https://www.uaeh.edu.mx/scige/boletin/icbi/historial.html
Boletín Científico del Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Pädi

Publicación Semestral Pädi No. 10 (2018) 81-86

Diseño de Tareas de Aprendizaje Matemático con Geogebra: Mecanismos Articulados

Marcos Campos Nava[a,1*], Agustín Alfredo Torres Rodríguez[b]

[a] Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo Área Académica de Matemáticas y Física
[b] Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Atitalaquia, Departamento de Ciencias Básicas.

Resumen

Las Tareas de Aprendizaje Matemático (TAM) son el principal medio a través del cual el profesor puede propiciar que sus estudiantes construyan los conceptos matemáticos motivo de estudio y de discusión. No basta dar el enunciado de un problema para afirmar que se tiene una Tarea diseñada; tampoco basta únicamente diseñar la actividad para considerar que será exitosa. Por otro lado, el uso de tecnologías digitales en la clase de matemáticas, puede ser un elemento favorable para que el profesor diseñe tareas que le permitan articular las relaciones existentes entre diferentes conceptos matemáticos, además de promover el entendimiento de diversas ideas. En este sentido, se propone una TAM basada en el mecanismo de pistón o también conocido como manivela-deslizador, que al ser abordada con el uso de un sistema de geometría dinámica (SGD) como Geogebra, puede estimular el logro de la articulación de conceptos e ideas y un mayor entendimiento en la clase de matemáticas.

Palabras Clave: Tareas de aprendizaje matemático**,** Geogebra, Mecanismo de Pistón.

1. Introducción

Las Tareas de Aprendizaje Matemático (TAM) son más que el enunciado de un problema, dado que incluyen un conjunto de elementos, dentro de los que se destacan algunos como la (s) trayectoria (s) de instrucción, las intervenciones del profesor, o las rutas hipotéticas de solución (Campos y Torres, 2017); por ello se pueden considerar como el principal medio del que dispone el profesor para lograr que sus estudiantes entiendan las ideas matemáticas puestas a discusión. Aunado a lo anterior, el uso de tecnologías digitales en la clase de matemáticas es cada vez más frecuente, sin embargo se debe tener una idea clara sobre el tipo de TAM que se pueden desarrollar con el auxilio de estas tecnologías y del beneficio que puede aportar.

En las últimas dos décadas se han realizado diversos estudios sobre el uso y las potencialidades de las herramientas digitales para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, como ejemplos de las estrategias que **se** han desarrollado se puede consultar el trabajo de Álvarez-Quintero (2007), donde se hace una revisión de la relación tan estrecha que puede conseguirse entre las representaciones gráficas y las algebraicas haciendo uso de un SGD, en particular Geogebra. En el trabajo mencionado se discute cómo puede ser empleada dicha herramienta para poder visualizar mejor los enunciados de los teoremas fundamentales del cálculo.

Otros estudios como el presentado por Rojas y Esteban (2012), han utilizado Geogebra como base para la elaboración de applets interactivos que pueden ser encontrados fácilmente en la web y que abordan representaciones propias de conceptos matemáticos, como por ejemplo el área contenida entre los gráficos de dos funciones, hasta la representación de un vector normal o tangente a una superficie.

En este orden de ideas, Geogebra es uno de los SGD que han sido más difundidos en las últimas dos décadas para utilizarse como herramienta auxiliar para la enseñanza de las matemáticas, particularmente en geometría. Se puede obtener fácilmente desde su página oficial http://www.geogebra.org/cms/es/ ya que es un software de licencia libre, y multiplataforma, que puede instalarse incluso en dispositivos móviles como smartphones.

Su campo de aplicación sin embargo no se restringe a las matemáticas ni a la enseñanza de la geometría únicamente, sus características le permiten generar construcciones llamadas dinámicas bajo principios geométricos, con las cuales se pueden animar y variar libremente diversos parámetros, lo que permite construir modelos que no solo ejemplifiquen conceptos o tópicos de las matemáticas, sino también crear modelos de diversos tópicos de la física; muchas de estas construcciones se pueden explorar y descargar de forma libre en el sitio oficial que sirve como plataforma para compartir recursos: http://www.geogebratube.org/?lang=es

* Autor en correspondencia.
Correos electrónicos: mcampos@uaeh.edu.mx

2. Algunos Fundamentos en el diseño de Tareas.

¿Por qué es importante poner atención en la selección y diseño de las TAM? ¿Cúal es el papel de las tecnologías digitales en el diseño de TAM con alta demanda cognitiva?

Stein y Smith (1996; citado por Bayazit, 2006), consideran a las tareas de aprendizaje como actividades de clase cuyo propósito es centrar la atención del estudiante en una idea matemática particular o para desarrollar cierta habilidad. Para estos autores, diferentes tareas implican diferentes niveles de demanda cognitiva. En este sentido, es importante reconocer que las TAM son un medio para proveer a los estudiantes elementos que les permitan un mejor entendimiento de las ideas matemáticas que se discuten.

Desde las perspectiva de algunos investigadores, las tareas de aprendizaje son importantes por tres razones: (i) la instrucción en clase, por lo general, se organiza y dirige alrededor de las tareas, (ii) las tareas de aprendizaje que abordan los estudiantes determinan lo que aprenden y cómo lo aprenden y (iii) las TAM son un medio para que los investigadores realicen estudios y propongan la formulación y organización de planes curriculares. (Stein, Remillard y Smith, 2007).

Por otro lado están las tecnologías digitales, específicamente Geogebra, del cual se espera pueda fungir como elemento articulador de los conceptos involucrados en una TAM, y coadyuve a que los estudiantes logren un mejor entendimiento de conceptos matemáticos y sobre todo que logren observar las conexiones y articulaciones que existen entre diversos tópicos del currículum de matemáticas cuando tratan de resolver un problema.

En este sentido podemos decir que el uso de tecnologías digitales facilita la organización y el análisis de datos durante el proceso de resolver problemas, por lo que si los estudiantes disponen de estas herramientas pueden enfocar su atención en procesos claves del pensar matemáticamente como la toma de decisiones, la reflexión matemática y el razonamiento, más que en la realización de procesos rutinarios (Santos-Trigo, 2001).

En forma más profunda, Pea (1985) desarrolló la idea de que las herramientas tecnológicas pueden funcionar como instrumentos de mediación o tecnologías cognitivas, esto es, que ayudan a reorganizar y amplificar el conocimiento matemático. Moreno (2002) señala en este mismo sentido, que toda actividad cognitiva está estrechamente ligada con la mediación instrumental, en palabras más sencillas, que toda acción orientada al aprendizaje, constituye de hecho una acción instrumental.

Por otro lado, como mencionan Barrera y Reyes (2013), y Campos y Torres (2017), el diseño de una tarea de aprendizaje matemático debe incluir diversas fases y elementos, el punto de partida debería ser el objetivo de aprendizaje que el profesor pretenda que sus estudiantes logren, o bien las competencias a desarrollar según el programa de estudios, una vez identificado el objetivo de la tarea, se deben identificar lo que se podría llamar competencias o conocimientos previos que son requeridos para poder abordar la tarea, posteriormente se debe redactar el enunciado de la actividad, que será la forma en que se presentará a los estudiantes, en el entendido de que la actividad es más que sólo su enunciado. Otros elementos relevantes son el contexto o escenario de la actividad; la trayectoria, que incluye las acciones que despliega el estudiante y las posibles rutas de solución; así como las acciones del profesor, como es el caso del proceso inquisitivo, que deben considerarse como constituyentes esenciales de las TAM.

3. La Propuesta de Tarea de Aprendizaje

La TAM que se propone está contextualizada en la cinemática de los mecanismos, particularmente se centra en el mecanismo de pistón o también conocido como biela-manivela-deslizador, que permite convertir un movimiento de rotación o circular en un movimiento rectilíneo o lineal.

Es importante que al plantear dicha tarea a un grupo de estudiantes, el profesor se asegure que éstos entienden la manera en que dicho mecanismo se comporta y la pregunta que se les está planteando; el profesor se puede apoyar de recursos tales como animaciones, simulaciones, imágenes animadas, videos, etc. sobre este tipo de mecanismo, los cuales abundan en internet, además lo puede tratar de contextualizar por ejemplo con el mecanismo de los motores de combustión interna de los automóviles, (Figura 1).

Una vez que está convencido de que hay un entendimiento adecuado del funcionamiento del mecanismo, la tarea se puede plantear con el siguiente enunciado:

Dadas las longitudes “r” de la manivela, “d” de la biela y una velocidad angular constante “ω” de la manivela, determinar la posición del pistón “p” en cualquier instante de tiempo.

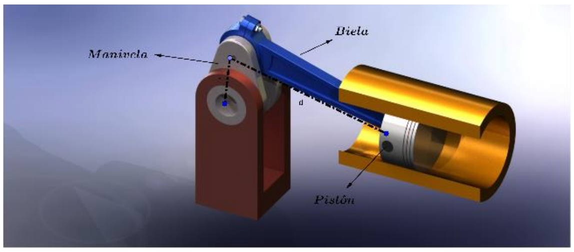


Figura 1: Representación en 3D de un mecanismo de pistón usado en motores de combustión interna. Fuente: Internet

En esta actividad, se pretende que el estudiante consiga primeramente entender las relaciones existentes entre las variables identificadas, y pueda posteriormente hallar una expresión para describir la posición del pistón en función de las variables “*r*”, “*d*” y “ω”. Para lograrlo, es necesario que bajo la guía del docente, recupere y ponga en práctica conocimientos previos sobre conceptos geométricos y trigonométricos, así como de conceptos y formulaciones propios del movimiento circular uniforme. Asimismo, se pretende que haga uso del SGD para poder construir un modelo del fenómeno en estudio, que le permita explorar distintas rutas de solución, hallar relaciones entre las variables, el plantear preguntas (hipótesis), desarrollar procesos de comprobación, analizar de casos particulares; entre otras trayectorias que se espera puedan seguir los estudiantes durante la solución de esta TAM.

¿Qué conceptos matemáticos se ponen en juego para la solución de esta tarea?

Como se dijo en párrafos anteriores, se debe estar seguro que los estudiantes entienden términos tales como manivela, biela, pistón y velocidad angular, para lo cual esquemas como el mostrado en la figura 1, además de recursos adicionales como los que ya se mencionaron, son de utilidad; toda vez que se ha entendido que este mecanismo es un conjunto de "barras" o "eslabones articulados", se debe tener claro ¿qué significa que la manivela se mueva a velocidad angular ω constante?

Pensar el problema en términos geométricos puede simplificar las cosas, si primero consideramos que la manivela y la biela se pueden representar como segmentos rectilíneos de longitud dada y que estar interesado en la posición del pistón es análogo a estar interesado en la posición de un punto; se puede pasar a una representación y construcción elaborada en Geogebra, en la que primero se debería pensar en cómo "modelar" en dicho software la manivela como una barra rígida que se mueve con movimiento circular uniforme, es decir a velocidad angular constante.

Para esto es necesario introducir primero la idea de un sistema de referencia, se propone un sistema cartesiano convencional, en el cual sin perder generalidad, se sugiere el origen sea el eje o centro de rotación de la manivela, un círculo de radio dado representará a la trayectoria seguida por la manivela, y el radio descrito por un punto que se mueve sobre esta circunferencia a velocidad angular constante, puede ser la representación de la barra rígida a la que llamamos manivela (ver figura 2).

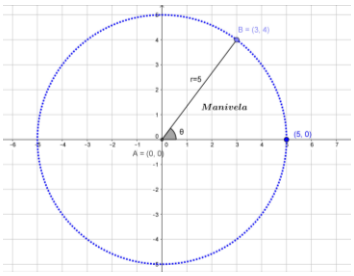


Figura 2: Representación esquemática de la manivela como el radio de un círculo con centro en el origen. Fuente: Elaboración propia.

Con un caso particular, por ejemplo un círculo de radio igual a cinco unidades, se puede iniciar la discusión sobre ¿cómo localizar las coordenadas rectangulares del extremo de la manivela? Ya que con seguridad, la posición del pistón que está conectado con el extremo de la manivela a través de la biela, dependerá de la posición ese punto.

Si los estudiantes tienen nociones básicas de trigonometría, pueden ser guiados por el profesor para que establezcan las coordenadas del extremo del radio, que es un punto sobre la circunferencia. Se pueden determinar con las relaciones trigonométricas de seno y coseno para triángulos rectángulos, en este caso si el ángulo que la manivela forma con el eje horizontal positivo en sentido anti horario; es "θ", y "r" es el radio de la manivela, (ver Figura 2) es fácil establecer que:

$$x = rcos(\theta)\ ;\ y = rsen(\theta) \quad (1)$$

A partir de la ecuación (1) se podría construir un modelo dinámico en Geogebra para representar el movimiento circular de la manivela, utilizándola como las entradas de un par ordenado (un par de ecuaciones paramétricas) y definiendo con la herramienta deslizador valores para (r,θ); sin embargo la posición del extremo de la manivela no dependería del tiempo y no hay forma de incluir el dato de la velocidad angular constante para el movimiento circular uniforme de la manivela.

En este sentido, explicar a los estudiantes una idea muy general sobre el concepto de velocidad angular es de utilidad, cuando un objeto que se mueve describiendo círculos, en este caso la manivela, recorre ángulos iguales en intervalos de tiempo iguales se dice que tiene velocidad angular es constante; en otras palabras, si θ es el ángulo recorrido por la manivela y t es el tiempo que tarda en recorrerlo, y dado que se mueve con velocidad angular ω constante:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = constante \quad (2)$$

En caso de que los estudiantes tengan nociones básicas de cálculo diferencial e integral de una variable, se puede empezar a introducir el concepto de ecuación diferencial, en este caso estaríamos interesados en conocer el valor del ángulo θ, el cual se podría conocer de la ecuación (2) resolviendo por variables separables, de tal forma que:

$$\int d\theta = \omega \int dt \quad (3)$$

De la ecuación (3) se concluye que $\theta = \omega t$; si los estudiantes no tienen antecedentes de cálculo como para discutir con ellos desarrollos como los que se sugieren; se puede llegar a la misma conclusión debido a que la velocidad angular ω constante, es decir, si queremos saber qué ángulo a recorrido la manivela en cierto tiempo, habrá que multiplicar éste por la velocidad angular.

Ahora que estamos en condiciones de expresar el ángulo en términos de la velocidad angular y el tiempo, regresamos a la ecuación (1), sustituimos y obtenemos:

$$x = rcos(\omega t); \quad y = rsen(\omega t) \quad (4)$$

A partir de la ecuación (4) se puede generar un modelo en Geogebra de la manivela por medio de un par de ecuaciones paramétricas que dependen del tiempo, se puede regresar al software para probar este resultado, creando con la herramienta deslizador tres parámetros: uno para controlar la longitud del radio de la manivela al que podemos llamar *"r"*, otro para controlar la velocidad angular de la manivela al que podemos llamar *"ω"* y uno más para el tiempo, al que podemos llamar *"t"* en realidad los primeros dos deslizadores no son variables como tal, ya que el radio de la manivela y la velocidad angular a la que gire se consideran constantes, el verdadero parámetro del que depende todo es el tiempo, sin embargo es conveniente modificar en un momento dado los valores del radio y de la velocidad angular, para observar qué efectos tienen en nuestro modelo cuando hagamos que el tiempo transcurra (ver figura 3).

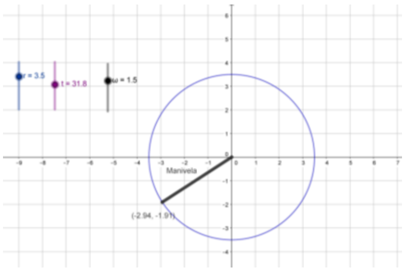


Figura 3: Modelo en Geogebra de una manivela girando a velocidad angular constante en función del tiempo, se crearon tres deslizadores, uno para modificar el radio, otro para la velocidad angular, y el tercero es para la variable tiempo. Fuente: Elaboración propia.

A estas alturas de la actividad se debió introducir también el concepto de función, al tener que definir la posición del extremo de la manivela en términos del tiempo; ahora se debe proseguir con la construcción del mecanismo en el software, para lo cual es recomendable pensar que sin pérdida de generalidad se puede trazar una recta que pase por el centro de la manivela (origen del sistema de referencia) y el pistón (el punto del cual nos interesa su posición en función del tiempo), y esta recta puede ser considerada el eje *"x",* en otras palabras, estaremos restringiendo el movimiento del pistón sobre este eje, con lo cual se puede simplificar el problema de encontrar su posición, bastará construir un círculo con centro en el extremo de la manivela (el punto que describe círculos a velocidad angular constante) y radio igual a la longitud *"d"* de la biela, la intersección de dicho círculo con el eje "x" positivo representará el punto que consideraremos el pistón del mecanismo, se sugiere para tal efecto crear otro deslizador que se puede nombrar "*d"* y representará la longitud de la biela. (Ver figura 4).

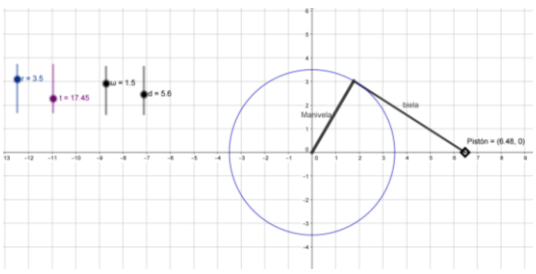


Figura 4: Modelo en Geogebra de un mecanismo de pistón, al animar el deslizador "t" la manivela gira a velocidad angular ω constante y arrastra al pistón sobre el eje "x" conectado a la biela, Se pueden modificar los valores de "r" y "d". Fuente: Elaboración propia.

Una vez que se ha logrado "modelar" en Geogebra el mecanismo de pistón, se pueden observar algunas características del mismo, por ejemplo el pistón tiene un recorrido (carrera del pistón) definido por las longitudes de la manivela y la biela, de tal forma que se puede determinar que la "mínima" posición del pistón se obtiene cuando la manivela y la biela se alinean, es decir, cuando el ángulo θ es de π radianes (180º); y por otro lado la posición más alejada o máxima, también se obtiene cuando ambas barras se alinean, pero cuando el ángulo es 0; en otras palabras, la carrera del pistón está dada dentro del intervalo cerrado $[d-r, d+r]$, es decir, se puede introducir ahora en la actividad el concepto de intervalo de números reales al igual que máximo y mínimo de una función.

Para tratar de encontrar en forma analítica la posición del pistón para cualquier tiempo *"t"*, es conveniente volver a pensar en forma geométrica, y un esquema puede ser útil para identificar que la posición del pistón, en este caso la abscisa del punto que lo representa sobre el eje "x" se puede obtener con ideas relativamente sencillas que se desprenden de los triángulos rectángulos. (Ver figura 5)

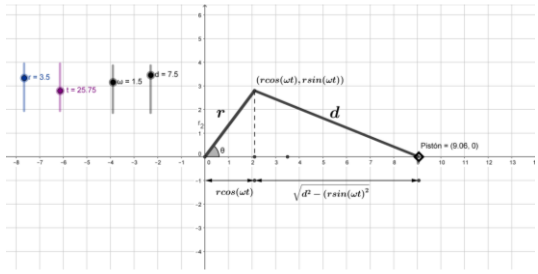


Figura 5: Un camino para encontrar la posición del pistón en forma analítica usando triángulos rectángulos. Fuente: Elaboración propia.

La simplicidad de la solución radica en que de acuerdo a la figura 5, la posición del pistón se puede expresar como la suma de dos distancias, en este caso los catetos de dos triángulos rectángulos, dado que *r, d, ω;* son datos, se observa que la posición "x" del pistón es función del tiempo, lo que se puede expresar de la siguiente forma:

$$x = rcos(\omega t) + \sqrt{d^2 - (rsen(\omega t))^2} \quad (5)$$

La ecuación (5) permite encontrar la posición del pistón para cualquier instante de tiempo, conociendo las longitudes de la manivela y la biela y la velocidad angular de la manivela; ahora que se tiene la solución general para un sistema de referencia cuyo origen es el eje de giro de la manivela y restringiendo el movimiento del pistón al eje de las abscisas, el modelo construido en Geogebra, puede permitir corroborar las respuestas que obtengamos con la ecuación (5).

¿Qué otros elementos se pueden introducir en la TAM? ¿Qué otras potencialidades se pueden aprovechar de Geogebra para esta tarea?

Otro elemento adicional que se puede incorporar a esta TAM, es que a partir de (5), se puede tratar de verificar el máximo y mínimo de esta función, ya sea por el proceso tradicional de derivar e igualar a cero o recurriendo a nociones básicas de las funciones trigonométricas seno y coseno y preguntarse ¿para qué valores de ángulo, seno y coseno toman su máximo y mínimo?, observando que si *ωt* es igual a cero o igual a π, la ecuación (5) toma sus valores máximos y mínimos, pudiendo corroborar que son *d+r, d-r,* respectivamente.

4. Discusión

En el Apéndice A, se muestra un diagrama que describe la estructura general de la TAM, y en él podemos identificar algunos de los elementos que hemos descrito en los fundamentos y en la propuesta misma. De este modo, puede destacarse el papel que juega el SGD en favorecer la experimentación, la identificación de relaciones o la identificación de invariantes. Como ejemplo de invariante tenemos a la velocidad angular, y un ejemplo de cómo el uso del SGD ayuda a verificar un resultado, se encuentra en el caso del cálculo de la posición como una función que depende de la velocidad angular, de las longitudes de la biela y la manivela y del tiempo (la ecuación 5). También resulta relevante destacar los distintos momentos en los cuáles resultan imprescindibles las acciones del profesor, que tienen como propósito guiar las distintas trayectorias del estudiante, así como promover el análisis y discusión de las ideas y conceptos (ver nuevamente cuadro del Apéndice A). Como ejemplos de estas acciones, tenemos el momento cuando el docente cuestiona acerca de cómo obtener las coordenadas rectangulares de la posición de la manivela, o el momento dónde les pregunta acerca de cuál sería la posición más próxima o más "pequeña" del pistón.

Un elemento que consideramos imprescindible en el diseño de una TAM, es el relativo a bosquejar las posibles trayectorias de solución que puede seguir el estudiante, dado que tienen relación directa con las denominadas rutas hipotéticas de aprendizaje, esta es una condición que consideramos indispensable, tanto es así que el docente debe tomarse el tiempo adecuado para ensayar estas trayectorias de solución, antes de que las implemente en el aula. En el Apéndice B se muestra un esquema general de estas posibles trayectorias. Como ejemplo podemos observar los distintos roles que desempeña el SGD en los distintos momentos de la actividad, que van desde la representación gráfica inicial, hasta la verificación o comprobación de conjeturas. También se puede observar los momentos de intervención del docente, que determinan las rutas o acciones que sigue el estudiante, así por ejemplo el proceso inquisitivo que despliega en la tercera parte de la TAM resulta imprescindible para que el alumno logre determinar los intervalos mínimo y máximo para la trayectoria del pistón (ver cuadro del Apéndice B).

5. Conclusiones

Consideramos que los elementos planteados en esta actividad, permiten articular diferentes conceptos matemáticos, por ejemplo: sistema de referencia, relaciones trigonométricas en triángulos rectángulos, comportamiento periódico, intervalo de números reales, función de una variable, dominio e imagen de una función, máximos y mínimos de una función, derivada e integral de función; además de algunos conceptos del contexto de la física como: velocidad, razón de cambio promedio, razón de cambio instantánea, y movimiento circular uniforme. Se sugiere trabajar esta actividad con estudiantes de los últimos semestres de bachillerato o de los primeros semestre de licenciatura, para quienes creemos podría ser de mayor provecho, considerando los conocimientos previos requeridos.

Es fundamental considerar también el papel que juega el profesor durante el planteamiento y la resolución de la tarea, ya que esta por sí sola no garantiza necesariamente que los estudiantes articulen los conceptos e ideas matemáticas que están en juego. En este sentido resulta importante que el docente pueda hacer una revisión previa de la TAM y reflexione acerca de los elementos que puede potenciar para mayor provecho de sus estudiantes, así como también plantear algunas alternativas o mejoras con base a sus propias experiencias.

Con base en lo anterior, consideramos que una actividad de este tipo puede cumplir satisfactoriamente algunos requisitos que debe tener una TAM , como por ejemplo: poner en juego en el aula de clase la discusión de ideas y conceptos matemáticos, la implementación de tareas que exijan una mayor demanda cognitiva para el estudiante, así como el empleo de las tecnologías digitales, en este caso el software Geogebra, para potenciar un entendimiento más profundo de las ideas y conceptos matemáticos puestos en escena.

Abstract

The Mathematical Learning Tasks (TAM) are the main means through which the teacher can encourage students to construct the mathematical concepts of study and discussion. It is not enough to give the statement of a problem to affirm that you have a Task designed; it is not enough to design the activity to be successful.

On the other hand, the use of digital tools in the mathematics class can be a favorable element for the teacher to design tasks that allow him to articulate the existing relationships between different mathematical concepts, besides promoting the understanding of diverse ideas. In this sense, it is proposed a TAM based on the piston mechanism or also known as crank-slider, which when approached with the use of a system of dynamic geometry (SGD) as geogebra, can stimulate the achievement of the articulation of concepts And ideas and greater understanding in the math class..

Keywords: Mathematical learning Tasks, Geogebra, Mechanism of Piston

Referencias

Álvarez-Quintero, D. (2007) *Tratamiento didáctico dado a los teoremas fundamentales del cálculo: un análisis de texto*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Pedagógica Nacional Colombia.

Barrera, F. y Reyes, A. (2013). Elementos Didácticos y resolución de problemas: formación docente en matemáticas. México: editorial UAEH.

Bayazit, I. (2006) Task Selection and Task Implementation: Seven Constraints Affecting The Teacher's Instruction, Rn Hewitt, D. (Ed) Proceedings of the British Society for Research into Learning Matehmatics. (vol. 26, pp. 23-28).

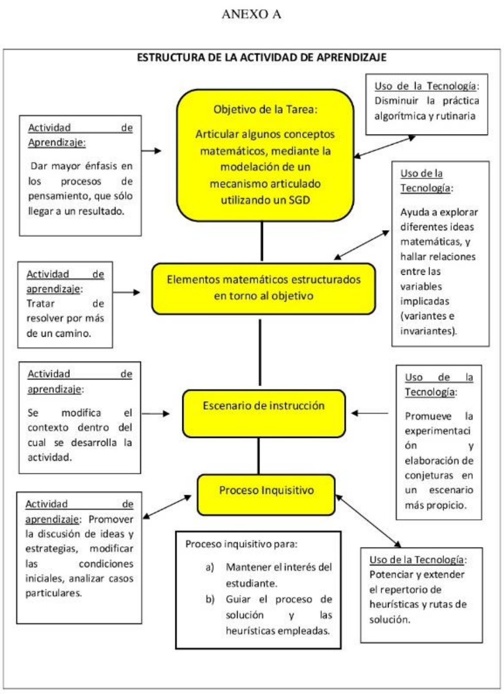
Campos-Nava, M. y Torres-Rodríguez, A. (2017). Las Tareas de Aprendizaje en la Enseñanza de las Matemáticas a Distancia. *Revista Mexicana de Bachillerato a Distancia*, Num 17, pp. 141-149.

Moreno, L. (2002). Instrumentos Matemáticos Computacionales. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.) *Memorias del Seminario Nacional Formación de Docentes sobre el uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* (pp.81-86).Bogotá, Colombia.

Pea, R.D. (1985). Beyond Amplification: Using the Computer to Recognize mental Functioning. *Educational Psychologist*, 20(4), 167-182.

Rojas, L. & Esteban, V. (2012). *Geogebra y Applets Aplicados a la enseñanza y aprendizaje del cálculo*. Simposio Ibero americano de aplicaciones y tecnologías de la información y comunicación.
Santos-Trigo, M. (2001). Potecial didáctico del software dinámico en el aprendizaje de las matemáticas. *Avance y Perspectiva*, 20, 24-258.
Stein, M., Remillard, J. & Smith, M. (2007), How curriculum influences students learning. En F. Lester (Ed), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). New York: Macmillan.

Apéndice A.



Apéndice B.