

Publicación Semestral Pädi No. 11 (2018) 58–64

El juego del embaldosado libre y una aplicación a HAWC

Erika Elizabeth Rodríguez Torres^{a,1}, Margarita Tetlalmatzi Montiel^{a,1,*}, Rafael Villarroel Flores^{a,2}

^aÁrea Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5, Col. Carboneras, C. P. 42184, Mineral de la Reforma, Hgo., México.

Resumen

El juego del embaldosado libre consiste en lanzar una moneda a un piso con un embaldosado regular y calcular la probabilidad del número de baldosas que toca la moneda al caer. Este problema se puede resolver con geometría básica, resultando un buen problema introductorio a la probabilidad. En este trabajo se plantea y desarrolla el juego del embaldosado libre. Como una aplicación, se simplifica el problema de detectar las huellas de rayos gamma y cósmicos de altas energías por el observatorio nacional HAWC (High Altitude Water Cherenkov) y se adapta a este juego.

Palabras Clave: Embaldosado libre, HAWC.

1. Introducción

Los inicios de la probabilidad se encuentran sumergidos en la inquietud de conocer las posibilidades de ganar juegos. Entre estos juegos está el de lanzar monedas, pero muy particularmente el de lanzar una moneda a un piso con baldosas o mosaicos regulares, nos referimos al llamado juego del embaldosado libre. Este juego es un problema de probabilidad planteado y estudiado por Georges Louis Leclerc, conde de Buffon (Francia, 1707 - 1788). Como ya dijimos, consiste en lanzar una moneda a un piso con mosaicos regulares, y se apuesta sobre el número de mosaicos que la moneda toca (Leclerc conde de Buffon, 1777). Un problema relacionado con el del embaldosado libre es otro que el mismo conde de Buffon planteó, el problema de la aguja de Buffon (Leclerc conde de Buffon, 1777) y que se puede encontrar en algunos textos de probabilidad (Ross, 2012). Este segundo juego consta de un piso con líneas paralelas y una aguja, se lanza la aguja al piso y el problema consiste en calcular la probabilidad de que esta toque alguna de las líneas. Cabe notar que la solución al problema de la aguja de Buffon se puede emplear para encontrar aproximaciones al número π . Las soluciones de ambos problemas se basan en ideas geométricas, marcando con ellos el inicio de la probabilidad geométrica (Mathai, 1999).

Queremos aplicar el problema del juego del embaldosado libre a la detección de rayos gamma por el Observatorio Na-

cional HAWC (High Altitude Water Cherenkov). El laboratorio HAWC tiene una zona de detectores principales en un área que podemos pensar cuadrada o hexagonal. Imaginemos que los rayos gamma caen en forma de una regadera, y que al llegar al piso dejan una huella circular. Los investigadores se interesan en los círculos cuyos centros pueden determinar. Para poder encontrar un mayor número de dichos centros, se va a rodear la zona de los detectores principales con un anillo de detectores secundarios (Capistran et al., 2017). Simplificando el problema, considere que en lugar de HAWC tenemos un piso con mosaicos cuadrados o hexagonales y que en lugar de la huella de los rayos lanzamos una moneda, pasando así el problema de detectar los rayos al juego del embaldosado libre.

Primero abordamos el problema del juego del embaldosado libre. Posteriormente calculamos las probabilidades de que el centro del círculo de los rayos caiga dentro de algunas zonas de interés. Todos los cálculos emplean ideas geométricas básicas.

2. El problema del embaldosado libre

El juego del embaldosado libre surge de un juego de apuestas. Cada uno de los dos apostadores selecciona una región de un piso con baldosas o mosaicos y se lanza una moneda al piso, gana el jugador que acierta la región donde queda la moneda. En cualquier juego de apuestas es recomendable que el juego sea justo, en el problema de nuestro interés se tiene un juego justo cuando las probabilidades de que la moneda termine en una u otra región sean iguales.

Para estar dentro del contexto del juego del embaldosado libre, considere un piso con baldosas o mosaicos regulares, lo que significa que los mosaicos son polígonos regulares acom-

*Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: erikart@uaeh.edu.mx (Erika Elizabeth Rodríguez Torres), tmontiel@uaeh.edu.mx (Margarita Tetlalmatzi Montiel), rafaelv@uaeh.edu.mx (Rafael Villarroel Flores)

¹Profesora Investigadora de tiempo completo.

²Profesor Investigador de tiempo completo.

dados de forma que no se sobreponen ni queda espacio entre ellos. Estos cumplen que todos sus lados miden lo mismo, que todos sus ángulos son iguales y que los ángulos interiores de los vértices que coinciden en un punto suman 360° . Los ángulos interiores del triángulo equilátero son de 60° , los del cuadrado son de 90° y los del hexágono son de 120° , por lo que podemos acomodar seis, cuatro y tres mosaicos de ellos, respectivamente (figura 1). No podemos usar pentágonos, ya que sus ángulos interiores miden 108° , si acomodamos tres de ellos coincidiendo por uno de sus vértices los ángulos suman 324° y falta espacio para completar los 360° , si colocamos cuatro los ángulos suman 432° , se sobreponen los pentágonos. El menor número de polígonos que podemos acomodar coincidiendo por un vértice es tres, que corresponde al caso de los hexágonos. Los ángulos interiores de polígonos con más de seis lados miden más de 120° , por lo que, si colocamos tres mosaico regulares con más de seis lados se sobreponen, con lo cual, solo tenemos los tres casos ilustrados en la figura 1.

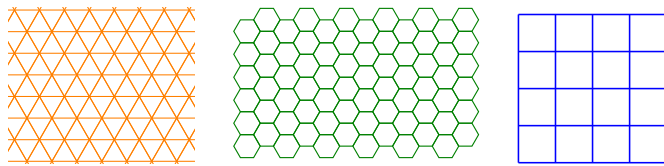


Figura 1: Embaldosados regulares

Estamos interesados en calcular la probabilidad de que la moneda toque, al caer al piso, uno o más mosaicos. Para esto, la probabilidad se calcula de acuerdo al cociente del área de la región dentro del mosaico que cumpla con la condición deseada entre el área total del mosaico.

2.1. Embaldosado cuadrado

Comencemos con el caso de mosaicos cuadrados. La moneda puede caer en un mosaico libremente o entre dos, tres o cuatro (figura 2). Consideremos un mosaico cuadrado de lado L y una moneda con diámetro d , con el diámetro menor al lado.

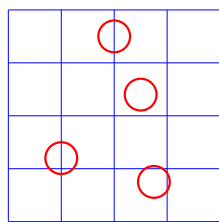
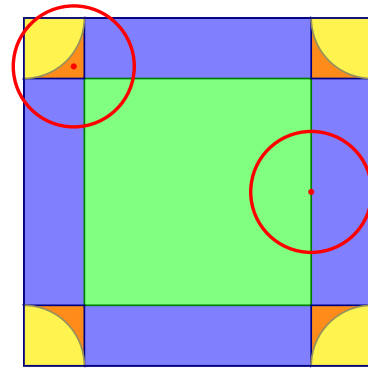


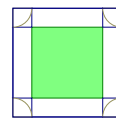
Figura 2: Monedas en mosaicos cuadrados

1. Para que la moneda caiga completamente dentro de un mosaico, es necesario que el centro de la moneda se encuentre en la región verde de la figura 3(b), esta es un cuadrado de lado $L - d$. La probabilidad buscada se reduce, en este caso, al cociente de las áreas de un cuadrado de lado $L - d$ y otro de lado L , dando la probabilidad

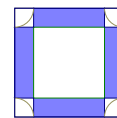
$$P_1 = \frac{(L - d)^2}{L^2} = \left(1 - \frac{d}{L}\right)^2. \tag{1}$$



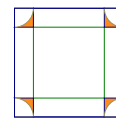
(a) Completo



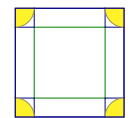
(b) Verde



(c) Azul



(d) Naranja



(e) Amarilla

Figura 3: Mosaico cuadrado.

2. Si la moneda queda entre dos cuadrados, su centro se encuentra en alguno de los cuatro rectángulos azules de la figura 3(c), estos son rectángulos de altura $d/2$ y base $L - d$, quedando la probabilidad de este caso como

$$P_2 = 4 \frac{(L - d)d/2}{L^2} = 2 \left(1 - \frac{d}{L}\right) \frac{d}{L}.$$

3. El caso de caer en tres mosaicos es más interesante. Observando la figura 3(d), los centros deben estar en las secciones naranja de las cuatro esquinas. Juntando estas cuatro esquinas nos queda un cuadrado de lado d con un círculo inscrito de diámetro d . Las cuatro secciones naranja resultan ser la diferencia del área del cuadrado y la del círculo. Con lo que nos queda que la probabilidad buscada es

$$P_3 = \frac{d^2 - \pi d^2/4}{L^2} = \frac{d^2}{L^2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

4. Quedando finalmente el caso cuando la moneda corta cuatro bordes de mosaicos, es precisamente cuando su centro queda en la región amarilla de la figura 3(e), así

$$P_4 = \frac{\pi d^2/4}{L^2} = \frac{\pi}{4} \frac{d^2}{L^2}.$$

Es muy importante observar que la suma de todas las probabilidades es uno.

Pero, ¿qué ocurre con el juego? Considere a dos jugadores que lanzan una moneda al piso, el primero apuesta a que la moneda queda completamente dentro de uno de los mosaicos y el otro apuesta a que la moneda toca dos, tres o cuatro mosaicos. Así, el primer jugador gana con probabilidad P_1 y el segundo

jugador gana con probabilidad $P_2 + P_3 + P_4 = 1 - P_1$. Se tiene un juego justo si $P_1 = 1 - P_1$, lo que nos da la ecuación $(1 - d/L)^2 = 1/2$, esto es, el juego es justo si se cumple la relación $d = L(1 - 1/\sqrt{2}) \approx 0,29289L$.

2.2. Embaldosado hexagonal

En lo que sigue es importante tener en mente el triángulo rectángulo de lados 1, 2 y $\sqrt{3}$, le llamaremos triángulo base (figura 4), ya que lo vamos a emplear para comparar semejanzas entre triángulos. Solo necesitamos el criterio de que dos triángulos son semejantes si dos de sus ángulos son iguales. También necesitamos el área de un triángulo equilátero de lado L , la altura del triángulo H lo divide en dos triángulos semejantes al triángulo base (figura 4). Así, tenemos la relación

$$\frac{H}{\sqrt{3}} = \frac{L}{2}, \tag{2}$$

y el área del triángulo equilátero queda como

$$\frac{\sqrt{3}}{4} L^2. \tag{3}$$

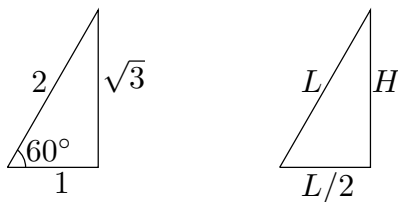


Figura 4: Triángulo semejantes.

Si ahora empleamos mosaicos hexagonales de lado L y lanzamos una moneda de diámetro d , con $L > d$, tenemos tres casos cuyas regiones se señalan en la figura 6(a), cuando la moneda queda dentro de un hexágono (región verde) y cuando queda entre dos (región azul) o tres hexágonos (región naranja).

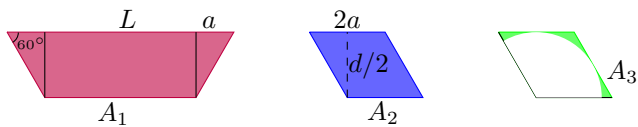
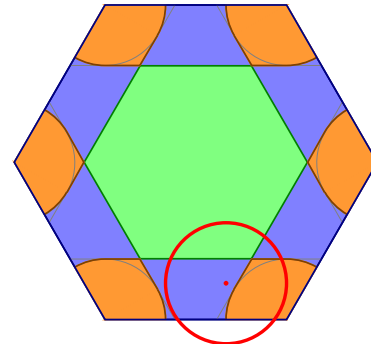


Figura 5: Las tres áreas

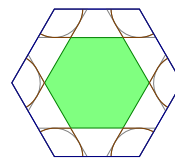
Antes de continuar, calculemos algunas áreas, estas son A_1 , A_2 y A_3 de la figura 5. La primera región es un trapecio con altura $d/2$ y bases L y $L+2a$. Por semejanzas obtenemos $2a = \frac{1}{\sqrt{3}}d$, quedando $A_1 = \frac{Ld}{2} + \frac{\sqrt{3}d^2}{12}$. La segunda región es un paralelogramo de base $2a$ y altura $d/2$, por lo que su área es $A_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}d^2$. Para la tercera región le restamos a A_2 la tercera parte del área de un círculo de diámetro d , esto es $A_3 = \frac{\sqrt{3}d^2}{6} - \pi \frac{d^2}{12} = \frac{d^2}{6} \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right)$.

Por supuesto, necesitamos el área del hexágono de lado L . Un hexágono se forma por seis triángulos equiláteros de lado L , por (3) concluimos que el área del hexágono es

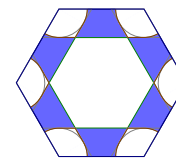
$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2} L^2. \tag{4}$$



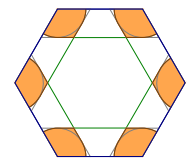
(a) Completo



(b) Verde



(c) Azul



(d) Naranja

Figura 6: Mosaico hexagonal.

A continuación tenemos las probabilidades de los tres casos.

1. La región donde la moneda queda dentro del hexágono es otro hexágono (región verde en figura 6(b)), digamos con lado l y apotema h . Si H es el apotema del hexágono original, nos da $h = H - \frac{1}{2}d$. Como el hexágono está formado por 6 triángulos equiláteros, encontrar h se reduce a encontrar la altura de uno de esos triángulos. Por la semejanza de triángulos nos queda $h = \frac{\sqrt{3}}{2}L - \frac{1}{2}d$. Así, nuevamente por semejanza de triángulos, su lado es $l = \frac{2}{\sqrt{3}}h = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}L - \frac{1}{2}d \right) = L - \frac{d}{\sqrt{3}}$, que es el lado del hexágono pequeño, por (3) su área es $\frac{3\sqrt{3}}{2}l^2$.

La probabilidad de que la moneda quede limpiamente dentro de un mosaico hexagonal es el cociente entre el área del hexágono pequeño y el área del hexágono original, siendo

$$P_1 = \frac{l^2}{L^2} = \frac{\left(L - \frac{d}{\sqrt{3}} \right)^2}{L^2} = \left(1 - \frac{d}{\sqrt{3}L} \right)^2. \tag{5}$$

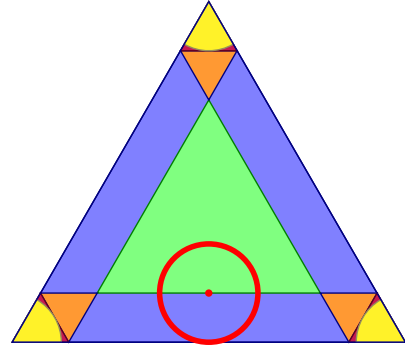
2. Cuando la moneda cae entre dos hexágonos, su centro queda en una de las seis secciones azules de la figura 6(c), observando la figura 5 cada sección tiene un área igual a $A_1 - 2A_2 + \frac{1}{2}A_3$, que es $\frac{dL}{2} - \frac{d^2}{6} \left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{4} \right)$. Con lo

cual, la probabilidad de que la moneda quede exactamente entre dos hexágonos es

$$P_2 = \frac{3dL - d^2 \left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{4} \right)}{\frac{3\sqrt{3}}{2}L^2} = \frac{2d}{3\sqrt{3}L^2} \left(3L - d \left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{4} \right) \right).$$

- Si la moneda toca exactamente tres hexágonos, observando las regiones naranja de la figura 6(d) y la figura 5, su centro queda en una de las seis secciones con área $A_2 - \frac{1}{2}A_3 = \frac{d^2}{12} \left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{2} \right)$, y la probabilidad de que ocurra este caso es

$$P_3 = \frac{\frac{d^2}{2} \left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{2} \right)}{\frac{3\sqrt{3}}{2}L^2} = \frac{d^2}{3\sqrt{3}L^2} \left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{2} \right).$$



(a) Completo

Si dos personas juegan en este tipo de mosaicos se tiene un juego justo cuando $P_1 = P_2 + P_3 = 1 - P_1$, es decir, si se cumple la relación $d = L\sqrt{3}(1 - 1/\sqrt{2}) = 0,5073L$.

2.3. Embaldosado triangular

En el caso de tener mosaicos regulares triangulares surgen muchas posibilidades, ya que la moneda puede tocar una, dos, tres, cuatro o seis triángulos, que son las regiones verde, azul, naranja, púrpura y amarilla, respectivamente, de la figura 7(a). Las ideas para encontrar estas probabilidades son parecidas a las anteriores y empleando semejanzas con el triángulo base, por lo que solo las indicamos. En los cálculos se considera que $L > d$.

La probabilidad de que la moneda se encuentre:

- Limpiamente en un triángulo, región verde de la figura 7(b), resulta ser

$$P_1 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}(L - \sqrt{3}d)^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}L^2} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}d}{L} \right)^2.$$

- En exactamente dos triángulos, región azul de la figura 7(c), es

$$P_2 = \frac{\frac{3}{2}d \left(L - \frac{5\sqrt{3}}{6}d \right)}{\frac{\sqrt{3}}{4}L^2} = \frac{2\sqrt{3}d}{L^2} \left(L - \frac{5\sqrt{3}}{6}d \right).$$

- Entre tres triángulos, región naranja de la figura 7(d), nos da

$$P_3 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}d^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}L^2} = \frac{d^2}{L^2}.$$

- Tocando cuatro triángulos, región púrpura de la figura 7(e), es más interesante, y es

$$P_4 = \frac{d^2 \left(\frac{\sqrt{3}-\pi/2}{4} \right)}{\frac{\sqrt{3}}{4}L^2} = \frac{d^2}{\sqrt{3}L^2} \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right).$$

- En seis triángulos, región amarilla de la figura 7(f), resulta con

$$P_5 = \frac{\frac{\pi}{8}d^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}L^2} = \frac{\pi d^2}{2\sqrt{3}L^2}.$$

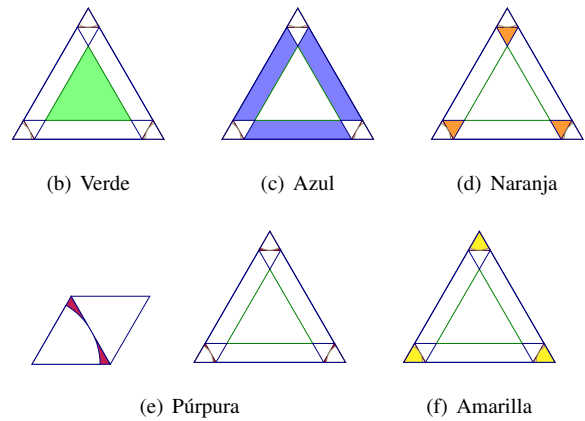


Figura 7: Mosaico triangular.

Cuando dos personas juegan en este tipo de mosaicos, se tiene un juego justo si $P_1 = P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 1 - P_1$, esto es, cuando se cumple la relación $d = L(1 - 1/\sqrt{2})/\sqrt{3} = 0,1691L$.

Existen mucha páginas en Internet relacionadas con el problema del embaldosado libre de Buffon, en particular recomendamos la página de Wolfram Math World (Weisstein, 2017), donde se pueden ver algunas animaciones.

3. Aplicando a HAWC

El Observatorio de Gran Altura de Agua Cherenkov (HAWC, por sus siglas en inglés) se encuentra a una altura de 4100 metros sobre el nivel del mar, en la base del volcán Sierra Negra del Parque Nacional Pico de Orizaba, en el estado de Puebla, México. Este observatorio tiene, entre sus funciones, detectar lluvias de partículas secundarias que se generan cuando rayos gamma y rayos cósmicos de altas energías, del orden de 100 GeV a 100 TeV, entran a la atmósfera de la Tierra (HAWC, 2017). Dichas lluvias de rayos dejan una huella circular que vamos a considerar de aproximadamente 100 metros de diámetro. Estos rayos pueden tener su origen en explosiones de supernovas o núcleos de galaxias (INAOE-HAWC, 2017). El observatorio consiste de un arreglo de 300 tanques principales que

cubren un área aproximada de 22 000 m², cada tanque tiene en su interior detectores de rayos gamma y rayos cósmicos de altas energías, estos son los detectores principales. Dentro de las huellas de rayos que dejan suficiente información en HAWC para ser consideradas, hay algunas cuyos centros no quedan en la zona de HAWC, causando ambigüedad en la reconstrucción de la dirección de proveniencia, tamaño y energía de los rayos gamma originales (Sandoval, 2015). Se planea agregar un anillo de 200 tanques más pequeños con detectores secundarios al alrededor de la zona de los tanques principales, con la finalidad de poder conocer más centros de huellas (HAWC, 2017). El área del anillo será aproximadamente cuatro veces el área de la zona principal. La UAEH es una de las instituciones, de entre varios países, involucradas en el proyecto HAWC. Científicos del Área Académica de Matemáticas y Física realizan investigaciones en este observatorio.

En general, para poder atacar un problema en matemáticas, se plantea un modelo simple que poco a poco se va complicando hasta tener la mejor aproximación posible al problema original, por ejemplo, este proceso se ilustra en el amigable bosquejo a un modelo de epidemiología en la revista Herreriana, (Avila Pozos and Tetlalmatzi Montiel, 2016). Para aplicar el juego del embañosado libre al problema de detectar los rayos gamma también es necesario simplificar el problema. Debido a la geografía del volcán Sierra Negra, la zona donde se encuentran los detectores no forma un polígono regular (Capistran et al., 2017). Sin embargo, como una primera aproximación se supone que es cuadrada y posteriormente se considera que es hexagonal. Para fijar ideas, el lado de la zona de detectores principales HAWC se denota con R , el lado de la zona de detectores principales con el anillo de detectores secundarios se denota con L , y el diámetro del círculo formado por la huella de lluvia de los rayos gamma se denota con d , ver figuras 8 y 10. Así, tenemos una moneda de diámetro d , un mosaico de lado L , más un pequeño mosaico centrado en el anterior de lado R .

3.1. Modelo cuadrado

De la información anterior en esta sección, el cuadrado pequeño tiene lado R y su área es de 22 000 m². Así tenemos $R \approx 148$, una moneda de diámetro $d \approx 100$ m, y como el área del anillo es cuatro veces el área donde están los detectores principales, esto da $L^2 - R^2 = 4R^2$, con lo cual $L = \sqrt{5}R \approx 331$ m, ver figura 8.

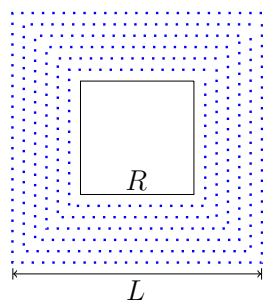


Figura 8: Modelo cuadrado

Ya que estamos interesados en las huellas de rayos cuyos centros se pueden determinar y que dejan suficiente información, sólo se consideran monedas cuyos centros quedan dentro del cuadrado de lado L . A continuación se calculan las probabilidades de los siguientes tres casos:

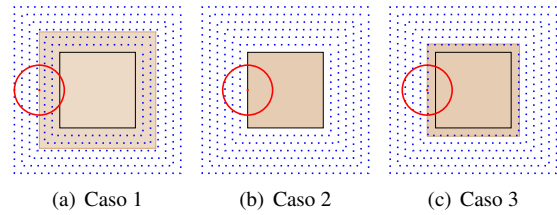


Figura 9: Casos con el modelo cuadrado.

1. Sección sombreada de la figura 9(a). En este caso la moneda cae limpiamente en el cuadrado de lado L .
2. Sección sombreada de la figura 9(b). El centro de la moneda queda dentro del cuadrado pequeño de lado R .
3. Sección sombreada de la figura 9(c). El centro del círculo queda dentro de un cuadrado de lado $R + d/3$.

Observe que el caso 2 contempla cuando la mitad de la moneda queda en el cuadrado pequeño y el caso 3 cuando queda un tercio del diámetro de la moneda en dicho cuadrado.

Como el punto 1 corresponde al caso en que la moneda queda libremente contenida en el cuadrado de lado L , por (1), la probabilidad de que este caso ocurra es $(1 - \frac{100}{331})^2 \approx 0,4870$. En el caso 2 la distancia entre los dos cuadrados es $(L - R)/2$, por lo que corresponde a lanzar una moneda con este radio, considerando la relación $L^2 = 5R^2$ y por (1), la probabilidad de que ocurra el caso 2 es $1/5 = 0,2$. Para el caso 3 se considera una moneda de diámetro $L - R - d/3$, y por (1) la probabilidad de que esto ocurra es aproximadamente 0.3001.

3.2. Modelo hexagonal

En este modelo seguimos considerando una moneda con diámetro $d = 100$, pero cambian las formas de las regiones, ahora tenemos un hexágono pequeño de lado R con un área de 22 000 m² y apotema h , centrado en un hexágono mayor de lado L y apotema H , ver figura 10. Por la ecuación (4), se obtiene $3\sqrt{3}R^2/2 = 22000$, con lo cual $R \approx 92$. El área del anillo entre los dos hexágonos es cuatro veces el área donde están los detectores principales, esto es $L^2 - R^2 = 4R^2$, con lo cual $L = \sqrt{5}R \approx 206$.

Calculemos las probabilidades de tres casos similares a los del modelo cuadrado.

1. Sección sombreada de la figura 11(a). En este caso la moneda cae limpiamente en el hexágono de lado L .
2. Sección sombreada de la figura 11(b). El centro de la moneda queda dentro del hexágono pequeño de lado R .
3. Sección sombreada de la figura 11(c). El centro de la moneda queda dentro de un hexágono con apotema $h + d/6$.

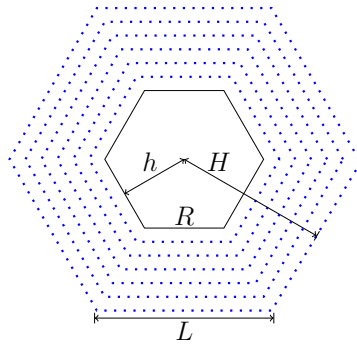


Figura 10: Modelo hexagonal

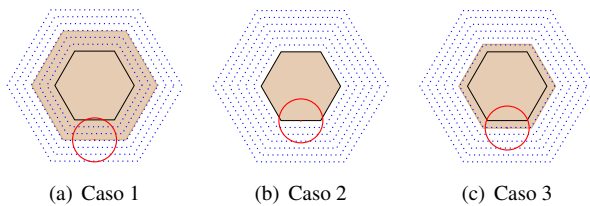


Figura 11: Casos con el modelo hexagonal.

Notemos que el caso 2 contempla cuando la mitad de la moneda queda en el hexágono pequeño y el caso 3 cuando queda un tercio del diámetro de la moneda en dicho hexágono.

En el caso 1, por (5), la probabilidad de que la moneda caiga libremente en el hexágono es $\left(1 - \frac{100}{206\sqrt{3}}\right)^2 \approx 0.518015$. Para lo que sigue, por (2), $H = \sqrt{3}L/2$ y $h = \sqrt{3}R/2$. Que ocurra el caso 2 es equivalente a tener un círculo de radio $H - h$, por la relación $L^2 = 5R^2$ y según (5), la probabilidad del caso 2 es nuevamente $1/5$. Finalmente, para el punto 3, si el apotema es $h + d/6$, se calcula la probabilidad considerando como si se lanzara una moneda de diámetro $2(H - h) - d/3$, por (5) esta probabilidad es aproximadamente 0.2916.

Se resumen los cálculos anteriores en la tabla 1. En términos de HAWC, de entre las huellas de rayos cuyos centros quedan dentro de la región de los detectores, la tabla 1 muestra las probabilidades de que estas huellas se encuentren en alguno de los tres casos siguientes:

1. La huella de los rayos queda completamente dentro de la región de los detectores.
2. El centro de los detectores queda dentro de la región de detectores principales.
3. El centro de los detectores queda en una región más amplia que la región principal, en el caso del modelo cuadrado el lado se aumenta por $d/3$, y en el caso del modelo hexagonal la apotema se incrementa por $d/6$.

Podemos observar que, aunque en el caso 1 la probabilidad es mayor para el modelo hexagonal, en los otros dos casos las probabilidades son prácticamente iguales.

A través de la historia la física y la matemática se han enriquecido mutuamente. Aquí mostramos una primera aproximación a un problema muy complejo, tanto en el aspecto de

Tabla 1: Probabilidades

Modelo	caso 1	caso 2	caso 3
Cuadrado	0.4870	0.2	0.3001
Hexagonal	0.5180	0.2	0.2916

la física como en el de la matemática. Sin embargo, nos ayuda a comprender las relaciones entre estas dos ciencias hermanas. Lamentablemente no pudimos obtener las dimensiones de HAWC, por lo que no se realizaron los cálculos correspondientes.

El juego del embañosado libre es un problema que muestra claramente la idea de la probabilidad geométrica. Tiene un planteamiento simple donde se ilustra el concepto de aleatoriedad y se resuelve empleando ideas geométricas. Como los cálculos involucrados son accesibles, puede ser un buen ejemplo introductorio a la probabilidad.

English Summary

The clean tile game and an application to HAWC.

Abstract

On the clean tile game players throw a coin on a regular tiled floor. The probability of the number of tiles the coin partially covers, can be calculated with basic geometry. This is a nice example to introduce probability. In this work, the clean tile problem is solved. As an application, it is related to the problem to detect gamma and cosmic rays of high energy, by the observatory HAWC (High Altitude Water Cherenkov).

Keywords:

Clean tile, HAWC.

Agradecimientos

Agradecemos a los investigadores Dr. Roberto Noriega Paquiqui y Dr. Pedro Amado Miranda por sus enriquecedoras charlas sobre HAWC. También deseamos agradecer a la revisora por sus invaluable comentarios.

Referencias

- Avila Pozos, R., Tetlalmatzi Montiel, M., 2016. Sobre epidemiología y matemáticas. *Herreriana* 12 (2), 11–14.
URL: https://issuu.com/herreriana/docs/herreriana_vol_12_no_2_2016_
- Capistran, T., Torres, I., Moreno, E., colaboradores de HAWC, 2017. Characterization of the outer detector (outriggers) for HAWC. *Journal of Physics: Conference Series*, 792 (1).
DOI: 10.1088/1742-6596/792/1/012094
- HAWC, 2017. The high-altitude water cherenkov gamma-ray observatory. Recuperado el 14/06/2017.
URL: <http://web.archive.org/web/20080207010024/>
- INAOE-HAWC, 2017. High altitude water cherenkov / el observatorio de rayos gamma HAWC. Recuperado el 22/06/2017.
URL: <http://www.inaoep.mx/hawc/>

- Leclerc conde de Buffon, G. L., 1777. Essai d'arithmétique morale. Histoire naturelle, générale et particulière 4, 46–123.
- Mathai, A. M., 1999. An introduction to geometrical probability: distributional aspects with applications. Gordon and Breach Science Publishers, Singapore.
- Ross, S., 2012. A first course in probability, novena edición. Prentice Hall College Div., EEUU.
- Sandoval, A., 2015. HAWC upgrade with a sparse outrigger array. Proc. of the 34rd ICRC, The Hague, The Netherlands. Citar como arXiv:1509.04269.
- Weisstein, E. W., 2017. Clean tile problem. From MathWorld – A Wolfram Web Resource. Recuperado el 14/06/2017.
URL: <http://mathworld.wolfram.com/CleanTileProblem.html>