UN MODELO ESTOCÁSTICO PARA ARRECIFES DE CORAL

AN STOCHASTIC MODEL FOR CORAL REEFS

Claudia Lucía Guerrero González [1]

Resumen

La importancia de los arrecifes de coral y su desgaste en las últimas décadas nos lleva a estudiarlos cada vez más. En este artículo se presenta un modelo de ecuaciones diferenciales estocásticas con retraso que intenta representar el efecto de la presencia y la alimentación de algunos peces, como los escáridos, en estos ecosistemas.

Palabras clave: Arrecifes de coral, escáridos, modelo, ecuaciones diferenciales estocásticas.

Abstract

People study coral reefs because of their importance in society and the degradation they have suffered in the last decades. In this article, we introduce a mathematical model of stochastic delayed differential equations, whose goal is to describe the effect of fish grazing.

Keywords: Coral reefs, scarids, model, stochastic delayed differential equations.

INTRODUCCIÓN

Los arrecifes de coral son ecosistemas que albergan la mayor diversidad de especies marinas; ellos proveen a las playas de arena y protegen a las costas de huracanes. Por otro lado, la sociedad los utiliza como atractivo turístico y también como fuente de alimentos. ("Value of coral Ecosystems", s.f.)

Estos ecosistemas albergan comunidades coralinas, superficies rocosas, peces, invertebrados, algas, entre otros animales y plantas. Se encuentran entre la franja que forman el trópico de Cáncer y el trópico de Capricornio, usualmente del lado oriental de los continentes. En México ocupan cerca de 1780 kilómetros cuadrados, ubicados a lo largo de la costa del Pacífico, Veracruz, Campeche y Yucatán. ("Biodiversidad Mexicana: Comisión Nacional para el Conocimiento y Uso de la Biodiversidad", s.f.)

Es una pena que en las últimas décadas algunas de nuestras actividades los han puesto en peligro directa o indirectamente; como ejemplo están la pesca no regulada, el cambio climático y la contaminación (Mumby *et al.*, 2007). Se cree importante identificar y modelar las causas del desgaste de los arrecifes de coral para poder tomar decisiones que prevengan más daños, e incluso, su extinción.

Las algas, son un elemento importante dentro de los arrecifes de coral; algunas de sus ventajas son que proveen escondites y alimento a peces e invertebrados. Su crecimiento es favorecido por el incremento de nutrientes y la reducción de herbívoros que es resultado de ciertas actividades humanas. Aunque hay pocas investigaciones que tratan de demostrar la competencia entre algas y coral por espacio y luz, dicha competencia podría influir en el deterioro de los arrecifes de coral (McCook *et al.*, 2000).

En este artículo estamos interesados en la descripción de la presencia de ciertos peces (como aquellos que pertenecen a la familia de los escáridos, entre los cuales se encuentran los peces loro) y su relación con los corales y las algas. Nos basaremos en modelos que ya han sido propuestos por otros matemáticos y que determinan el comportamiento de la dinámica de estos ecosistemas.

MODELACIÓN MATEMÁTICA

En 2007, Peter J. Mumby, Alan Hastings y Helen J. Edwards proponen un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para estudiar a los arrecifes de coral basado en las siguientes observaciones:

1. El pasto marino crece a partir del consumo de las algas y de la muerte de los corales.
2. Los corales colonizan la superficie en donde hay pasto marino y, a través del mismo, son colonizados por las algas.

Denotan por M, T y C a la superficie cubierta por algas, pasto y corales, respectivamente, además de suponer que dicha superficie está completamente cubierta por estas especies, es decir $M+T+C=1$. El modelo es el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= aMC - \frac{gM}{M+T} + \gamma MT, \\ \frac{dC}{dt} &= rTC - dC - aMC. \end{aligned} \tag{1}$$

en donde:
r es la tasa con que los corales colonizan el pasto marino,
d es la tasa de mortalidad de los corales,
a es la tasa con que las algas colonizan a los corales,
γ es la intensidad con que las algas se propagan a través de pasto marino, y
g es la tasa de consumo de alga por parte de los peces.

Se puede llegar a que los puntos de equilibrio de este sistema están dados por: $O=(0,0)$, $M=(0,1-\frac{d}{r})$ y $C=(1-\frac{g}{\gamma},0)$. Estos puntos nos muestran lo que puede pasar con un arrecife de coral en el futuro; el primero implica la extinción de ambas especies: algas y corales, el segundo representa la extinción solamente de los corales y el tercero la extinción de las algas.

Interesados en el impacto que tiene la cantidad de alga consumida por los peces en la estabilidad de los estados de equilibrio del sistema, Li, Wang, Zhang y Hastings obtienen la siguiente tabla:

En donde $g_0=\frac{d}{r}a+\frac{d^2}{r^2}(\gamma-a)$ y $g_1=\gamma\frac{a+d}{a+r}$. Además, cuando $g_0<g<g_1$, aparece en el sistema otro punto de equilibrio inestable que es un punto silla, E^*, en donde las dos especies podrían coexistir.

Tabla 1: Estabilidad de los puntos de equilibrio en relación con g

	O	M	C
$0 < g < g_0$	inestable	inestable (punto silla)	estable
$g = g_0$	inestable	inestable (punto silla)	estable
$g0 < g < g_1$	inestable	estable	estable
$g = g_1$	inestable	estable	inestable (punto silla)
$g1 < g < \gamma$	inestable	estable	inestable (punto silla)

En el modelo anterior se ha considerado que las algas se ven beneficiadas por el pasto marino; sin embargo, una vez que los peces se comen a las algas, lo que queda de ellas tarda mucho tiempo en volver a crecer. Así, este grupo de matemáticos agrega un parámetro de retraso al modelo en 1 para describir este periodo de tiempo fundamental en la dinámica del sistema. El modelo resultante es el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= aMC - \frac{gM(t-\tau)}{1-C(t-\tau)} + \gamma M - \gamma M^2 - \gamma MC, \\ \frac{dC}{dt} &= rC - rMC - rC^2 - dC - aMC. \end{aligned} \tag{2}$$

Los resultados que se obtienen en el artículo (Li *et al*., 2014) dejan ver que, si bien los puntos de equilibrio del sistema se conservan del modelo anterior, su estabilidad depende no sólo de la tasa de consumo de alga por parte de los peces, g, sino también del tiempo en que tarda en crecer el pasto marino, τ.

Como, desde el punto de vista ecológico, es conveniente que los corales sobrevivan, es decir que el punto C sea estable, se debe buscar $g_0 < g < \gamma$ y que $\tau < \tau_0$ en donde $\tau_0 = \frac{d}{r\sqrt{g^2-{g_0}^2}} \arccos(\frac{g_0}{g})$. Análogamente se obtienen resultados para la estabilidad de los otros puntos de equilibrio.

Es en estos resultados en donde nos damos cuenta de que la presencia de los peces es importante, pues de ella depende la estabilidad de los estados de equilibrio. Sin embargo, creemos que los modelos presentados antes no toman en cuenta factores externos al sistema, como las actividades humanas antes mencionadas, los hábitos alimenticios de los peces, o incluso, fenómenos naturales como huracanes.
El lector puede encontrar más información sobre el impacto que tienen los huracanes en este sistema en el artículo (Mumby *et al*., 2007).

Ya que no tenemos certeza de que estos factores estarán presentes en un tiempo determinado, para tomarlos en cuenta utilizamos ruido representado por un movimiento browniano adecuado. Nos enfocaremos en la presencia de los peces loro y su forma de comer. Como estos factores solamente se ven reflejados en la superficie de suelo marino cubierta por algas, el modelo que proponemos es el siguiente:

$$\begin{aligned} dM &= \left(aMC - \frac{gM(t-\tau)}{1-C(t-\tau)} + \gamma MT\right)dt + \beta M(1-M)dW, \\ dC &= (rTC - dC - aMC)dt. \end{aligned} \tag{3}$$

en donde β representa la intensidad con que los factores externos al sistema lo modifican.

ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS

El modelo presentado antes es un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas, este tipo de ecuaciones son importantes pues toman en cuenta fenómenos aleatorios que, a veces, resultan difíciles de describir. En este caso, la parte aleatoria del sistema está modelada a través de "ruido".

¿Qué son las EDS?

Las ecuaciones diferenciales estocásticas son ecuaciones diferenciales que contienen una parte determinista y una estocástica (también llamada ruido) y suelen representarse de la siguiente forma:

$$dX = f(X)dt + g(X)dW \tag{4}$$

Su solución es nuevamente, un proceso estocástico.

En la parte estocástica de algunas ecuaciones, $W(t)$ representa un proceso de Wiener estándar, también llamado Movimiento Browniano estándar. Este proceso estocástico es una colección de variables aleatorias, $W(t_k)$, con una distribución normal $W(t_k) \sim N(0, t_k)$ que satisfacen:

- $W(0) = 0$
- La trayectoria $0 \to W(t)$ es continua para todo t
- $W(t_1 - t_2)$ es independiente de $W(t_3 - t_4)$ si $0 \leq t1 < t2 < t3 < t4$

Además, tiene características particulares como ser un martingala continuo y no ser diferenciable en ningún punto (dW es solamente notación).

Para dar solución a estas ecuaciones se emplean resultados de cálculo estocástico, que en principio difieren del cálculo al que estamos acostumbrados. Una definición básica de la que podemos partir es la siguiente:

$$I(X) = \int_0^T X_s dBs = \sum_{k=1}^{n-1} X_k(W(t_k) - W(t_{k-1})) \tag{5}$$

En base a esta definición se desarrolla el cálculo estocástico de Ito, equivalente a una segunda versión propuesta por Stratonovich:

$$I(X) = \int_0^T X_s dBs = \sum_{k=1}^{n-1} X_{k-1}(W(t_k) - W(t_{k-1})) \tag{6}$$

Aproximaciones numéricas

En general es difícil encontrar soluciones analíticas a ecuaciones diferenciales estocásticas, e incluso se vuelven más complicadas las ecuaciones diferenciales estocásticas con retraso, pues su solución no solamente depende del presente. Por esta razón se busca una aproximación de la solución utilizando métodos numéricos.

Si consideramos la ecuación diferencial estocástica 4 y queremos aproximar la solución en el tiempo T, podemos partir el intervalo $[0,T]$ en N partes y tomar $\Delta t = \frac{T}{N}$ para utilizar algún método simple, como:

- El Método de Euler-Maruyama en donde:

$$x_j = x_{j-1} + f(x_{j-1})\Delta t + g(x_{j-1})(W(j\Delta t) - W((j-1)\Delta t))$$

- El Método de Milstein:

$$\begin{aligned} x_j &= x_{j-1} + f(x_{j-1})\Delta t + g(x_{j-1})(W(j\Delta t) - W((j-1)\Delta t)) \\ &+ \frac{1}{2} g(x_{j-1}) g'(x_{j-1})((W(j\Delta t) - W((j-1)\Delta t))^2 - \Delta t) \end{aligned}$$

Estos dos métodos son una aproximación a la forma integral de la ecuación 4; la diferencia entre ellos es que el método de Milstein considera términos de orden mayor. Con la misma idea, utilizando 5 y la forma integral del sistema de ecuaciones a resolver, digamos:

$$\begin{aligned} x_t &= x_0 + \int_0^t f_1 ds + \int_0^t g_1 dW_1 \\ y_t &= y_0 + \int_0^t f_2 ds + \int_0^t g_2 dW_2 \end{aligned}$$

se pueden obtener las siguientes aproximaciones, considerando términos hasta de orden $\frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} x_j &= x_{j-1} + f_1(x_{j-1}, y_{j-1})\Delta t + g_1(x_{j-1}, y_{j-1})\Delta W_1 \\ &+ \frac{1}{2} g_{1x}(x_{j-1}, y_{j-1}) + g_1(x_{j-1}, y_{j-1})(\Delta W_1^2 - \Delta t) \\ &+ g_{1y}(x_{j-1}, y_{j-1}) g_2(x_{j-1}, y_{j-1})\Delta W_1 \Delta W_2 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} y_j &= y_{j-1} + f_2(x_{j-1}, y_{j-1})\Delta t + g_2(x_{j-1}, y_{j-1})\Delta W_2 \\ &+ g_{2x}(x_{j-1}, y_{j-1}) + g_1(x_{j-1}, y_{j-1})\Delta W_1 \Delta W_2 \\ &+ \frac{1}{2} g_{2y}(x_{j-1}, y_{j-1}) g_2(x_{j-1}, y_{j-1})(\Delta W_2^2 - \Delta t) \end{aligned} \tag{8}$$

¿CÓMO SEGUIR?

Ya se ha dicho que las soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas son procesos estocásticos, por lo tanto nos interesa encontrar información acerca de la distribución que tiene la variable aleatoria que resulta de pensar en la solución en un tiempo específico.

Una posible manera de estudiar estas variables aleatorias es a través de simulaciones: el método de Monte Carlo, que consiste en tomar una muestra aleatoria de tamaño muy grande (dada por los resultados de las aproximaciones presentadas antes), junto con ciertos teoremas importantes, como el Teorema del Límite Central, nos pueden dar una aproximación a las distribuciones de las soluciones del sistema de ecuaciones.

También podemos utilizar modelos de regresión para ver qué tan importante son ciertos parámetros, entre ellos la influencia de factores externos en el sistema la cual denotamos por β, o bien, la tasa en que las algas son consumidas por los peces, denotada por g.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo surge en colaboración con Valerie Ann Carrasquillo Meléndez, Kyle McGrath, Michael M. Law y Kelly Black, durante el programa de investigación REU el verano de 2015, en Potsdam, Nueva York. Doy gracias a todos ellos por sus ideas, su trabajo y el tiempo compartido.

REFERENCIAS

McClanahan, T.R. (1995). A coral reef ecosystem-fisheries model: impacts of fishing intensity and catch selection on reef structure and processes. *Ecological Modeling*, 80, pp. 1-19.

McCook, L.J., Jompa, J., and Díaz-Pulido, G. (2000). Competition between corals and algae on coral reefs: a review of evidence and mechanisms. *Springer*, 19: 400, doi:10.1007/s003380000129.

Blackwood, J.C., Hastings, A., and Mumby, P.J. (2012). The effect of fishing on hysteresis in Caribbean coral reefs.*Theoretical Ecology*, 5, pp. 105-114.

Li, X., Wang, H., Zhang, Z., and Hastings, A. (2014). Mathematical analysis of coral reef models. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 416, pp. 352-373.

Mumby, P.J., Hastings, A., and Edwards H.J. (2007). Thresholds and the resilience of Caribbean coral reefs. *Nature*, 450, pp. 98-101.

Higham, D.J. (2001). An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 43, pp. 525-546.

Wang, Z., Zhang, C. (2006). An Analysis of Stability of Milstein Method for Stochastic Differential Equations with Delay. *Computers and Mathematics with Applications*, 51, pp. 1445-1452.

National Oceanic and Athmospheric Administration, Value of coral ecosystems (s.f.) Recuperado el 14 de Mayo de 2016 de `http://coralreef.noaa.gov/`

Biodiversidad Mexicana: Comisión Nacional para el Conocimiento y Uso de la Biodiversidad (s.f) Recuperado el 14 de Mayo de 2016 de `http://www.biodiversidad.gob.mx/ecosistemas/arrecifes.html`

---

[1]Estudiante de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la UAEH. Contacto: clucyswd@gmail.com