

Aspectos Cualitativos del problema de Kepler en Mundos Brana Qualitative aspects from Kepler problem in Brane Worlds

Arturo Criollo^{a,*}, Omar Pedraza^a

^aÁrea Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Pachuca, Hidalgo, México.

Resumen

En este trabajo se estudia de forma cualitativa el problema de Kepler con un potencial de interacción que proviene de mundos brana. Particularmente usando el retrato fase y la técnica de la explosión se realiza la clasificación de las órbitas. Por completez se lleva a cabo el análisis del problema de Kepler clásico y se compara con el problema de Kepler en mundos brana.

Palabras Clave:

Problema de Kepler, Mundos Brana, retrato fase, explosión.

Abstract

In this work we study qualitatively the Kepler problem with an interaction potential that comes from brane worlds. Particularly using the phase portrait and the technique of the explosion we made the classification of the orbits. By completeness, we analyze the classical Kepler problem and compared with Kepler's problem in brane worlds.

Keywords:

Kepler problem, Brane Worlds, phase portrait, explosion.

1. Introducción

El entendimiento y comprensión del movimiento de los cuerpos celestes ha sido uno de los problemas que más ha fascinado a la humanidad a lo largo de la historia, sin embargo, fue con los fundamentos de la mecánica de Newton que hubo un avance muy importante en el estudio de este problema, permitiendo en algunos casos determinar con mucha precisión la órbita de los planetas. Sin embargo, en otros casos como el de Mercurio, la órbita teórica calculada con la mecánica propuesta por Newton no concuerda con los datos observados.

Una de las primeras propuestas que trato de resolver este problema, fue dada por G. Manev en 1930 (Manev (1924)). La solución que él propuso fue considerar el siguiente potencial de interacción

$$v(r) = \frac{1}{r} + \frac{B}{r^2}, \quad B \approx \frac{1}{c^2}, \quad (1)$$

con c la velocidad de la luz. La propuesta de Manev permitió dar una justificación teórica del movimiento del perihelio de mercurio. Hoy en día, sabemos que la relatividad general da una descripción más precisa de la dinámica de algunos cuerpos

celestes. En el límite de campos débiles, la relatividad general considera un potencial de interacción

$$v(r) = \frac{a}{r} + \frac{b}{r^3}, \quad (2)$$

donde las constantes a y b están relacionadas con las características de los cuerpos que interactúan. Este potencial explica con gran precisión, las observaciones de la precesión del perihelio de Mercurio.

Más recientemente, se han considerado también otro tipo de potenciales que describen otros sistemas físicos (no necesariamente relacionados con problemas de mecánica celeste), como por ejemplo, potenciales con perturbaciones anisotrópicas (Gutzwiller (1973)) como un intento de conectar la mecánica de Newton con la mecánica cuántica, otro tipo de potenciales que han sido estudiados, son los que incorporan perturbaciones mixtas (Roy (1988)), los cuales se consideran en el estudio de las órbitas de los satélites artificiales alrededor de la tierra, debido a que incorporan el hecho de que la tierra no es completamente esférica.

Por otra parte, el descubrimiento de nuevas interacciones,

*Autor para correspondencia: arturoc@uaeh.edu.mx

Correo electrónico: arturoc@uaeh.edu.mx (Arturo Criollo), omarp@uaeh.edu.mx (Omar Pedraza)

como la fuerza nuclear fuerte y la fuerza nuclear débil además de la gravitacional y la fuerza electromagnética, han llevado a proponer teorías que consideren la existencia de dimensiones extras espaciales, en la cual estas interacciones se unifiquen. Cabe mencionar que no hay una respuesta definitiva a esta cuestión, sin embargo, la teoría de cuerdas es el mejor candidato para este fin (Becker et al. (2006)).

El estudio de la teoría de cuerdas ha llevado naturalmente a considerar modelos llamados mundos brana (Kim et al. (2004); Ito (2002); Randall and Sundrum (1999)), en ellos se propone que nuestro mundo cuatro dimensional es una hipersuperficie (3+1) ó brana en la cual los campos del Modelo Estándar (hasta la escala de energía donde éste se verifica) están confinados, mientras que la gravedad se propaga en todo el espacio tiempo hiperdimensional. Estos modelos de mundos brana, predicen correcciones al potencial Newtoniano, particularmente en (Ito (2002)) se obtiene un potencial efectivo para un escenario de seis dimensiones, dado por

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} \left(1 + \frac{4L}{3\pi r} \left[1 - \frac{r}{L} \left\{ \sin\left(\frac{r}{L}\right) Ci\left(\frac{r}{L}\right) - \cos\left(\frac{r}{L}\right) Si\left(\frac{r}{L}\right) \right\} \right] \right). \quad (3)$$

donde $Ci(x)$ es la integral coseno y $Si(x)$ es la integral seno y L es el radio de curvatura de anti-de Sitter (AdS_{5+1}). El estudio de este potencial, podría eventualmente darnos algunos indicios directos o indirectos de la existencia de dimensiones extras.

Por lo tanto, englobando algunas ideas expresadas anteriormente, la intención de este trabajo es estudiar el problema de Kepler, considerando que la interacción entre ambos cuerpos es a través del potencial (3), pero en el límite $r \gg L$. El problema de Kepler se estudiaría a través de un análisis cualitativo (teoría geométrica de ecuaciones diferenciales). Este análisis proporciona algunas técnicas y herramientas que permitirán estudiar las propiedades de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales sin resolverlas y en caso de sistemas mecánicos, estas herramientas ayudan a obtener información que permiten entender y analizar la dinámica de dichos sistemas.

El sistema de ecuaciones diferenciales del sistema de dos cuerpos que interactúan a través del potencial gravitacional efectivo (3) pertenecen a una clase especial de sistemas de ecuaciones diferenciales, llamados sistemas Hamiltonianos. Cabe mencionar que el estudio de sistemas Hamiltonianos está directamente relacionado con problemas de mecánica celeste.

Este trabajo, muestra algunas herramientas del análisis cualitativo usadas en sistemas mecánicos conservativos. En la sección 2 se dará una breve introducción a los sistemas Hamiltonianos. En la sección 3 presentamos el problema colineal clásico de Kepler, por completez. El Hamiltoniano del problema clásico de Kepler produce una foliación del espacio fase en curvas invariantes. En esta sección se muestra que a través del campo vectorial, se puede obtener una dirección para estas curvas y utilizando la técnica de la explosión, se puede hacer una caracterización topológica del flujo. La técnica de la explosión no posee una motivación física, más bien es una herramienta matemática que reemplaza la singularidad del campo vectorial debida a colisión, por un objeto ficticio, la variedad de colisión, permitiendo entender el comportamiento de las soluciones cercanas a la singularidad. En la sección 4 se estudian los poten-

ciales que surgen de los mundos brana para el problema de dos cuerpos (problema de Kepler). A través del retrato fase de este problema, se observa que los máximos del potencial equivalen a puntos silla en el retrato fase y los mínimos son identificados con centros. Cabe mencionar que el análisis de la perturbación (3) presentado en este trabajo, solo considera la región donde $r \gg L$. Nuevamente, se usa la técnica de la explosión para realizar una clasificación de las soluciones. Finalmente la sección 5 es dedicada a las conclusiones de este trabajo.

2. Sistemas Hamiltonianos

Un sistema Hamiltoniano (ver (Goldstein and Ferrer (1987)) para más detalle) con un grado de libertad es un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que satisfacen

$$\dot{q} = \partial_p H, \quad (4)$$

$$\dot{p} = -\partial_q H, \quad (5)$$

donde q define la posición y p define el momento de la partícula, a estas cantidades se les llama variables conjugadas y son las variables tradicionales de sistemas Hamiltonianos, y la función $H = H(q, p, t)$ es una función real definida en un abierto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, llamada el Hamiltoniano, con t la variable temporal y el punto representa la derivada respecto a t . El espacio donde viven las variables conjugadas, es el espacio fase. Por otra parte, si $dH/dt = 0$ entonces el Hamiltoniano es una primera integral.

En este trabajo el sistema de ecuaciones que se estudiarán se rigen por la segunda ley de Newton, la cual es descrita por la ecuación diferencial

$$\ddot{m} = f(q, t) \quad q \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

donde m y $q(t)$ corresponden a la masa y la posición de la partícula respectivamente, $f(q, t)$ es una función que representa la fuerza total sobre la partícula. Las fuerzas que rigen a estos sistemas se derivan de una función potencial $U(q, t)$, esto es

$$U(q, t) = - \int_{q_0}^q f(\xi, t) d\xi. \quad (7)$$

Con esta relación la ecuación (6) puede ser escrita de la siguiente forma

$$\dot{q} = \frac{p}{m}, \quad (8)$$

$$\dot{p} = -\partial_q U(q, t). \quad (9)$$

Donde se ha considerado que la derivada de la coordenada q respecto del tiempo, es la velocidad $\dot{q} = v$ y expresando la velocidad en términos del momento ($p = mv$), se tiene que $\dot{q} = p/m$, como se muestra en la ecuación (8). El sistema descrito por (8) y (9) posee una estructura como la descrita por (4) y (5), con un Hamiltoniano dado por

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(q, t). \quad (10)$$

Particularmente para sistemas mecánicos, el Hamiltoniano corresponde a la energía total del sistema h , la cual es la suma de la energía potencial $U(q, t)$ y la energía cinética $T = p^2/2m$, esto es $h = T + U$.

Si el potencial es función únicamente de la posición, entonces el Hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, por lo que el Hamiltoniano es una primera integral, es decir, h es una primera integral, el sistema de ecuaciones (4,5) es llamado autónomo y el sistema Hamiltoniano se dice conservativo.

Dado que $T \geq 0$ y está bien definida para cada valor de h , la región dada por el conjunto $\{q \in \mathbb{R} \mid h \geq U(q)\}$ es la llamada región de Hill. Esta región determina el tipo de movimientos en el espacio de configuraciones y permite clasificar las soluciones en acotadas y no acotadas en la posición, de acuerdo al nivel de energía que se fije. Al subconjunto de la región de Hill donde se satisfaga $h = U(q)$ se le llama conjunto de velocidad cero, debido a que en estos puntos la energía cinética es cero.

Otra de las propiedades de los sistemas Hamiltonianos autónomos es la reversibilidad, es decir si $(q(t), p(t))$ es solución de las ecuaciones (4) y (5) entonces $(q(-t), p(-t))$ también es una solución del mismo sistema. Para sistemas mecánicos autónomos, si $q(t)$ intersecta al conjunto de velocidad cero en dos puntos distintos, entonces $(q(t), p(t))$ es una solución periódica de (4) y (5) por la propiedad de reversibilidad. Mas adelante veremos un ejemplo con esta propiedad.

3. El Problema clásico de Kepler unidimensional

Sean dos cuerpos de masas m_1 y m_2 con posiciones dadas por \vec{r}_1 y \vec{r}_2 que interactúan a través de la ley de la gravitación universal. En una dimensión el Hamiltoniano del sistema es dado por

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} - G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}, \quad (11)$$

donde G es la constante de la gravitación universal. La estructura del potencial sugiere pasar de las variables \vec{r}_1 y \vec{r}_2 a las variables relativa y del centro de masa, definidas como

$$r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|, \quad (12)$$

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (13)$$

De (12) y (13) se sigue que (11) puede escribirse como

$$H = H_R + H_r, \quad H_R = \frac{p_R^2}{2M}, \quad H_r = \frac{p_r^2}{2m} - G \frac{m_1 m_2}{r}, \quad (14)$$

donde p_R es el momento asociado a la coordenada del centro de masa \vec{R} , p_r es el momento asociado a la coordenada relativa \vec{r} , m es la masa reducida y M la masa total. Definimos a m y M de la siguiente forma

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad M = m_1 + m_2. \quad (15)$$

El término H_R de la ecuación (14), puede entenderse como el movimiento de una partícula libre de masa M , cuya posición es R , es decir, el centro de masa se mueve libremente. Este movimiento es irrelevante para nuestros propósitos y basta que pasemos a un sistema de coordenadas en el que el centro de masa está en reposo para que podamos considerar que $H_R = 0$.

El término H_r describe una partícula de masa reducida m , asociado al movimiento relativo de las partículas afectado por el

potencial gravitacional. Bajo estas consideraciones el problema mecánico a estudiar es el siguiente

$$H = \frac{p_r^2}{2m} - G \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (16)$$

Antes de comenzar el análisis, es conveniente tomar un sistema de unidades adecuado en donde todas las constantes que aparecen en el Hamiltoniano (16) tomen el valor de uno. Así, podemos expresar la ec. (16) como

$$H = \frac{p_r^2}{2} - \frac{1}{r}. \quad (17)$$

Renombrando a $q = r$, $p = p_r$, para trabajar con las variables tradicionales de sistemas Hamiltonianos, tenemos que el sistema Hamiltoniano puede ser escrito como

$$\dot{q} = p, \quad (18)$$

$$\dot{p} = -\frac{1}{q^2}. \quad (19)$$

Con Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{q}. \quad (20)$$

En el siguiente apartado analizaremos cualitativamente la dinámica de este sistema Hamiltoniano en una dimensión.

3.1. Retrato fase

De las ecuaciones (18)-(20) se sigue que $dH/dt = 0$, es decir H es constante a lo largo de cualquier curva solución. En general para un sistema Hamiltoniano con un grado de libertad es posible dibujar el retrato fase sin resolver el sistema, simplemente se grafican las curvas de nivel $H = cte$, y las soluciones del sistema Hamiltoniano están en estas curvas de nivel, solo se necesita agregar a esta gráfica las direcciones de las curvas solución a estas curvas de nivel, pero esto es fácil puesto que conocemos el campo vectorial. Notemos también que los puntos de equilibrio del sistema Hamiltoniano aparecen como puntos críticos de H , donde ambas derivadas parciales se anulan. Aplicando lo anterior a la ecuación (20) tomando valores $H = h$ con $h > 0$, $h = 0$, $h < 0$ se puede obtener el gráfico de la Figura 1. Con ayuda de la figura 1 puede hacerse una clasificación topológica de los conjuntos $H^{-1}(h) = I_h$. Ver tabla 1.

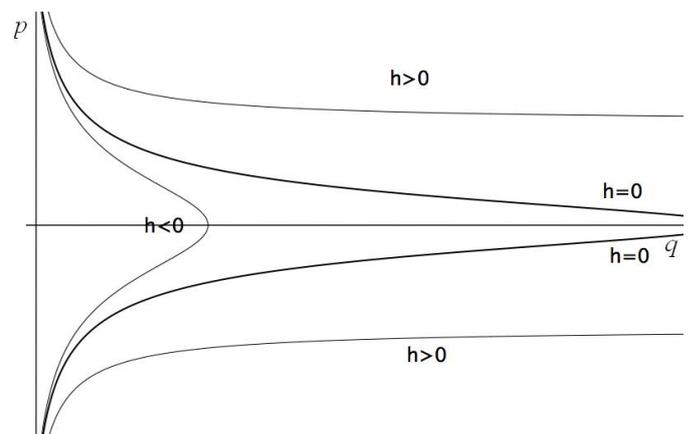


Figura 1: Conjuntos de nivel del Problema de Kepler unidimensional.

Tabla 1: Topología de I_h

I_h	h
\mathbb{R}	< 0
$S^0 \times \mathbb{R}$	$= 0$
$S^0 \times \mathbb{R}$	> 0

Donde $S^0 \times \mathbb{R}$ denota dos copias de \mathbb{R} .

Ahora al graficar el campo vectorial definido por las ecuaciones (18) y (19), es decir $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $F(q, p) = \left(p, -\frac{1}{q^2} \right)$ (ver la figura 2).

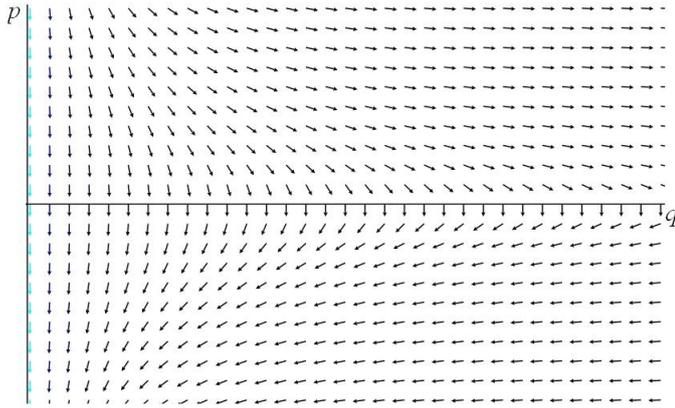


Figura 2: Campo vectorial del Problema de Kepler unidimensional.

Finalmente, en la figura 1 se puede agregar las direcciones dadas por la figura 2, y aplicando técnicas de cálculo para enriquecer el retrato fase, por ejemplo, para un valor dado de energía $h < 0$ vemos que $p = 0$ implica $q = -1/h$. Por otra parte, si ahora se considera $h \geq 0$ se tiene que $p = \pm \sqrt{2h + 2/q}$ y al tomar el límite $q \rightarrow \infty$ se sigue que $p \rightarrow \pm \sqrt{2h}$, como se puede ver en la figura 3.

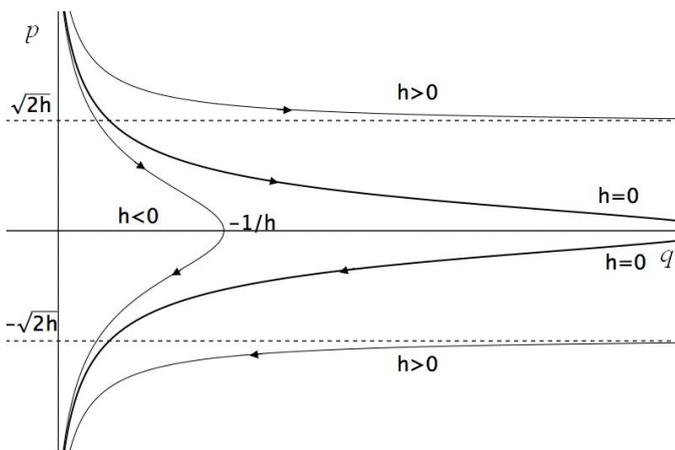


Figura 3: Retrato Fase del Problema de Kepler unidimensional.

3.2. Explosión

El sistema (18)-(20) está definido para $q > 0$, $p \in \mathbb{R}$, y $q = 0$ es un punto singular que corresponde a la colisión entre los dos cuerpos del sistema mecánico. La técnica de la explosión (McGehee (1974)) consiste en un cambio de coordenadas

y una reparametrización del tiempo y permite sustituir la singularidad por una variedad de colisión, el flujo se extiende a lo largo de esta variedad.

El cambio de coordenadas está dado por $y = \sqrt{q} p$. Usando este cambio en la relación de energía (20) se obtiene

$$\frac{y^2}{2} = 1 + hq, \tag{21}$$

la cual ya no presenta la singularidad, y al sustituir en las ecuaciones de movimiento (18) y (19) resulta

$$\dot{q} = \frac{y}{\sqrt{q}}, \tag{22}$$

$$\dot{y} = \frac{1}{q^{3/2}} \left(\frac{y^2}{2} - 1 \right), \tag{23}$$

el campo vectorial definido por el sistema anterior todavía presenta una singularidad, pero tomando la reparametrización del tiempo $\frac{dt}{d\tau} = q^{3/2}$ en estas ecuaciones de movimiento obtenemos

$$q' = yq, \tag{24}$$

$$y' = \frac{y^2}{2} - 1, \tag{25}$$

donde la prima denota derivada respecto del parámetro τ . El sistema ya no es Hamiltoniano, pero ahora está definido en la colisión, sus puntos de equilibrio son $(0, \sqrt{2})$ y $(0, -\sqrt{2})$ y forman la variedad de colisión, el retrato fase se muestra en la figura 4.

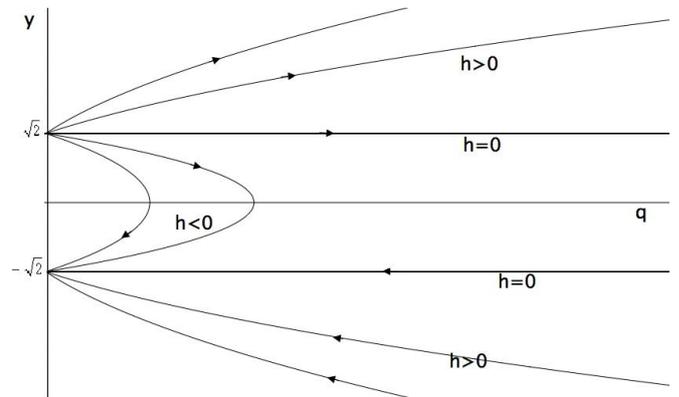


Figura 4: Retrato Fase del Problema de Kepler unidimensional con explosión.

Se puede ahora caracterizar el flujo en el Problema de Kepler unidimensional: para energía $h > 0$ tenemos órbitas de expulsión hiperbólica y de colisión hiperbólica, para energía $h = 0$ tenemos una órbita de expulsión parabólica y una de colisión parabólica, y para energía $h < 0$ tenemos órbitas de expulsión-colisión elíptica.

4. Potencial gravitacional efectivo en RSII

En esta sección se estudia el potencial efectivo gravitacional proveniente de un escenario de mundos brana. Este escenario considera una $(3+n)$ -brana con tensión positiva σ , encajada en un espacio-tiempo $(4+n+1)$ -dimensional, con n dimensiones compactas y una dimensión no compacta. El interés de este modelo radica en que permite localizar a campos escalares, campos de norma y al campo gravitacional. Para un análisis más

profundo en la derivación del potencial efectivo el lector puede ver la referencia (Ito (2002)).

Para el caso de una dimensión compacta $n = 1$, el potencial efectivo gravitacional de interacción entre dos partículas de masas m_1 y m_2 separadas una distancia r puede escribirse como

$$U(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} \left(1 + \frac{4L}{3\pi r} \left[1 - \frac{r}{L} \left\{ \sin\left(\frac{r}{L}\right) Ci\left(\frac{r}{L}\right) - \cos\left(\frac{r}{L}\right) Si\left(\frac{r}{L}\right) \right\} \right] \right), \quad (26)$$

donde $Ci(x)$ es la integral coseno y $Si(x)$ es la integral seno y L es el radio de curvatura de Anti-de Sitter (AdS_{5+n}). En relatividad general, un espacio-tiempo Anti de Sitter, es un espacio con curvatura constante, pero con curvatura negativa, en este caso L es el radio de curvatura del espacio tiempo de 6 dimensiones.

Las integrales $Ci(x)$ y $Si(x)$ están definidas de la siguiente forma:

$$Ci(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos(t)}{t} dt, \quad (27)$$

$$Si(x) = - \int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt. \quad (28)$$

En el límite $r \gg L$, el potencial efectivo gravitacional toma la forma

$$U(r) = -\frac{Gm_1 m_2}{r} - \frac{2Gm_1 m_2 \cos\left(\frac{r}{L}\right)}{r}. \quad (29)$$

Como en el caso anterior, se elije un sistema de coordenadas en el que el centro de masa este en reposo y además se utiliza un sistema de unidades en donde las masas y las constantes L y G tomen el valor de uno. Por tanto, el potencial en una dimensión, puede expresarse de la siguiente forma

$$U(r) = -\frac{1}{r} - \frac{2 \cos r}{r}, \quad (30)$$

mientras que el Hamiltoniano resulta ser

$$H = \frac{p^2}{2} - \frac{1 + 2 \cos r}{r}. \quad (31)$$

Nuevamente se hace $r = q$ para trabajar con las variables tradicionales de sistemas Hamiltonianos, bajo estas consideraciones, el sistema Hamiltoniano de este sistema mecánico puede escribirse como

$$\dot{q} = p, \quad (32)$$

$$\dot{p} = -\frac{1 + 2(q \sin q + \cos q)}{q^2}. \quad (33)$$

Usando la relación de energía $H = T + U$, se tiene

$$H = \frac{p^2}{2} - \frac{1 + 2 \cos q}{q}. \quad (34)$$

Donde $q > 0$ y $y \in \mathbb{R}$.

Como en el caso del problema clásico de Kepler estudiado en la sección 3, a continuación, se mostrará el análisis cualitativo de la dinámica del Hamiltoniano dado por (34).

4.1. Retrato fase

Con el fin de mostrar otra técnica, en esta sección se construye el retrato fase de una manera distinta a la usada anterior, en este caso la idea central es la gráfica del potencial $U(q) = -\frac{1 + 2 \cos q}{q}$. En primera instancia se observa que todos los puntos de equilibrio se encontrarán sobre el eje q del retrato fase y éstos serán puntos críticos del potencial U .

Cada conjunto de nivel es una curva suave alrededor de cada uno de sus puntos que no son puntos de equilibrio, lo cual es consecuencia del teorema de la función implícita (Arnold et al. (2013)). En particular si el valor de energía H no es un valor crítico de la energía potencial, entonces el conjunto de nivel en el que la energía es igual a H es una curva suave. Se sigue entonces que para estudiar la curva nivel de energía, se deben estudiar los valores críticos de H y cerca de ellos. Es importante notar que la energía cinética es no negativa. Ello significa que la energía potencial es menor o igual que la energía total. La energía potencial más pequeña corresponde con la velocidad más grande. Nótese también que los puntos de máximos locales del potencial son inestables y corresponden a sillas en el retrato fase, mientras que los puntos mínimos son posiciones de equilibrio estables y corresponden con centros.

Los puntos de equilibrio se obtienen igualando a cero el lado derecho de las ecuaciones (32) y (33), es decir, $p = 0$ y tenemos la siguiente ecuación trigonométrica

$$1 + 2(q \sin q + \cos q) = 0, \quad (35)$$

la ecuación anterior es no trivial y posee una cantidad infinita numerable de soluciones que no pueden ser obtenidas de manera exacta, se requiere, por tanto, una aproximación numérica. Utilizamos entonces un comando de Mathematica para aproximar algunas soluciones.

Para cada raíz se obtiene el valor de energía correspondiente h resolviendo la ecuación $h = -\frac{1 + 2 \cos q}{q}$ (en la tabla 2 se muestran los resultados).

Tabla 2: Puntos de equilibrio y valores de energía

q	h
2.97744	0.326829208871084
6.03724	-0.4869468834472162
9.37155	0.10640368488191891
12.4461	-0.2398785488882871
15.6761	0.06372661682753396
18.7697	-0.159492502271492
21.9684	0.045496373183582885
25.073	-0.11950831759077901
28.2566	0.035378832473129174
31.3681	-0.09556565614234719

Ordenando los valores de energía siguiendo el siguiente criterio, la energía positiva más grande es denotada con h_1^+ , la que sigue en orden decreciente con h_2^+ y así sucesivamente. Para la energía cero usamos simplemente h_0 . La energía negativa más pequeña la denotamos con h_1^- , la que le sigue en orden creciente con h_2^- y así sucesivamente. De este modo se obtienen los resultados mostrados en la tabla 3.

Tabla 3: Valores de energía ordenados

Energía	Valores
h_1^+	0.326829208871084
h_2^+	0.10640368488191891
h_3^+	0.06372661682753396
h_4^+	0.045496373183582885
h_5^+	0.035378832473129174
...	...
h_0	0
...	...
h_5^-	-0.09556565614234719
h_4^-	-0.11950831759077901
h_3^-	-0.159492502271492
h_2^-	-0.2398785488882871
h_1^-	-0.4869468834472162

Con estos valores, se puede construir ahora el retrato fase, con el fin de hacer explícita esta construcción, se efectuará en cinco pasos. Los cuales se muestran en los siguientes párrafos.

1. Retrato fase para energía alrededor del valor crítico

$$h = h_1^+$$

En este caso tenemos un punto crítico del potencial que corresponde con un máximo que se obtiene en el valor de energía $h = h_1^+$ y se traduce con un punto silla en el retrato fase, a este valor de energía le corresponden cinco órbitas: dos que llegan al punto de equilibrio y dos que salen de él, más el punto de equilibrio. Para valores mayores de energía $h > h_1^+$, como se muestra en la figura 5, se tiene dos órbitas (en azul) con un comportamiento limite tipo Kepler, es decir, si $q \rightarrow \infty$, $p \rightarrow \pm\sqrt{2h}$ y $q \rightarrow 0^+$, $p \rightarrow \pm\infty$. Para el valor de energía entre los dos primeros puntos críticos $h_1^+ > h > h_2^+$ tenemos dos órbitas (en café), una tipo Kepler con energía negativa y la otra que indica que las dos partículas se acercan hasta una distancia y luego se alejan con una velocidad limite $\sqrt{2h}$. En este caso la región de Hill está formada por la unión de dos intervalos, uno acotado y el otro no acotado $(0, a_0] \cup [a_1, \infty)$.

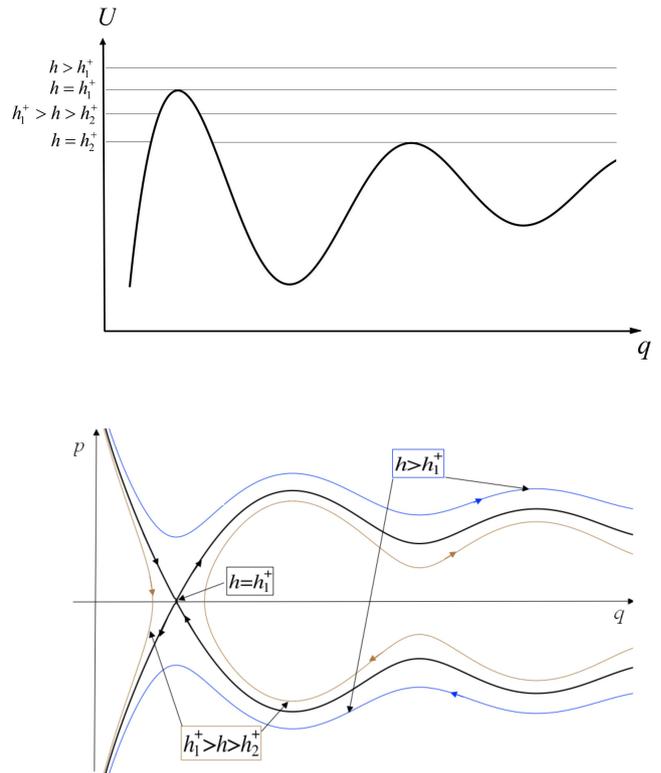


Figura 5: Retrato fase del primer valor crítico de energía positiva $h = h_1^+$.

2. Retrato fase para energía alrededor del valor crítico

$$h = h_2^+$$

En este caso tenemos nuevamente un punto crítico del potencial que corresponde con un máximo que se obtiene en el valor de energía $h = h_2^+$ y se traduce con un punto silla en el retrato fase, como se aprecia en la figura 6, a este valor de energía le corresponden cuatro órbitas: una órbita homoclínica, una que sale del punto de equilibrio, una que entra al punto de equilibrio, más el punto de equilibrio, para valores mayores de energía $h_1^+ > h > h_2^+$ (en café) está hecho en el caso anterior y en este solo se incluye por claridad. Para el valor de energía entre los dos puntos críticos $h_2^+ > h > h_3^+$ se tiene tres órbitas (en verde), una tipo Kepler con energía negativa, una órbita periódica y una tercer órbita que corresponde al movimiento en que las dos partículas se acercan hasta una distancia y luego se alejan con una velocidad limite $\sqrt{2h}$. En este caso la región de Hill está formada por la unión de tres intervalos, dos de ellos acotados y uno no acotado $(0, a_0] \cup [a_1, a_2] \cup [a_3, \infty)$. Este comportamiento continua de manera sucesiva para h_3^+, h_4^+, \dots

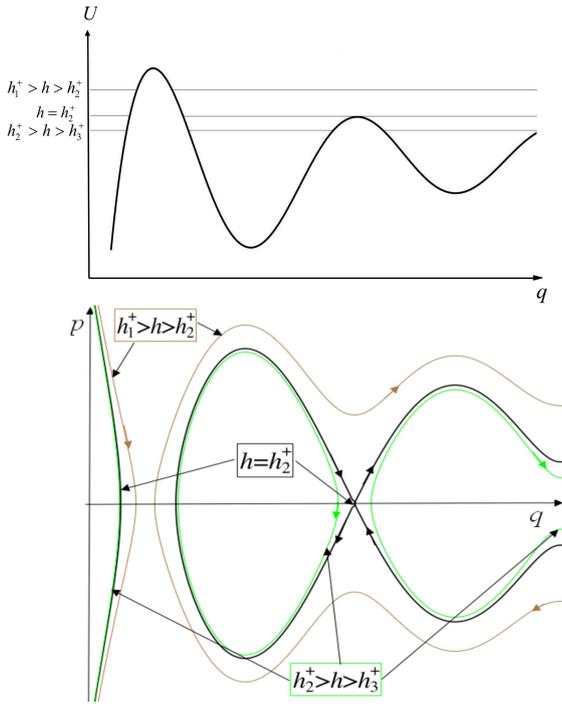


Figura 6: Retrato fase del segundo valor crítico de energía positiva $h = h_2^+$.

Este comportamiento continua de manera sucesiva.

3. Retrato fase para energía cero $h = h_0$

En este caso, no se tiene puntos críticos como se muestra en la figura 7, además cuenta con una órbita tipo Kepler con energía negativa y con una cantidad infinita numerable de órbitas periódicas. En este caso la región de Hill está formada por la unión numerable de intervalos acotados $(0, a_0] \cup [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4] \cup \dots$

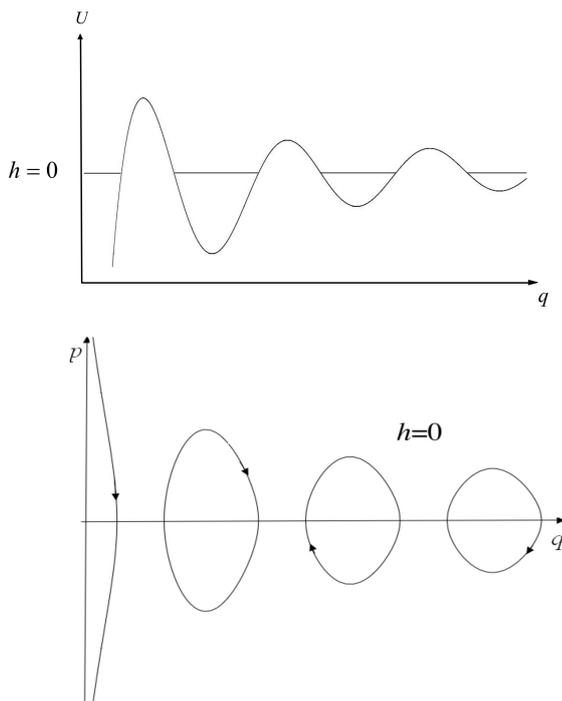


Figura 7: Retrato fase de energía cero.

4. Retrato fase para energía alrededor del valor crítico $h = h_1^-$

$$h = h_1^-$$

De la figura 8 se puede apreciar solo un punto crítico del potencial que corresponde con un mínimo que se obtiene en el valor de energía $h = h_1^-$ y se traduce con un centro en el retrato fase, es decir, a este valor de energía le corresponden dos órbitas: una tipo Kepler con energía negativa y el punto de equilibrio, para valores menores de energía $h < h_1^-$ (en morado) solo se tienen órbitas tipo Kepler con energía negativa. Para valores de energía entre los dos puntos críticos $h_1^- < h < h_2^-$ se tienen dos órbitas (en rojo), una tipo Kepler con energía negativa y una órbita periódica. En este caso la región de Hill está formada por la unión de dos intervalos acotados $(0, a_0] \cup [a_1, a_2]$.

5. Retrato fase para energía alrededor del valor crítico $h = h_2^-$

$$h = h_2^-$$

Para este valor de energía $h = h_2^-$ y como se puede apreciar en la figura 9, solo hay un punto crítico del potencial que corresponde con un mínimo que se obtiene en el valor de energía $h = h_2^-$ y se traduce con un centro en el retrato fase, es decir, a este valor de energía le corresponden tres órbitas: una tipo Kepler con energía negativa, una órbita periódica y el punto de equilibrio, para valores menores de energía $h_1^- < h < h_2^-$ (en rojo) esta descrito en el caso anterior y se incluye por claridad. Para valores de energía entre los dos puntos críticos $h_2^- < h < h_3^-$ existen tres órbitas (en anaranjado), una tipo Kepler con energía negativa y dos órbitas periódicas. En este caso la región de Hill está formada por la unión de tres intervalos acotados $(0, a_0] \cup [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4]$.

Si se colocan de manera conjunta todos estos retratos fase, se puede construir el retrato fase global. El cual se muestra en la figura 10.

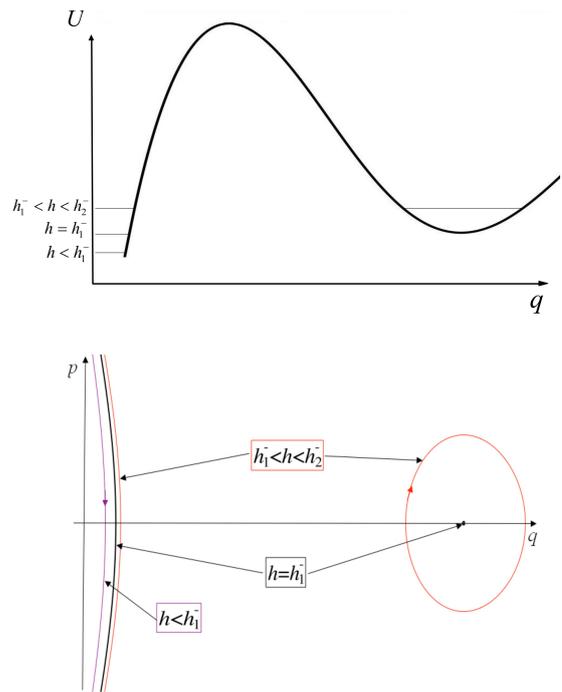


Figura 8: Retrato fase del primer valor crítico de energía negativa $h = h_1^-$.

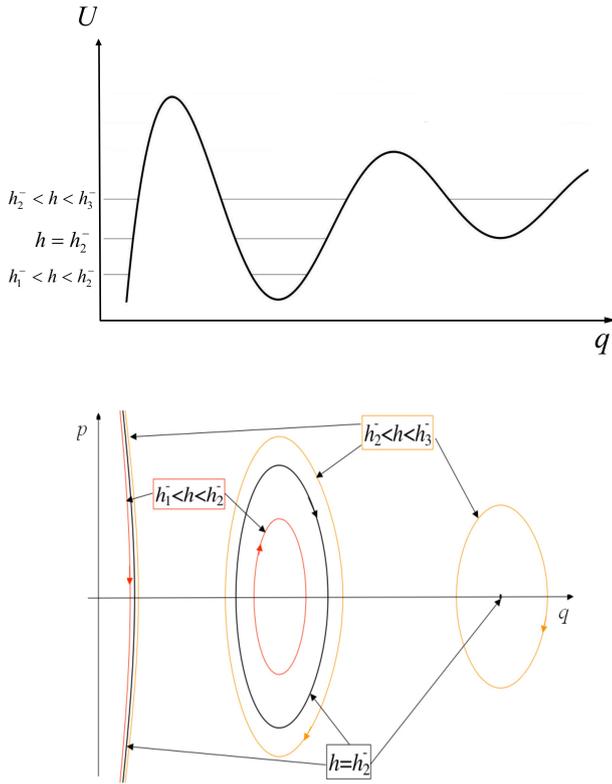


Figura 9: Retrato fase del segundo valor crítico de energía negativa $h = h_2^-$.

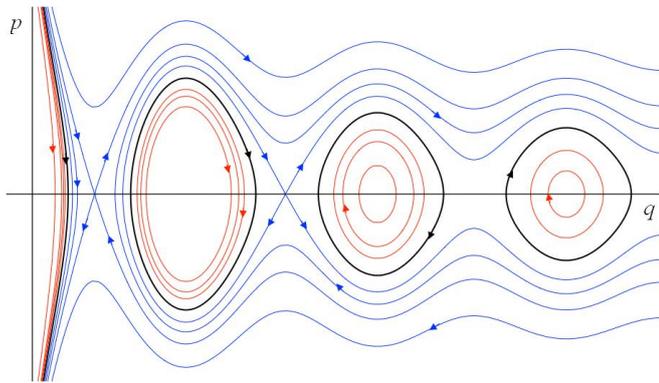


Figura 10: Retrato fase global.

4.2. Explosión

Para seguir con el análisis, ahora se aplica la técnica de la explosión al sistema de ecuaciones (32), (33) y (34), esto permitirá hacer la caracterización del flujo. Como el campo vectorial tiene una singularidad en el origen. El primer paso es introducir el cambio de variable $v = \sqrt{q} p$ en el Hamiltoniano (34), obteniendo

$$hq = \frac{v^2}{2} - 1 - 2 \cos q. \quad (36)$$

Ahora aplicamos el mismo cambio en las ecuaciones de movimiento (32) y (33), y se tiene que

$$\dot{q} = \frac{v}{\sqrt{q}} \quad (37)$$

$$\dot{v} = \frac{1}{q^{3/2}} \left(\frac{v^2}{2} - 1 - 2(q \sin q + \cos q) \right). \quad (38)$$

Este sistema continua con la singularidad, por lo que aplicando la reparametrización del tiempo $\frac{dt}{d\tau} = q^{3/2}$, el sistema anterior puede escribirse como

$$q' = vq \quad (39)$$

$$v' = \frac{v^2}{2} - 1 - 2(q \sin q + \cos q). \quad (40)$$

Este sistema tiene los puntos de equilibrio $(0, \sqrt{6})$, $(0, -\sqrt{6})$, $(q_0, 0)$, donde q_0 son las raíces de la ecuación $1 + 2(q \sin q + \cos q) = 0$, es decir, se preservaron los puntos de equilibrio del sistema original y ahora se han agregado los dos puntos correspondientes a la variedad de colisión. El retrato fase para este sistema se muestra en la figura 11.

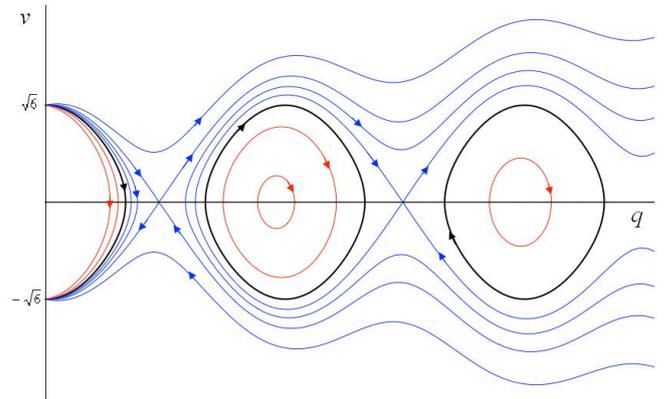


Figura 11: Retrato fase global con explosión.

Clasificación de las soluciones

En el análisis realizado anteriormente se ha mostrado que dependiendo el valor de la energía, se puede definir el tipo de órbita que describa el sistema de dos cuerpos. Aquí se realiza un pequeño resumen de esto:

Para energía $h > h_1^+$ se tienen dos órbitas: una de expulsión hiperbólica y una de colisión hiperbólica.

Para energía $h = h_1^+$ existen cinco órbitas: un punto de equilibrio inestable (punto silla), una órbita de expulsión que tiende al punto de equilibrio y una de colisión que sale del punto de equilibrio (heteroclínicas), dos órbitas hiperbólicas: una que sale del punto de equilibrio y una que entra al punto de equilibrio.

Para energía $h_1^+ > h > h_2^+$ aparecen dos órbitas: una de expulsión-colisión hiperbólica y la otra que se acerca al punto de equilibrio con velocidades límite $\pm \sqrt{2h}$ con $q \rightarrow \infty$.

Para energía $h = h_2^+$ se cuenta con cinco órbitas: una de expulsión-colisión, un punto de equilibrio inestable (punto silla), una órbita homoclínica y dos órbitas hiperbólicas, una que sale del punto de equilibrio y otra que entra a él. Repitiéndose este patrón sucesivamente.

Para energía $h = 0$ solo hay una órbita de expulsión-colisión y una cantidad infinita numerable de órbitas periódicas.

Para energía $h < h_1^-$ solo se tiene una órbita de expulsión-colisión elíptica.

Para energía $h = h_1^-$ se hallan dos órbitas: una de expulsión-colisión elíptica y un punto de equilibrio estable (centro).

Para energía $h_1^- < h < h_2^-$ se encuentran dos órbitas: una de expulsión-colisión elíptica y una órbita periódica.

Para energía $h = h_2^-$ se tienen tres órbitas: una de expulsión-colisión elíptica, una órbita periódica y un punto de equilibrio estable (centro).

Repitiéndose este patrón sucesivamente.

5. Conclusiones

En este trabajo, se estudió cualitativamente el problema de Kepler considerando un potencial modificado, el cual proviene de teorías de mundos brana. También por completos se analizó el problema de Kepler clásico.

En el análisis realizado en este trabajo se mostraron las órbitas permitidas, a través de los retratos fase y de la explosión. Ambas técnicas permiten hacer una clasificación de las órbitas, las cuales se muestran de forma resumida al final de la sección 4.

La construcción del retrato fase se realizó de forma explícita, para cinco valores de energía, donde también se mostró la gráfica del potencial para un análisis más detallado de los puntos críticos.

Parte del trabajo consiste en explicar las técnicas usadas en el análisis cualitativo del problema de dos cuerpos, las cuales permiten entender este sistema mecánico. Sin embargo, será bueno enfatizar de forma breve estas técnicas:

1. **La explosión:** Consiste en reemplazar la singularidad debida a colisión doble de las ecuaciones de movimiento, por una variedad que resulta invariante por el flujo, mediante un cambio de coordenadas y una reparametrización del tiempo, de este modo se logra clasificar las órbitas.
2. **Retrato fase:** Esta técnica se usa en sistemas Hamiltonianos con un grado de libertad donde el Hamiltoniano no cuenta con una separación explícita de la energía potencial y cinética, es decir, existen términos en el Hamiltoniano que involucran productos de posiciones y velocidades. Particularmente cuando se tiene un sistema mecánico donde la energía total (el Hamiltoniano) se puede expresar como una suma de las energías potencial y cinética, entonces se puede construir el retrato fase a partir del análisis de la función potencial y sus puntos críticos.
3. **La Región de Hill:** Es un auxiliar en el análisis cualitativo de un sistema Hamiltoniano, a partir de la ecuación $H = T + U$ que tiene como consecuencia que para un valor de energía fijo $h - U = T \geq 0$ proporciona la desigualdad $h - U \geq 0$, que puede considerarse como una

desigualdad en las posiciones y cuya solución proporciona las regiones de movimientos permitidos.

4. **Foliación del espacio fase por conjuntos invariantes y su clasificación topológica:** En sistemas Hamiltonianos las integrales primeras producen una foliación del espacio fase en conjuntos invariantes por el flujo. La clasificación topológica de estos conjuntos es una línea de investigación actual, siendo la parte medular de esta teoría el teorema de Liouville-Arnold [12].

Finalmente, cabe mencionar que el Problema de Kepler unidimensional expuesto en este trabajo no ha sido considerado en los libros tradicionales de mecánica clásica, por lo que proporciona un ejemplo complementario que se puede abordar en el aula de clases. Además, da pie a motivar el estudio de este problema en el plano o en el espacio, con más integrales primeras, como puede ser el momento angular o la integral de Jacobi, o bien otras perturbaciones.

Referencias

- Arnold, V., Vogtmann, K., Weinstein, A., 2013. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York.
URL: <https://books.google.com.mx/books?id=UOQ1BQAAQBAJ>
- Becker, K., Becker, M., Schwarz, J., 2006. *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction*. Cambridge University Press.
URL: <https://books.google.com.mx/books?id=WgUkSTJWQacC>
- Goldstein, H., Ferrer, J., 1987. *Mecánica clásica*. Reverté.
URL: <https://books.google.com.mx/books?id=vf2JiybeDc4C>
- Gutzwiller, M. C., 1973. The anisotropic kepler problem in two dimensions. *Journal of Mathematical Physics* 14 (1), 139–152.
URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.1666164>
DOI: 10.1063/1.1666164
- Ito, M., 2002. Newton's law in brane worlds with an infinite extra dimension. *Phys. Lett. B* 528, 269–273.
DOI: 10.1016/S0370-2693(02)01228-5
- Kim, Y.-b., Lee, C. O., Lee, I.-b., Lee, J.-J., 2004. Brane world of warp geometry: An Introductory review. *J. Korean Astron. Soc.* 37, 1–14.
DOI: 10.5303/JKAS.2004.37.1.001
- Manev, G., 1924. La gravitation et le principe de l' galit de l'action et de la r action. *Comp. Rend.* 178, 2159–2161.
URL: <https://ci.nii.ac.jp/naid/10016688855/en/>
- McGehee, R., Sep 1974. Triple collision in the collinear three-body problem. *Inventiones mathematicae* 27 (3), 191–227.
URL: <https://doi.org/10.1007/BF01390175>
DOI: 10.1007/BF01390175
- Randall, L., Sundrum, R., 1999. An Alternative to compactification. *Phys. Rev. Lett.* 83, 4690–4693.
DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.4690
- Roy, A., 1988. *Orbital Motion*, 3rd Edition. Taylor & Francis.
URL: <https://books.google.com.mx/books?id=yLGqnQAACAAJ>