org/10.5194/npg-27-373-2020>
- Chen, W. H., Wei, D., & Lu, X. (2014). Lyapunov-based controller for a class of stochastic chaotic systems. *Advances in Computer Science and Applications*, 2014, 613463. <https://doi.org/10.1155/2014/613463>
- Chou, J. F., Zheng, Z. H., & Sun, S. P. (2010). The think about 10–30 d extended-range numerical weather prediction strategy—facing the atmosphere chaos. *Scientia Meteorologica Sinica*, 30(5), 569–573.
- Curry, J. H. (1978). A generalized Lorenz system. *Communications in Mathematical Physics*, 60(3), 193–204.
- Dhooge, A., Govaerts, W., Kuznetsov, Y. A., Meijer, H. G. E., & Sautois, B. (2024). Computational bifurcation analysis. *arXiv preprint arXiv:2411.00735*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2411.00735>
- Díaz Rojas, C. A., & Pino, R. (2023). Principios de formación de estrategias complejas: un enfoque basado en la teoría de la complejidad. *360: Revista De Ciencias De La Gestión*, 8(8).
- Ding, R., Liu, B., Gu, B., Li, J., & Li, X. (2019). Predictability of ensemble forecasting estimated using the Kullback–Leibler divergence in the Lorenz model. *Advances in Atmospheric Sciences*, 36(8), 837–846. <https://doi.org/10.1007/s00376-019-9034-9>
- Harter, F. P., Yamasaki, Y., & Beck, V. C. (2015). Assimilação de dados via método 3D-Var em dinâmica caótica do modelo de Lorenz. *Anuário do Instituto de Geociências - UFRJ*, 38(1), 73–80. https://doi.org/10.11137/2015_1_73_80
- Krishnamurti, T. N., & Ramanathan, Y. (1982). Sensitivity of the monsoon onset to differential heating. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 39(6), 1290–1306. [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1982\)039](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1982)039)
- Liao, S., & Wang, P. (2014). On the mathematically reliable long-term simulation of chaotic solutions of Lorenz equation in the interval [0,10000]. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 57(2), 330–335. <https://doi.org/10.1007/s11433-013-5375-z>
- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2), 130–141.
- Milinski, S., Mahlstein, I., & Gromer, D. (2021). An ensemble-based statistical methodology to detect differences in weather and climate model

- executable. *Geoscientific Model Development*, 14(9), 5679–5692. <https://doi.org/10.5194/gmd-14-5679-2021>
- Oestreich, C. (2007). A history of chaos theory. *Dialogues in Clinical Neuroscience*, 9(3), 279–289.
- Ojeda-Misses, M. A., Martínez-Arango, H., López-Morales, V., Franco-Árcega, A. and Márquez-Grajales, A. (2024). Self-tuned closed-loop controller based on statistical data using a servomechanism, *2024 XXVI Robotics Mexican Congress (COMRob)*, Torreón, Coahuila, Mexico, 2024, pp. 27-32, doi: 10.1109/COMRob64055.2024.10777440.
- Ojeda-Misses, M., Martínez-Arango, H., Sampedro-Mendoza, A., Franco-Árcega, A., & López-Morales, V. (2025). Diseño de un controlador mediante datos estadísticos en lazo cerrado para un servomecanismo mediante una técnica de autosintonización. *RIIIT Revista Internacional De Investigación e Innovación Tecnológica*, 12(72), 24–43. <https://revistas.uadec.mx/index.php/RIIIT/article/view/104>
- Ott, E., Grebogi, C., & Yorke, J. A. (1990). Controlling chaos. *Physical Review Letters*, 64(11), 1196–1199. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.1196>
- Palmer, T. N., Doblas-Reyes, F. J., Hagedorn, R., & Weisheimer, A. (2005). Probabilistic prediction of climate using multi-model ensembles: From basics to applications. *Philosophical Transactions of the Royal Society B*, 360(1463), 1991–1998. <https://doi.org/10.1098/rstb.2005.1750>
- Pandey, S., & Schumacher, J. (2021). Short- and long-term predictions of chaotic flows and extreme events: A physics-constrained reservoir computing approach. *Proceedings of the Royal Society A*, 477(2253). <https://doi.org/10.1098/rspa.2021.0135>
- Pasini, A., & Pelino, V. (2005). Can we estimate atmospheric predictability by performance of neural network forecasting? The toy case studies of unforced and forced Lorenz models. *CIMSA 2005 IEEE International Conference on Computational Intelligence for Measurement Systems and Applications*, 69–74. <https://doi.org/10.1109/CIMSA.2005.1522829>
- Pathak, J., Lu, Z., Hunt, B., Girvan, M., & Ott, E. (2020). Using reservoir computer to predict and prevent extreme events. *Physical Review E*, 101(2), 022209. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.101.022209>
- Penny, S., Smith, T., Chen, T. C., Platt, J., Lin, H. Y., Goodliff, M., & Abarbanel, H. D. (2023). Application of recurrent neural networks to model bias correction: Idealized experiments with the Lorenz-96 model. *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*, 15(1), e2022MS003164. <https://doi.org/10.1029/2022MS003164>
- Pyragas, K. (1992). Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics Letters A*, 170(6), 421–428. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(92\)90745-8](https://doi.org/10.1016/0375-9601(92)90745-8)
- Shen, B. L., Wang, M., Yan, P., Yu, H., Song, J., & Da, C. J. (2018). Stable and unstable regions of the Lorenz system. *Scientific Reports*, 8(1). <https://doi.org/10.1038/s41598-018-33010-1>
- Sparrow, C. (1982). *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*. Springer-Verlag.
- Sun, Q., Miyoshi, T., & Richard, S. (2023). Control simulation experiments of extreme events with the Lorenz-96 model. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 30(2), 117–128. <https://doi.org/10.5194/npg-30-117-2023>
- Uy, W. I. T., Grigoriu, M. D., & Juniper, M. P. (2024). Uncertainty quantification of time-average quantities of chaotic systems using sensitivity-enhanced polynomial chaos expansion. *Physical Review E*, 109(4), 044208. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.109.044208>
- Wang, B., Ding, H., Zhang, S., & Chen, Y. (2021). Robust synchronization of class chaotic systems using novel time-varying gain disturbance observer-based sliding mode control. *Complexity*, 2021, 8845553. <https://doi.org/10.1155/2021/8845553>
- Wang, H., Dong, G., & Chen, C. (2018). Hopf bifurcation control in a Lorenz type system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 28(10), 1850127. <https://doi.org/10.1142/S0218127418501274>