EL PROBLEMA DE BASILEA

THE BASEL PROBLEM

Isabel Barrera Fragoso[1], R. Gabriela Rojas Chavarría[2]

Resumen

Existen problemas en Matemáticas que son considerados verdaderos retos, el Problema de Basilea es un ejemplo claro de esos, pues tuvieron que pasar 90 años para que Euler anunciara la solución. Una característica importante de las matemáticas es el planteamiento de preguntas más generales cuando se han resuelto casos particulares. En este caso, el Problema de Basilea lleva a uno de los problemas más importantes en matemáticas que aún no se ha resuelto: La Hipótesis de Riemann. En este trabajo presentamos una demostración de la solución del problema de Basilea. Algunas ideas fueron tomadas de Wikipedia (2016).

Palabras clave: problema de basilea, hipótesis de riemann

Abstract

There are mathematical problems that are considered true challenges, Basel Problen is clearly one of those. It last 90 years before that Euler would give a solution. One important characteristic of mathematics is that problems can be generalized, when particular cases have been solved. In this vein, Basel Problem is the starting point of one of the most important unsolved problems: Riemann Hypothesis. In this work we present a proof of the Basel Problem. Some of the ideas where taken from Wikipedia (2016).

Keywords: basel problem, riemann hypothesis

INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas que ha motivado grandes avances en matemáticas es el que se conoce como *Problema de Basilea*. Se le atribuye a Pietro Mengoli (1625-1686) quien lo formuló por primera vez en el año 1644, cuando estudiaba las sumas de los recíprocos de los números triangulares [3].

En 1673 Leibniz conoció el *Problema de Basilea* por medio de una carta que le envió Henry Oldenburg (1616-1716) quien en esos días era el primer secretario de la Royal Society of London.

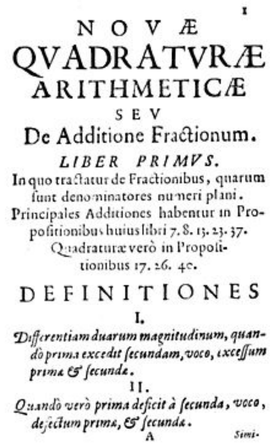
Leibniz fue mentor de varios miembros de la familia Bernoulli por lo que en 1689 Jakob Bernoulli (1654-1705), tratando de encontrar la tan deseada suma, logró descubrir y publicar dos resultados fundamentales sobre dicha serie.

En 1721, en una carta de Johann Bernoulli a su hijo Daniel (1700-1782) éste especifica que el resultado de la suma se encuentra en torno al valor $\frac{8}{5}$.

En este texto presentaremos también las ideas fundamentales de Euler que le llevaron a la solución del problema. Se realizará una demostración rigurosa del resultado y concluiremos este artículo con algunas ideas que se desencadenaron del Problema de Basilea, ideas más generales que propician uno de los Problemas del Milenio: La Hipótesis de Riemann

ORIGEN DEL PROBLEMA DE BASILEA

(a) Pietro Mengoli



1

NOVÆ
QVADRATVRÆ
ARITHMETICÆ
SEV
De Additione Fractionum.
LIBER PRIMVS.
In quo tractatur de Fractionibus, quarum sunt denominatores numeri plani.
Principales Additiones habentur in Propositionibus huius libri 7. 8. 13. 23. 37.
Quadraturæ verò in Propositionibus 17. 26. 40.

DEFINITIONES

I.

Differentiam duarum magnitudinum, quandò prima excedit secundam, voco, excessum primæ & secundæ.

II.

Quandò verò prima deficit à secunda, voco, defectum primæ, & secundæ.

A Simi-

(b) Portada del libro Novae Quadraturae Arithmeticae seu De Additione Fractionum

Figura 1: Mengoli y su Libro: Novae Quadraturae Arithmeticae seu De Additione Fractionum

Mengoli en su obra, *Novae quadraturae arithmeticae*, calcula varias sumas infinitas, entre las que se encuentran $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$. La primera suma se obtiene notando que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, por lo que las sumas parciales son de la forma $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n}$, de lo cual se tiene el resultado tomando límite cuando $n \to \infty$. Para la segunda, nótese que $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$ y se aplica la misma idea que en la primera.

Como Leibniz era mentor de algunos miembros de la familia Bernoulli, Jakob conoció el problema y demostró que $\zeta(2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es una serie convergente. La idea de la demostración es como sigue:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 2. \tag{1}$$

La desigualdad se obtiene notando que los sumandos de ambas series satisfacen $\frac{1}{n^2} < \frac{2}{n^2+n}$ para todo $n > 1$.

En el intento por encontrar la suma, Jakob encuentra que multiplicando la serie por $\frac{1}{2^2}$ y restando a la original, resulta:

$$\begin{aligned}
\zeta(2)-\frac{1}{2^2}\zeta(2) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\\
&= \left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right),
\end{aligned}$$

es decir, la suma de los recíprocos de los impares al cuadrado es $\frac{3}{4}\zeta(2)=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

EULER

> *Euler debe ser considerado como el primer maestro de la teoría de series infinitas. Él las creó y fue por mucho el maestro de las series. Tal vez sólo Jacobi y Ramanujan pueden ser considerados cercanos a él. Antes de que Euler entrara a la escena matemática, las series infinitas habían sido consideradas por muchos matemáticos, que se remontan a tiempos tempranos. Sin embargo no había una teoría sistemática; las personas tenían ideas muy informales acerca de la convergencia y divergencia. La mayoría de la series consideradas sólo tenían términos positivos, (Varadarajan, 2007, p. 516)*

La cita anterior ilustra la forma en que Euler es considerado en cuanto a su trabajo con series infinitas. Sin duda, el trabajo que Euler realizó al resolver problemas relacionados con series ilustra esto.

Euler conoció el problema de Basilea mediante la comunicación con Johann Bernoulli en el año 1731. A partir de esto trabajó en su solución hasta encontrarla.

Ideas fundamentales de la demostración de Euler

Una de las ideas clave de Euler es tratar de extender a series lo que ocurre con polinomios. De manera más precisa, supongamos que un polinomio mónico $p(x)$ tiene raíces diferentes de cero. Sean estas raíces $a_1,a_2,\ldots,a_n$, entonces $p(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$. De esta reperesentación de $p(x)$ se obtiene $p(0)=(-1)^n a_1a_2\cdots a_n$, de lo que se llega a:

$$p(x)=p(0)\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\left(1-\frac{x}{a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{a_n}\right). \tag{2}$$

Si el método anterior para representar un polinomio se puede extender a series, entonces considerando el desarrollo en serie de la función

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots \tag{3}$$

y dado que $f(x)$ tiene raíces en $x=k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ y $f(0)=1$, entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} &= \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\cdots \\
&= \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots \\
&= 1-\frac{x^2}{\pi^2}-\frac{x^2}{2^2\pi^2}-\frac{x^2}{3^2\pi^2}-\cdots-\frac{x^2}{(n\pi)^2}+\cdots+R \\
&= 1-\frac{1}{\pi^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)x^2+R,
\end{aligned}
$$

Dado que la ecuación anterior es igual a (3), aplicando la igualdad entre "polinomios infinitos", los coeficientes deben ser iguales, obteniendo lo que se deseaba encontrar:

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}. \tag{4}
$$

En este punto, Euler recibía bastantes críticas por la falta de rigor que para muchos existía en su metodología expuesta hasta este punto. Precisamente uno de los más críticos fue Johann Bernoulli , quien le recomendaba que por lo menos demostrase que las raíces especificadas en el producto infinito anteriormente expuesto no eran las únicas raíces del seno. Como contraejemplo al razonamiento de Euler, la función $g(x)=\exp(x)\frac{\operatorname{sen(x)}}{x}$ *tiene las mismas raíces y sin embargo la expresión como producto infinito es diferente. A estas críticas Euler respondió afirmando que los valores aproximados que él obtenía eran parecidos a* $\frac{\pi^2}{6}$ *(Sánchez Muñoz, 2014, p. 208)*

LA ECUACIÓN $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

Resultados Preliminares

En esta sección presentamos los resultados que se requieren para obtener una demostración rigurosa de la igualdad

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}. \tag{5}
$$

Algunos de esos resultados son bien conocidos, sin embargo para fines de comprensión los presentamos aquí.

Lema 4.1 *(Fórmula de De Moivre) Para todo número real* θ *y para todo entero n se tiene:*

$$
(\cos(\theta)+i\operatorname{sen}(\theta))^n=\cos(n\theta)+i\operatorname{sen}(n\theta), \tag{6}
$$

en donde i satisface: $i^2=-1$.

Demostración. Si $n > 0$, la demostración se hace por inducción. Para $n = 1$, no hay nada que demostrar. Supongamos que $n > 1$ y el resultado cierto para $n-1$ (hipótesis de inducción). Demostremos el resultado para n.

Se tiene:

$$\begin{aligned}(\cos(\theta)+i\,\mathrm{sen}(\theta))^n &= (\cos(\theta)+i\,\mathrm{sen}(\theta))^{n-1}(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)\\ &= (\cos((n-1)\theta)+i\,\mathrm{sen}\,((n-1)\theta)\,(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)\\ &= (\cos((n-1)\theta)\cos(\theta)-\mathrm{sen}\,((n-1)\theta))\,\mathrm{sen}(n\theta)+\\ &\quad i((\cos((n-1)\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)+\mathrm{sen}\,((n-1)\theta)\cos(\theta))\\ &= \cos(n\theta)+i\,\mathrm{sen}(n\theta),\end{aligned}$$

la segunda igualdad es por la hipótesis de inducción y la última se debe a las identidades para el seno y el coseno de la suma de dos ángulos.

Si $n \leq 0$, entonces $k = -n \geq 0$ y se usa el caso positivo ya probado. Más preciso:

$$\begin{aligned}(\cos(\theta)+i\,\mathrm{sen}(\theta))^n &= \frac{1}{(\cos(\theta)+i\,\mathrm{sen}(\theta))^k}\\ &= \frac{\cos(k\theta)-i\,\mathrm{sen}(k\theta)}{\cos^2(k\theta)+\mathrm{sen}^2(k\theta)}\\ &= \cos(-k\theta)+i\,\mathrm{sen}(-k\theta)\\ &= \cos(n\theta)+i\,\mathrm{sen}(n\theta),\end{aligned}$$

terminando la demostración cuando $n \neq 0$. Si $n = 0$, el argumento es directo.

Lema 4.2 *La función $f(x) = \cot^2(x)$ es inyectiva en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$*

Demostración. Se Probará que la derivada de $\cot^2(x) = \dfrac{\cos^2(x)}{\mathrm{sen}^2\,(x)}$ es negativa en el intervalo dado, de lo cual se tendrá que la función es decreciente, lo que a su vez implica que $f(x)$ es inyectiva.

Aplicando la regla del cociente para calcular derivadas uno obtiene:

$(\cot^2(x))' = \left(\dfrac{\cos^2(x)}{\mathrm{sen}^2\,(x)}\right)' = -2\dfrac{\cos(x)}{\mathrm{sen}^3\,(x)}$

Por otro, lado sabemos que las funciones seno y coseno son postivas en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$, por lo que $(\cot^2(x))' < 0$, mostrando así que la función es decreciente, lo que en turno implica que es inyectiva.

Lema 4.3 *Si $f(x)$ es un polinomio de grado n con coeficientes racionales, entonces tiene a lo más n raíces.*

Demostración. Se tiene que a es raíz de $f(x) \iff f(x) = (x-a)q(x)$. La prueba concluye por inducción sobre $n = deg(f(x))$.

Lema 4.4 *Si $a_n \neq 0$ y*

$$\begin{aligned}f(x) &= a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0\\ &= a_n(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n),\end{aligned}$$

entonces $\dfrac{a_{n-1}}{a_n} = -(b_1+b_2+\cdots+b_n)$.

Demostración. Desarrollando el producto $a_n(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)$ y considerando que dos polinomios son iguales exactamente cuando sus coeficientes son iguales, entonces resulta que $a_n(-b_1-b_2-\cdots-b_n)=a_{n-1}$ concluyendo de esto lo que se afirmó.

Lema 4.5 *Para todo x número real se cumple:*

$$csc^2(x)=1+cot^2(x). \tag{7}$$

Demostración: Se tiene $\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1$ para todo x número real, de esto, dividiendo entre $\operatorname{sen}^2(x)\neq 0$ en la igualdad anterior tenemos:

$$\begin{aligned} 1+\frac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \\ 1+\cot^2(x) &= \csc^2(x) \end{aligned}$$

demostrando así lo que se quería.

Lema 4.6 *Para todo $x\in(0,\frac{\pi}{2})$,*

$$\cot^2(x)<\frac{1}{x^2}<\csc^2(x). \tag{8}$$

Demostración. Como $\cot(x)$, $\frac{1}{x}$ y $\csc(x)$ son funciones positivas en el intervalo $(0,\frac{\pi}{2})$, basta probar que $\cot(x)<\frac{1}{x}<\csc(x)$, lo cual ocurre si y solo si $\operatorname{sen}(x)<x<\tan(x)$. Para demostrar lo último, definamos $f(x)=x-\operatorname{sen}(x)$ y $g(x)=\tan(x)-x$. Calculando sus derivadas obtenemos:

$$\begin{aligned} (f(x))' &= 1-\cos(x), \\ (g(x))' &= \sec^2(x)-1. \end{aligned}$$

Ahora hay que notar que $1-\cos(x)>0$ y $\sec^2(x)-1>0$ para todo $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, por lo que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones crecientes. Por otro lado, como $f(0)=0$ y $g(0)=0$, entonces $f(x)>0$ y $g(x)>0$. De esto se tiene que $\tan(x)>x>\operatorname{sen}(x)$. Tomando recíprocos en la desigualdad anterior se llega a $\cot(x)<\frac{1}{x}<\csc(x)$, que es lo que se quería demostrar.

La demostración

La idea de la demostración es acotar inferior y superiormente la suma:

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^2} \tag{9}$$

para después considerar el límite cuando $k\to\infty$.

Sean $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ y $n\in\mathbb{N}$. Por el Lema (4.1) se tiene que

$$\frac{\cos(nx)+i\operatorname{sen}(nx)}{\operatorname{sen}^n(x)}=\left(\frac{\cos(x)+i\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right)^n=(\cot(x)+i)^n. \tag{10}$$

El Binomio de Newton implica:

$$
\begin{aligned}
(\cot(x)+i)^n &= \binom{n}{0}\cot^n(x)+\binom{n}{1}\cot^{n-1}(x)i+\cdots+\binom{n}{n-1}\cot(x)i^{n-1}+\binom{n}{n}i^n \\
&= \left(\binom{n}{0}\cot^n(x)-\binom{n}{2}\cot^{n-2}(x)+\cdots\right)+ \\
& \quad i\left(\binom{n}{1}\cot^{n-1}(x)-\binom{n}{3}\cot^{n-3}(x)+\cdots\right)
\end{aligned}
$$

Igualando la parte imaginaria de la ecuación anterior con la parte imaginaria de (10) se obtiene:

$$
\frac{\sin(nx)}{\sin^n(x)}=\binom{n}{1}\cot^{n-1}(x)-\binom{n}{3}\cot^{n-3}(x)+\cdots \tag{11}
$$

Ahora consideremos $n=2m+1$, $x_k=\dfrac{k\pi}{2m+1}$ con $k=1,2,3,...,m$. Notemos que $0<\dfrac{k\pi}{2m+1}<\dfrac{\pi}{2}$, por lo tanto, de (11)

$$
\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}((2m+1)x_k)}{\operatorname{sen}^n\left(\dfrac{k\pi}{2m+1}\right)} &= \binom{2m+1}{1}\cot^{2m}\frac{k\pi}{2m+1}-\binom{2m+1}{3}\cot^{2m-2}\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)+ \\
& \quad \cdots+(-1)^m\binom{2m+1}{2m+1}.
\end{aligned}
$$

Notemos que el miembro izquierdo de la ecuación anterior es cero.

Sean $\alpha_k=\cot^2(x_k)$ y

$$
p(t)=\binom{2m+1}{1}t^m-\binom{2m+1}{3}t^{m-1}+\cdots+(-1)^m\binom{2m+1}{2m+1}. \tag{12}
$$

Evaluando $p(t)$ en α_k, por el Lema 4.3 se tiene que $p(\alpha_k)=0$, entonces

$$
p(t)=\binom{2m+1}{1}(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\cdots(t-\alpha_m). \tag{13}
$$

Del Lema 4.4

$$
\begin{aligned}
\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m &= -\frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{2}} \\
&= \frac{2m(m+1)}{6}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \cot^2(x_1)+\cdots+\cot^2(x_m)=\frac{2m(2m-1)}{6}. \tag{14}
$$

Por el Lema 4.5 y la ecuación anterior tenemos que

$$
\cot^2(x_1)+1+\cot^2(x_2)+1+\cdots+\cot^2(x_m)+1=\frac{2m(2m-1)}{6}+m \tag{15}
$$

$$\Rightarrow \csc^2(x_1) + \csc^2(x_2) + \cdots + \csc^2(x_m) = \frac{2m(2m+2)}{6} \tag{16}$$

Del Lema 4.6

$$\cot^2(x_1) + \cdots + \cot^2(x_m) < \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_m^2} < \csc^2(x_1) + \csc^2(x_2) + \cdots + \csc^2(x_m) \tag{17}$$

$$\Rightarrow \frac{2m(2m-1)}{6} < \frac{(2m+1)^2}{(\pi)^2} + \cdots + \frac{(2m+1)^2}{(n\pi)^2} < \frac{2m(2m+2)}{6} \tag{18}$$

Multiplicando lo anterior por $\frac{\pi^2}{(2m+1)^2}$ se tiene

$$\frac{\pi^2 2m(2m+1)}{6(2m+1)^2} < \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2 2m(2m+2)}{6(2m+1)^2} \tag{19}$$

Si $m \to \infty$ se concluye que $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$

DESPUÉS DE EULER

Euler generaliza el problema de Basilea al considerar la serie

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \tag{20}$$

con s un número real. Esto deja el terreno preparado para que Riemann retome el estudio de la función $\zeta(s)$, generalizando al caso s un número complejo, extendiendo la función a todo el plano, excepto cuando $s = 1$, que es cuando $\zeta(s)$ tiene una singularidad. La ecuación funcional que satisface $\zeta(s)$ es

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s)\zeta(s), \tag{21}$$

en donde $\Gamma(s) = \int\limits_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx$ que es la función que Euler propone para extrapolar la función $F(n) = n!$

De la Ecuación 21 se obtiene lo que se conoce como la *Hipótesis de Riemann*: Los ceros no triviales de $\zeta(s)$ se encuentran en la recta $s = \frac{1}{2} + ti$, t un real.

La hipótesis de Riemann es uno de los *Problemas del Milenio*, es decir, quien demuestre que los ceros de la función $\zeta(s)$ son de la forma $s = \frac{1}{2} + ti$, puede cobrar un millón de dólares, si además tiene menos de 40 años, con alta probabilidad ganará la *Medalla Fields* y su nombre será recordado por la comunidad matemática ¡para siempre!

Conclusiones

El éxito de Euler al resolver el problema de Basilea trajo como consecuencia que otros matemáticos trataran de encontrar diferentes soluciones del problema. En este trabajo presentamos una demostración sencilla, la cual ha requerido solamente de resultados preliminares básicos.

Muchas veces creemos que para probar las conjeturas matemáticas requerimos de comprender ideas muy complicadas, sin embargo algunos matemáticos afirman que los jóvenes con su poca experiencia pueden aportar ideas nuevas que lleven a la solución de los problemas del milenio. Euler es un ejemplo de un matemático que en su juventud resolvió uno de los problemas más difíciles de su época.

Agradecimientos

Agradecemos al Dr. Fernando Barrera Mora por su tiempo dedicado al revisar y aportar ideas para hacer posible el resultado de este trabajo. De igual manera al Dr. Orlando Ávila Pozos por motivarnos a experimentar las diversas maneras de comunicar ideas.

REFERENCIAS

Sánchez Muñoz, J. M. (2014). El problema de Basilea. *Lecturas Matemáticas*, 35(2):199–228.

Varadarajan, V. S. (2007). Euler and his work on infinite series. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 44(4):515–539.

Wikipedia (2016). Problema de Basilea — Wikipedia, la enciclopedia libre. [Internet; descargado 26-agosto-2016, `https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Problema_de_Basilea`].

[1]Estudiante de la Licenciatura en Matemáticas Aplicada, UAEH Área Académica de Matemáticas y Física. Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería Correo-e: fragisabar@gmail.com

[2]Estudiante de la Licenciatura en Matemáticas Aplicada, UAEH Área Académica de Matemáticas y Física. Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería Correo-e: grch_258@hotmail.com

[3]Los números triangulares son de la forma $T(n) = \frac{n(n+1)}{2} = 1+2+3+\cdots+n$ y se pueden interpretar como la suma de puntos colocados en un triángulo equilátero que contiene n de ellos en cada lado.