

Sintonización de una ley de control difuso proporcional retardado para estabilizar una clase de sistemas no lineales

J. A. Ortega Melo, R. Villafuerte*

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Centro de Investigación en Tecnologías de Información y Sistemas

Pachuca, Hidalgo C.P. 42000, Email: jose_beto77@hotmail.com, villafuerte@uaeh.edu.mx

Resumen

En la presente memoria se propone un método para sintonizar una ley de control difusa proporcional retardada (PR) para estabilizar una clase de sistemas no lineales. La estabilidad del sistema no lineal se garantiza mediante la σ -estabilidad de su modelo difusos del tipo Takagi-Sugeno (T-S) en lazo cerrado con una ley de control difusa PR. La sintonización de la ley de control difusa PR se realiza en el marco frecuencial empleando el método D-particiones. Sin pérdida de generalidad, los resultados teóricos obtenidos son ilustrados en un sistema carro-péndulo. El desempeño del control propuesto aquí es comparado con una clásica compensación paralela distribuida.

Palabras clave: Sistemas no lineales, sistemas difusos, sistemas con retardos,

*Autor para Correspondencia : R. Villafuerte, email: villafuerte@uaeh.edu.mx

control difuso PR.

Abstract

In this paper, a method to tune a fuzzy proportional retarded (PR) control law for stabilizing a class of nonlinear systems is proposed. The stability of the nonlinear system is guaranteed through the σ – stability of its Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy model with feedback fuzzy PR controller. The tuning of the fuzzy PR control law has been addressed in the frequency framework using D-partition method. Without loss of generality, the obtained theoretical results are exemplified on a car-pendulum system. The performance of the control proposed here is compared with a classical parallel distributed compensation (PDC).

Keywords: Nonlinear Systems, fuzzy systems, delay systems, PR fuzzy control.

1. INTRODUCCIÓN

En el mundo real los sistemas suelen ser inherentemente no lineales, desafortunadamente la mayoría de los controladores lineales pueden sólo manipular a esta clase de sistemas cerca de su punto de operación, por lo que resulta razonable diseñar controladores no lineales (Slotine and Li, 1991) para aumentar su rango de operación. Sin embargo, el diseño de este tipo

de controles es más complejo y requiere de un esfuerzo mayor. Los modelos difusos del tipo T-S son una alternativa a este problema, debido a que éstos permiten controlar sistemas no lineales lejos de su punto de operación empleando técnicas de control lineal.

Los modelos T-S (S. N. Sivanandam and Deepa, 2007), también conocidos como modelos Sugeno, fueron propuestos por Takagi, Sugeno y Kang, en un esfuerzo para formalizar un enfoque sistemático para generar reglas difusas a partir de un conjunto de datos de entrada y salida. Este modelado consiste en representar las dinámicas locales de un sistema no lineal mediante subsistemas lineales, lo que conduce a la posibilidad de usar algunos métodos de control lineal, tal como el controlador proporcional derivativo (PD).

En la literatura, existe un gran cantidad de temas disponibles sobre la sintonización de controladores PD, entre los más conocidos se encuentran las fórmulas propuestas por Ziegler-Nichols (Ziegler and Nichols, 1942), en las cuales se propone un algoritmo de naturaleza experimental. Algunos refinamientos heurísticos de estas fórmulas se dan en (Hang et al., 1991), para mejorar el desempeño de la autosintonización.

El control PD tiene muchos usos tales como el seguimiento de trayectoria (Lin et al., 2009), el controlar la posición de un servo de CD mediante un PD

autosintonizado (Simhachalam et al., 2012). Como variante al clásico PD, está el PD difuso, el cual se usa para controlar un servo sistemas electrohidráulicos sujetos a fricción no lineal (Huang et al., 2007), la estabilización de la plataforma de un barco (Leghmizi and Liu, 2012), entre otras.

Aunque el control PD es relativamente simple, éste necesita la medición de la posición y de la velocidad del sistema de salida, para un sistema de una entrada una salida (SISO). La acción derivativa usualmente se obtiene mediante instrumentos de medición que suelen ser ruidosos o mediante algún algoritmo de aproximación como un observador, el cual hace que se incremente tanto el costo como la dificultad de diseño para controlar el sistema. Alternativamente, en (Berghuis and Nijmeijer, 1993) se presenta una solución para el problema de regulación de robots rígidos basados en la disponibilidad de las mediciones únicamente de las juntas. En (Kelly et al., 1994) se propone el empleo de un filtro pasa altas. En (Nicosia and Tomei, 1994) se desarrolla un controlador basado en la realimentación de las dinámicas de salida semi-global, el cual garantiza un seguimiento asintótico de cualquier trayectoria acotada, todo esto con el fin de evitar el uso de tacómetros, filtros pasa altas o algoritmos para aproximar la derivada.

Los resultados mencionados anteriormente son algunas alternativas que

se pueden emplear cuando sólo se cuenta con la medición de la posición o cuando la velocidad no puede ser obtenida tan fácilmente. Un enfoque diferente es emplear un controlador proporcional retardado. Una ley de control PR, no es un tópico nuevo ya que éste se ha estudiado desde hace muchos años en (Suh and Bien, 1980), (Suh and Bien, 1979), (Swisher and Tenqchen, 1988), y recientemente en (Villafuerte et al., 2013). En estas últimas citas se muestra cómo la acción del PR puede mejorar el desempeño de la planta en comparación con el efecto producido por la acción PD. El uso del PR evita estimaciones, tacómetros, filtro pasa altas o el uso de alguna técnica diferente a las ya mencionadas que introduzca ruido, incertidumbres, entre otras cosas, además de que para la implementación de un controlador PR sólo se necesitan algunos cuantos registros de memoria y es relativamente sencillo de programar.

Típicamente, se considera que un retardo únicamente induce inestabilidad o un mal desempeño en un sistema, pero en (Cooke and Grossman, 1982) y (Abdallah et al., 1993) se proponen algunos criterios bajo los cuales un retardo puede ayudar al sistema en este sentido. La inclusión de un control PR transforma el estudio del polinomio característico de un sistema a el estudio de un cuasipolinomio. En (Wang and Hu, 2008) y (M. Dellnitz and

Zheng, 2002) se muestran algunos métodos numéricos para la obtención de las raíces de un cuasipolinomio. La sintonización propuesta en (Villafuerte et al., 2013) garantiza la estabilidad del sistema en lazo cerrado con la ley de control PR mediante la asignación de polos del cuasipolinomio. La locación de las raíces dominantes en el plano complejo determinan la σ -estabilidad del sistema en lazo cerrado.

Una limitante de las leyes de control PR es que sólo se pueden aplicar a sistemas lineales y/o a sistemas con una parte nominal lineal, sin embargo el empleo de las técnicas de los modelos difusos del tipo T-S coadyuvan a que esté tipo de controladores se puedan aplicar a una clase de sistemas no lineales.

Una ley de control PR aplicada a un sistemas difuso T-S origina un sistema difuso con retardo. Existen algunos resultados acerca de sistemas difusos con retardos, por ejemplo en (Zhao et al., 2009) se da un enfoque para resolver el problema de estabilidad y estabilización para sistemas difusos dependientes del retardo, por otro lado en (Cao and Frank, 2000) se muestran ciertas condiciones de estabilidad usando el enfoque de Lyapunov-Krasovskii. Otros resultados relevantes sobre sistemas difusos con retardos en la entrada, se dan en (Chiang, 2006) y (Zhao and Gao, 2012), en el primero se emplea

un controlador descentralizado robusto basado en el modelo difuso y en el otro los resultados se formulan en forma de desigualdades lineales matriciales (LMI's), las cuales suelen ser conservativas.

En la presente memoria se aplican los resultados propuestos en (Villafuerte et al., 2013) para sintonizar una ley de control difusa PR para σ -estabilizar un sistemas difusos del tipo T-S. La σ -estabilidad del sistema T-S garantiza la estabilidad de su precedente sistema no lineal. La sintonización del controlador difuso PR se realiza dentro de marco frecuencial empleando el método D-particiones. El desempeño de este control se compara con un control difuso PD, mejor conocido como compensación paralela distribuida.

Este escrito se organiza de la siguiente forma. La descripción del sistema y los resultados preliminares se presentan en la Sección 2. En la Sección 3 se postulan algunos resultados para el diseño y la sintonización del controlador difuso PR. Continuando así, en la Sección 4, con la ilustración de los resultados propuestos en la sección anterior. Finalmente, en la Sección 5, se dan algunos comentarios.

2. RESULTADOS PRELIMINARES

En esta sección se presentan algunos resultados teóricos referentes a sistemas difusos T-S y a sistemas con retardos.

2.1. *Sistemas difusos Takagi-Sugeno (T-S).*

Consideramos el sistema con dinámica de una entrada una salida (SISO) de n -ésimo orden con $n \geq 2$ de la forma siguiente

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \\ y(t) = g(x(t), u(t)), \end{cases} \quad (1)$$

donde, $x(t) = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u(t) \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $y(t) \in \mathbb{R}$ es la salida del sistema, $f(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $g(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas.

Posteriormente, se continúa con la fusificación y los métodos de razonamiento difuso sugeridos por Takagi y Sugeno para obtener un modelo difuso del sistema (1). El modelo difuso T-S se describe a través de reglas difusas del tipo Si-Entonces, las cuales representan las relaciones locales lineales entrada-salida de un sistema no lineal. La característica principal de los modelos difusos T-S es expresar las dinámicas locales de cada implicación difusa (regla) por un modelo lineal. De esta manera el modelo difuso completo se

alcanza mediante una mezcla de los modelos de sistemas lineales (Tanaka and Wang, 2001). La i -ésima regla del modelo difuso es de la forma siguiente

Regla modelo i :

SI $z_1(t)$ está en M_{i1} y \dots , y $z_p(t)$ está en M_{ip} ,

$$\mathbf{ENTONCES} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t). \end{cases}$$

Aquí, M_{ij} , $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, p$ es el conjunto difuso y r es el número de reglas; $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entrada, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de salida, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$; $z_1(t), \dots, z_p(t) \in \mathbb{R}$ son variables premisas conocidas, que pueden estar en funciones de las variables de estado, perturbaciones externas, y/o del tiempo. $\mathbf{z}(t)$ se usa para describir al vector que contiene todos los elementos individuales $z_1(t), \dots, z_p(t)$. Dado un par $(x(t), u(t))$. Así, el sistema difuso correspondiente al sistema no lineal (1) se infiere como sigue

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}, \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t), \end{cases} \quad (2)$$

donde $z(t) = [z_1(t) \cdots z_p(t)]^T$, $w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t))$ y $h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$, para toda t . El término $M_{ij}(z_j(t))$ es el grado de membresía $z_j(t)$ en M_{ij} . Ya

que $\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0$, $w_i(z(t)) \geq 0$ tenemos $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$, $h_i(z(t)) \geq 0$.

Bajo el enfoque de diseño de control para los sistemas difusos T-S uno de los procesos más conocidos es la compensación paralela distribuida (PDC).

En el diseño con la PDC, cada regla de control se diseña a partir de la regla modelo de un sistema difuso T-S. El controlador difuso diseñado comparte los mismos conjuntos difusos con el modelo difuso en la parte de las premisas (Tanaka and Wang, 2001). Así, el controlador difuso mediante PDC es

Regla Control i:

SI $z_1(t)$ está en M_{i1} y ... y $z_p(t)$ está en M_{ip} ,

ENTONCES $u(t) = -F_i x(t)$

con $F_i^T = [f_{i1}, \dots, f_{in}]^T \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, r$. Las reglas difusas anteriores infieren un controlador lineal de la forma

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i x(t). \quad (3)$$

El enfoque PDC da un procedimiento simple y natural para determinar las ganancias de retroalimentación local F_i . Estas ganancias y la estabilidad se determinan con el resultado siguiente.

Teorema 2.1. *(Tanaka and Wang, 2001) El equilibrio de un sistema de control difuso continuo descrito por (2) es globalmente estable asintóticamente*

si existe una matriz definida positiva común P tal que

$$\begin{aligned} G_{ii}^T P + P G_{ii} &< 0, \\ \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) &\leq 0, \\ i < j \text{ s.t. } h_i \cap h_j &\neq \emptyset, \end{aligned}$$

donde $G_{ij} = A_i - B_i F_j$.

2.2. Sistemas con retardos

Considere el sistema lineal invariante en el tiempo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau); \\ x(\theta) = \psi(\theta); \quad \theta \in [-h, 0], \end{cases} \quad (4)$$

donde $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices constantes, $\tau \in \mathbb{R}^+$ es un retardo y $\psi \in \mathfrak{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ es la condición inicial del sistema (4), donde $\mathfrak{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ es el espacio de Banach de las funciones reales y continuas definidas en el intervalo $[-\tau, 0]$ con norma

$$\|\psi\|_\tau := \max_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\psi(\theta)\|.$$

Aquí $\|\cdot\|$ denota la norma en el espacio Euclidiano \mathbb{R}^n . Para cada condición inicial $\psi \in \mathfrak{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ y $t \geq 0$ existe una única solución o trayectoria

$x(t; \psi)$ del sistema (4), que satisface la condición inicial

$$x(\theta; \psi) = \psi(\theta); \quad \theta \in [-\tau, 0].$$

Como extensión natural de la condición inicial, para cada $t \geq 0$ el segmento

$$x_t(\psi) := x(t + \theta; \psi); \quad \theta \in [-\tau, 0],$$

es llamado estado del sistema (4).

En la mayoría de los casos, al denotar la trayectoria o el estado de un sistema se omite la escritura de la condición inicial ψ . Sólo se hace mención cuando las razones lo ameriten. Por ejemplo, cuando es necesario diferenciar las soluciones de un sistema con respecto a su condición inicial.

En (Hale and Verduyn, 1993) se demuestra que para cada condición inicial ψ la existencia y unicidad de las soluciones del sistema (4) están garantizadas.

Definición 2.1. Sea σ una constante positiva dada. Se dice que el sistema (4) es σ -estable si todos las raíces de su cuasipolinomio característico tiene parte real menor o igual a $-\sigma$. es decir,

$$\alpha_0 \leq -\sigma, \quad \sigma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\},$$

donde $\alpha_0 = \max_{j=1, \dots, \infty} \{ \operatorname{Re}\{s_j\} : p(s_j) = 0; s_j \in \mathbb{C} \}$, $p(s_j) = \det(sI_n -$

$A_0 - A_1 e^{-s\tau}$) es el cuasipolinomio característico de (4), $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad.

2.3. Sintonización de un controlador PR

Algunos resultados previos dados en (Villafuerte et al., 2013) son necesarios para el desarrollo de este trabajo. Considere un sistema de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \nu^2 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -b \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = x_1, \end{cases} \quad (5)$$

donde, $x(t) = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ es el vector de estado, $u(t) \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $y(t) \in \mathbb{R}$ es la salida del sistema, $\nu > 0$ es el factor de amortiguamiento y $b > 0$ es la ganancia de entrada. Además la ley de control PR esta dada por

$$u(t) = -k_p x_1(t) + k_r x_1(t - \tau), \quad (6)$$

donde $k_p, k_r \in \mathbb{R}$ y $\tau > 0$ son la ganancia proporcional; la ganancia retardada y el retardo respectivamente. Una manera de sintonizar el PR como se ha visto en (Villafuerte et al., 2013) es mediante las gráficas de estabilidad para sistemas de segundo orden con retardo. Esas gráficas se obtienen con la ayuda

de algunas ecuaciones paramétricas para k_r , τ y para diferentes valores de σ . Aquí el siguiente resultado se propone para sintonizar los parámetro de control (6) tal que σ -estabiliza al sistema (5).

Lema 2.2. (Villafuerte et al., 2013) Sea $k_p < -\frac{\nu^2}{b}$ la ganancia proporcional del controlador dada. El sistema en lazo cerrado (5, 6) tiene tres raíces reales dominantes sobre la abscisa $-\sigma^*$, donde el máximo alcanzable es

$$\sigma^* = \sqrt{-\nu^2 - bK_p}, \quad (7)$$

Por otra parte, los valores de la ganancia retardada k_r^* y el retardo τ^* que σ -estabiliza el sistema (5, 6) con un decaimiento exponencial máximo alcanzable σ^* son

$$\tau^* = \frac{1}{\sqrt{-\nu^2 - bK_p}}, \quad (8)$$

$$k_r^* = \frac{-2\sigma^*}{\tau^* b e^{\sigma^* \tau^*}}. \quad (9)$$

Una manera alternativa para sintonizar la asignación de las tres raíces reales dominantes es cuando cierta σ -estabilidad se requiere. Así, a partir de una σ establecida, las ganancias k_p , k_r y τ se obtienen.

Lema 2.3. (Villafuerte et al., 2013) Sea $\sigma > 0$. Entonces, las ganancias de la ley de control (6) que σ -estabiliza el sistema (5) con las raíces reales triples

dominantes en σ están dadas por

$$\bar{k}_p = \frac{-\sigma^2 - \nu^2}{b}, \quad \bar{k}_r = \frac{-2\sigma^2}{be}, \quad \bar{\tau} = \frac{1}{\sigma}.$$

Aunque, el empleo de una ley de control PR es interesante, ésta sólo puede aplicarse a sistemas lineales. Sin embargo, las técnicas propuestas por Takagi-Sugeno ofrecen la posibilidad de implementar estas leyes de control PR a sistemas no lineales. Por lo que, la propuesta para este trabajo es sintonizar un controlador difuso PR usando modelos difusos T-S para estabilizar un sistema no lineal.

Cabe mencionar, que típicamente las leyes de control propuestas para estabilizar sistemas difusos T-S emplean técnicas elaboradas en el marco temporal, usando LMI's, sin embargo éstas suelen ser conservativas.

Para ilustrar el proceso de sintonización de la ley de control difusa PR, sin pérdida de generalidad se implementa el proceso sobre un sistema no lineal del tipo (1) como lo es el sistema carro-péndulo.

3. DISEÑO Y SINTONIZACIÓN DE UN CONTROLADOR DIFUSO PR

En esta sección se presentan algunos resultados que sugieren el diseño y la sintonización de una ley de control difusa proporcional retardada para

estabilizar un sistema no lineal.

3.1. Diseño de un controlador difuso PR

Considere un sistemas del tipo (2), es decir

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))\{A_i x(t) + B_i u(t)\}, \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))C_i x(t). \end{cases}$$

Ahora, para la construcción del controlador considere el razonamiento siguiente,

Regla Control j:

SI $z_1(t)$ está en M_{j1} y \dots y $z_p(t)$ está en M_{jp} ,

ENTONCES $u(t) = -K_{p_j}x(t) + K_{r_j}x(t - \tau_j)$.

Así, la ley de control difusa PR está determinada por

$$u(t) = \sum_{j=1}^r h_j(z(t))\{-K_{p_j}x(t) + K_{r_j}x(t - \tau_j)\}, \quad (10)$$

donde $K_{p_j}^T = [k_{p_j}, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^n$ son las ganancias proporcionales, $K_{r_j}^T = [k_{r_j}, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^n$ son las ganancias retardadas y $\tau_j \in \mathbb{R}^+$ son los retardos, $j = 1, \dots, r$. Esta ley de control sólo requiere la salida del sistema y la salida retardada.

Observación. El diseño de la ley de control difusa PR propuesta aquí (10), puede ser vista como una extensión de la PDC (3). Por lo que, (10) puede ser

nombrada como una compensación paralela distribuida retardada (Parallel Distributed Compensation Retarded, PDCR).

Note que el sistema (2) en lazo cerrado con la ley de control (10) está descrito por

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t)) \{(A_i - B_iK_{pj})x(t) + B_iK_{rj}x(t - \tau_j)\}.$$

Ahora, si $\tau_j = \tau$, $j = 1, \dots, r$, el sistema anterior se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t))\{G_{ii}x(t) + R_{ii}x(t - \tau)\} \\ & + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{i < j} h_i(z(t))h_j(z(t)) \left\{ \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) x(t) \right. \\ & \left. + \left(\frac{R_{ij} + R_{ji}}{2} \right) x(t - \tau) \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

donde $G_{ij} = A_i - B_iK_{pj}$, $R_{ij} = B_iK_{rj}$, $i, j = 1, \dots, r$.

Así, el uso de instrumentos de medición o algoritmos de aproximación para calcular la acción derivativa se evita. Sin embargo, ahora la pregunta es ¿cuáles son los parámetros K_{pi} , K_{ri} y τ_i bajo los cuales el sistema en lazo cerrado (2, 10) sea σ -estable? A continuación, los resultados presentados en (Villafuerte et al., 2013) se extienden a los sistemas difusos T-S para responder tal pregunta.

3.2. Sintonización del controlador difuso PR

En seguida la sintonización del controlador difuso PR para estabilizar una clase de sistemas no lineales, tal como el sistema carro-péndulo es presentada. Además, se ilustra el proceso de sintonización de una ley de control difusa PDC.

Considere el modelo matemático del carro-péndulo, ver la Fig.1. De acuerdo a (Tanaka and Wang, 2001), éste es descrito por el sistema no lineal siguiente

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{g\text{sen}(x_1(t)) - amlx_2^2(t)\text{sen}(2x_1(t))/2 - \text{acos}(x_1(t))u}{4l/3 - aml\text{cos}^2(x_1(t))},\end{aligned}\quad (12)$$

donde $x_1(t)$ es la posición angular del péndulo respecto al eje vertical, $x_2(t)$ la velocidad angular, m la masa del péndulo, M es la masa del carro, g la constante de gravedad, $2l$ la longitud del péndulo, u la fuerza aplicada al carro y $a = 1/(m + M)$. Aquí, $g = 9.81m/s^2$, $m = 2kg$, $M = 8kg$, $l = 0.5m$ se escogen.

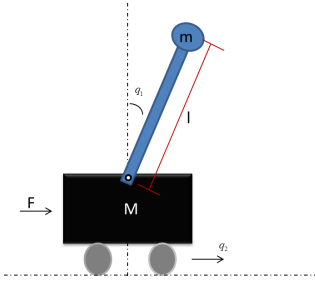


Figura 1: Carro-péndulo

Observe que el sistema (12) se puede aproximar por un modelo difuso de dos reglas que es construido mediante aproximación local. Estas dos reglas se emplean para hacer la fusificación del carro-péndulo.

Regla 1: Si $x_1(t)$ está cerca de 0, entonces

$$\dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t), \quad (13)$$

Regla 2: Si $x_1(t)$ está cerca de $\pm\pi/2$, entonces

$$\dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t). \quad (14)$$

Las funciones de membresía usadas para hacer la inferencia difusa son funciones de bell generalizadas como las representadas en la Fig.2. Claramente, el modelo difuso o la defusificación del sistema está dada por

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}, \quad (15)$$

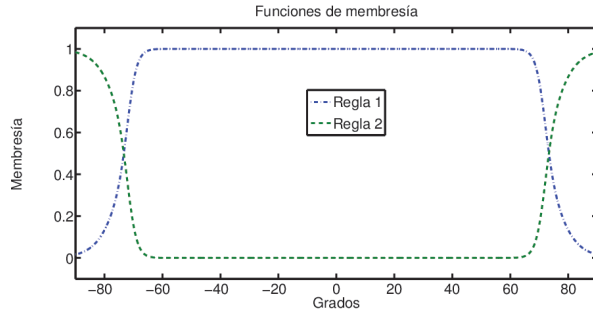


Figura 2: Funciones de membresía.

donde $\beta = \cos(88)$, $h_i \in [0, 1]$ es la función de disparo, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $x(t) \in \mathbb{R}^2$, $B \in \mathbb{R}^2$ y $u(t)^T \in \mathbb{R}^2$. Aquí

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3-aml} & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3-aml} \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3-aml\beta^2)} & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a\beta}{4l/3-aml\beta^2} \end{bmatrix}.$$

Ahora, los resultados presentados en la Sección 2.3 se usan para sintonizar la ley de control de la forma (10) para estabilizar el sistema (15).

Se considera el controlador difuso PR siguiente

$$u(t) = \sum_{j=1}^2 h_j(x) \{-K_{p_j} x(t) + K_{r_j} x(t - \tau_j)\}, \quad (16)$$

donde $K_{p_j}^T = [k_{p_j}, 0]^T$, $K_{r_j} = [k_{r_j}, 0]^T \in \mathbb{R}^2$ y $\tau_j \in \mathbb{R}^+$. Usando (11) el sistema

en lazo cerrado (15, 16) es

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) = & \sum_{i=1}^2 h_i^2(x_1) \{G_{ii}x(t) + R_{ii}x(t - \tau)\} \\
& + 2 \sum_{i=1}^2 \sum_{i < j} h_i(x_1) h_j(x_1) \left\{ \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) x(t) \right. \\
& \left. + \left(\frac{R_{ij} + R_{ji}}{2} \right) x(t - \tau) \right\}. \tag{17}
\end{aligned}$$

Los subsistemas difusos (13) y (14) se representan en espacio de estado ya que es necesario para poder obtener el cuasipolinomio característico, por lo que la ley de control PR puede ser diseñada usando la estrategia presentada anteriormente en conjunto con los resultados complementarios mostrados en la subsección 2.3 ó mediante el uso de las regiones σ -estables para cada subsistema difuso, ver (Villafuerte et al., 2013). Así, para el primer subsistema se tiene que sus regiones σ -estables son representadas en Fig.3 y para el segundo subsistema se muestran en la Fig.4.

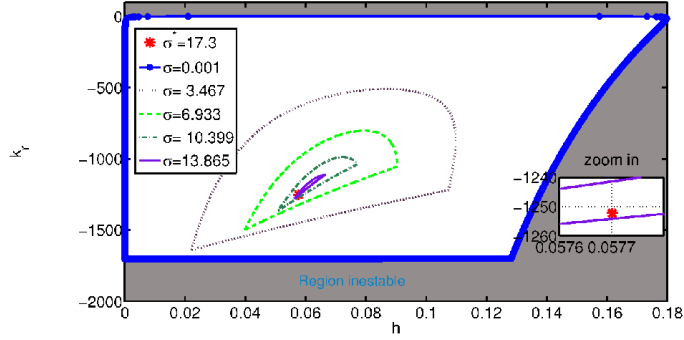


Figura 3: Regiones σ -estable para el subsistema difuso 1.

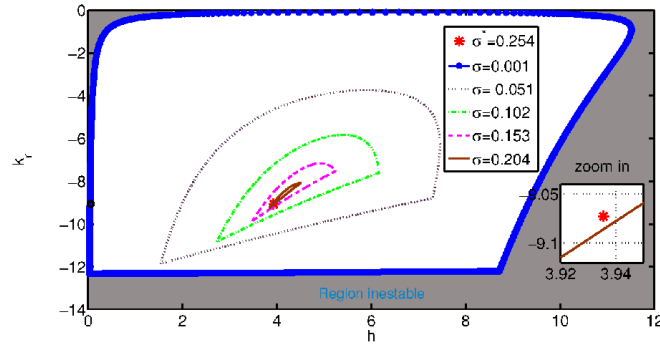


Figura 4: Regiones σ -estable para el subsistema difuso 2.

Después, usando el Lema 2.3 la σ -estabilización de los subsistemas difusos (13) y (14) se garantiza.

Por un lado se tiene que las mejores ganancias para sintonizar el control PR para el primer subsistema difuso (13) son el retardo $\tau_1 = 0.057$, la ganancia proporcional $K_{p1} = -1800$ y la ganancia retardada $K_{r1} = -1252$ con una

σ -estabilidad $\sigma_1 = 17.330$, estas ganancias se calculan fácilmente a partir de las ecuaciones (7), (8) y (9). Por otra parte para el segundo subsistema difuso representado en (14), se usan sus regiones σ -estables para sintonizar la ley de control del segundo subsistema, donde las ganancias que se usan son $\tau_2 = 0.057$, $K_{p2} = -1800$ y $K_{r2} = -9.072$ con un $\sigma_2 = 0.001$. Se tiene que realizar un análisis de estabilidad de ambos subsistemas en un marco frecuencial no es una tarea sencilla ya que el sistema difuso en lazo cerrado y el sistema no lineal en lazo cerrado tienen una infinidad de raíces, por esa razón en este trabajo hemos hecho uso de ciertos conocimientos teóricos como el principio del argumento, el teorema de Mikhailov y algunas ideas mostradas en (Nicosia and Tomei, 1994) sobre cómo emplear estos conceptos, tomando esto en cuenta desarrollamos un método numérico para verificar la estabilidad de cada subsistema difuso en el dominio de la frecuencia, por lo tanto de esta manera usando el método numérico basado en el principio del argumento, la Fig.5 muestra las tres raíces reales dominantes del primer subsistema y la Fig.6 muestra la ubicación de las tres raíces reales dominantes del segundo subsistema. La Fig.7 muestra el lugar de las raíces de estos cuasipolinomios cuando $j > i$.

Observación. Los cuasipolinomios $G_{ii}x(t) + R_{ii}x(t - \tau)$ para $i = 1, 2$ y

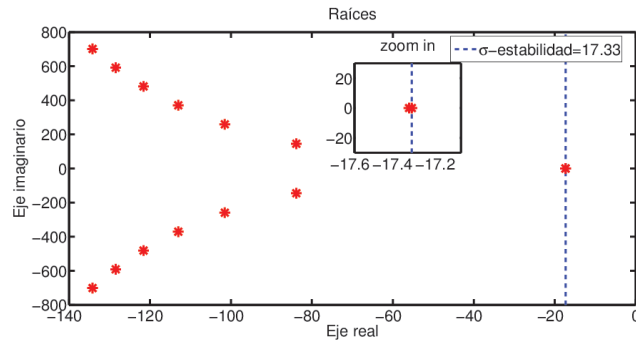


Figura 5: Ubicación de las tres raíces reales dominantes para el subsistema 1

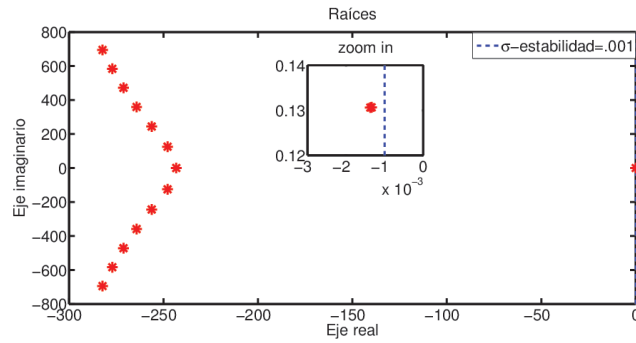


Figura 6: Ubicación de las tres raíces reales dominantes para el subsistema 2

$\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}x(t) + \frac{R_{ij}+R_{ji}}{2}x(t - \tau), i < j, i, j = 1, 2$ son Hurwitz. Por lo que, se garantiza que cada uno de los subsistemas de 17 y sus posibles combinaciones del sistema son estables.

3.2.1. Controlador difuso proporcional derivativo.

Para hacer una comparativa de la respuesta del sistema, usamos las ganancias difusas del controlador proporcional derivativo que fueron obtenidas en la

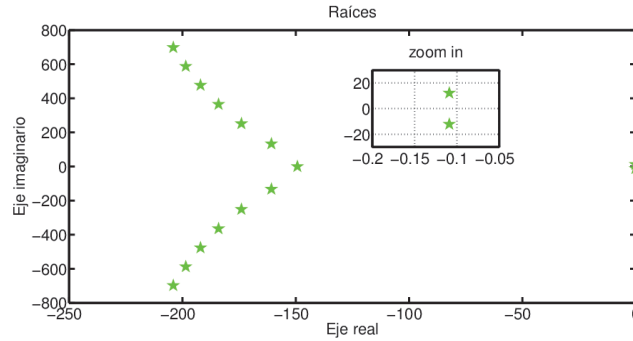


Figura 7: Lugar de las raíces.

referencia (Tanaka and Wang, 2001), la sintonización de esta ley de control se basa en el enfoque PDC donde la ley de control tiene la forma siguiente

$$u(t) = - \sum_{j=1}^2 h_j(z(t)) F_j x(t), \quad (18)$$

para este caso. Los valores de las ganancias son

$$F_1 = [-120.6667, -22.6667],$$

$$F_2 = [-2551.6, -764].$$

4. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

En esta sección se presenta el desempeño del controlador difuso PR, así como una comparación con el clásico PDC. La simulación se realizó usando el software matemático Matlab®.

En las Figs. 8 y 9 se muestran las respuestas del sistema difuso (17) y del

sistema no lineal (12, 16), respectivamente. Ambos sistemas con condición inicial de 80 grados. También, en la Fig.9 se presenta la respuesta del sistema no lineal (12, 18), la cual se observa más lenta que la respuesta del sistema no lineal (12, 16).

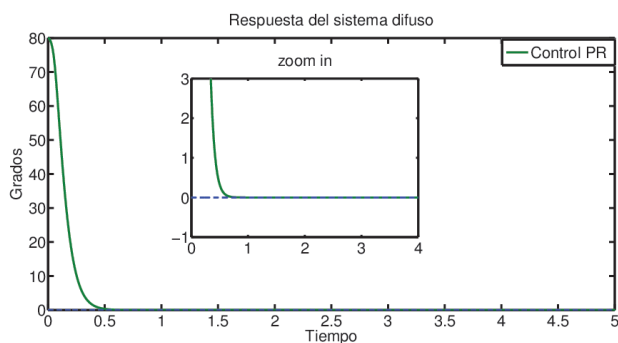


Figura 8: Respuesta del sistema difuso (17).

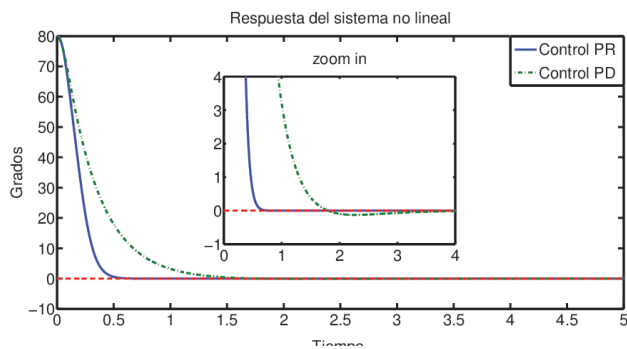


Figura 9: Respuesta del sistema no lineal (12) en lazo cerrado con las leyes de control (16) y (18).

Las señales de control de entrada (16) y (18) aplicadas al sistema no lineal

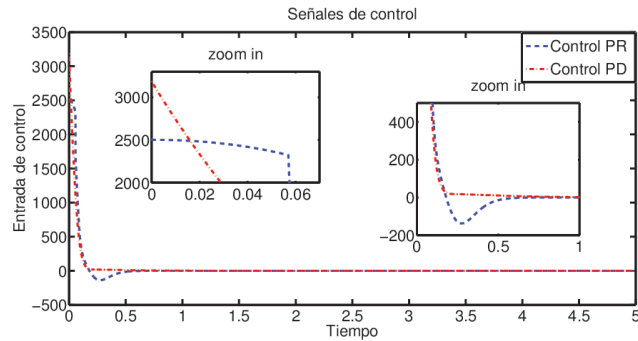


Figura 10: Señales de control (16) y (18) aplicadas al sistema no lineal (12).

(12) se presentan en la Fig.10. Aquí, se puede observar que el controlador (18) tiene mayor sobre impulso, esto significa mayor demanda de energía y mayor saturación de actuadores los cuales son dañinos para los sistemas reales.

Como una aportación extra del presente trabajo de investigación, en la Fig. 11 se presenta un vídeo de la implementación del control difuso PR sobre un sistema real carro-péndulo de laboratorio. El sistema real es un prototipo de Quanser Innovate Educate, Inverted Pendulum (IP01).

Figura 11: Video de la aplicación experimental del control difuso PR sobre un carro-péndulo

5. CONCLUSIONES

El diseño y sintonización de una ley de control difusa proporcional retardada para σ -estabilizar un sistema difuso T-S es propuesto aquí. Para ilustrar los resultados teóricos obtenidos, una simulación sobre el sistema no lineal carro-péndulo se presenta.

La estabilidad del sistema no lineal se mejora usando la PDCR en comparación al clásico PDC. Además, la ley de control difusa PR tiene una menor demanda de energía lo que se traduce en un menor desgaste de los actuadores. También, esta ley de control puede ayudar a reducir costos, volumen, o ruido causado por los sensores de medición usados para aproximar la derivada con respecto del tiempo. Así la PDCR puede ser una buena alternativa

para controlar ciertos procesos.

Referencias

Abdallah, C., Dorato, P., Benites-Read, J., and Byrne, R. (1993). Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems. In *American Control Conference, 1993*, pages 3106–3107.

Berghuis, H. and Nijmeijer, H. (1993). Global regulation of robots using only position measurements. *Systems & control letters*, 21(4):289–293.

Cao, Y.-Y. and Frank, P. (2000). Analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control approach. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 8(2):200–211.

Chiang, C.-C. (2006). Decentralized robust fuzzy-model-based control of uncertain large-scale systems with input delay. In *Fuzzy Systems, 2006 IEEE International Conference on*, pages 498–505.

Cooke, K. L. and Grossman, Z. (1982). Discrete delay, distributed delay and stability switches. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 86(2):592–627.

- Hale, J. and Verduyn, S. (1993). *Introduction to functional differential equations*. Springer-Verlag, New York.
- Hang, C.-C., Astrom, K., and Ho, W. K. (1991). Refinements of the ziegler-nichols tuning formula. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings D*, 138(2):111–118.
- Huang, Y., Kuo, T., and Lee, H. (2007). Fuzzy-pd controller design with stability equations for electro-hydraulic servo systems. In *Control, Automation and Systems, 2007. ICCAS '07. International Conference on*, pages 2407–2410.
- Kelly, R., Ortega, R., Ailon, A., and Loria, A. (1994). Global regulation of flexible joint robots using approximate differentiation. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 39(6):1222–1224.
- Leghmizi, S. and Liu, S. (2012). Takagi-sugeno fuzzy pd controller for a 3-dof stabilized platform. In *Intelligent Control and Automation (WCICA), 2012 10th World Congress on*, pages 108–112.
- Lin, C.-Y., Hanh, L. D., and Chiu, Y.-P. (2009). Catching algorithm for 2d robot manipulator using pd controller. In *ICCAS-SICE, 2009*, pages 46–50.

- M. Dellnitz, O. S. and Zheng, Q. (2002). Locating all the zeros of an analytic function in one complex variable. *Computational and Applied Mathematics*, 138:325–333.
- Nicosia, S. and Tomei, P. (1994). A tracking controller for flexible joint robots using only link position feedback. In *Decision and Control, 1994., Proceedings of the 33rd IEEE Conference on*, volume 2, pages 1817–1822 vol.2.
- S. N. Sivanandam, S. S. and Deepa, S. (2007). *Introduction to Fuzzy Logic using MATLAB*. Springer, Heidelberg.
- Simhachalam, D., Dey, C., and Mudi, R. (2012). An auto-tuning pd controller for dc servo position control system. In *Power, Control and Embedded Systems (ICPCES), 2012 2nd International Conference on*, pages 1–6.
- Slotine, J. J. E. and Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- Suh, I. and Bien, Z. (1979). Proportional minus delay controller. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 24(2):370–372.

- Suh, I.-H. and Bien, Z. (1980). Use of time-delay actions in the controller design. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 25(3):600–603.
- Swisher, G. M. and Tenqchen, S. (1988). Design of proportional-minus-delay action feedback controllers for second- and third-order systems. In *American Control Conference, 1988*, pages 254–260.
- Tanaka, K. and Wang, H. O. (2001). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis*. JOHN WILEY & SONS, INC., New York.
- Villafuerte, R., Mondie, S., and Garrido, R. (2013). Tuning of proportional retarded controllers: Theory and experiments. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 21(3):983–990.
- Wang, Z. H. and Hu, H. Y. (2008). Calculation of the rightmost characteristic root of retarded time-delay systems via lambert w function. *Sound and Vibration*, 86:757–767.
- Zhao, Y. and Gao, H. (2012). Fuzzy-model-based control of an overhead crane with input delay and actuator saturation. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 20(1):181–186.
- Zhao, Y., Gao, H., Lam, J., and Du, B. (2009). Stability and stabilization of

delayed t-s fuzzy systems: A delay partitioning approach. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 17(4):750–762.

Ziegler, J. G. and Nichols, N. B. (1942). Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of the A. S. M. E.*