

UNA NOTA SOBRE LA ESTABILIDAD ROBUSTA EN  
SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES OSCILATORIAS  
CON PERTURBACIONES EXTERNAS

A NOTE ON THE ROBUST STABILITY OF SYSTEMS OF  
OSCILLATORY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH EXTERNAL  
DISTURBANCES

ALEXANDROV V. V.\*, SÁNCHEZ-FLORES L.\*\* , TEMOLTZI-ÁVILA R.\*\*

RESUMEN. Se presentan condiciones sobre el problema de estabilidad robusta para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales oscilantes con perturbaciones externas a partir de la solución del problema de desviación máxima, la cual se obtiene como una aplicación del concepto clásico de estabilidad bajo perturbaciones permanentes debida a Duboshin y Malkin. A partir de la solución del problema de desviación máxima el cual se resuelve a partir de métodos variacionales, se construyen cubos  $n$ -dimensionales minimales que contienen las soluciones de la ecuación diferencial dada y se presenta una alternativa de aproximar la frontera del conjunto de alcanzabilidad del sistema. Los resultados obtenidos se ilustran en sistemas particulares conocidos de orden tres y cuatro.

ABSTRACT. Conditions on the problem of robust stability are presented for systems of oscillating linear differential equations with external perturbations from the solution of the problem of maximum deviation, which is obtained as an application of the classical concept of stability under permanent perturbations due to Duboshin and Malkin. From the solution of the problem of maximum deviation which is solved from the variational methods, a minimal  $n$ -dimensional cube containing solutions of the given differential equation are built and an alternative to approximate the boundary of the attainability set of of the system are shown. The results are illustrated in particular systems known of order three and four.

*Palabras clave.* Ecuaciones diferenciales, estabilidad robusta, control óptimo, desviación máxima, ciclos límite máximos.

*Keywords.* Differential equations, robust stability, optimal control, maximum deviation, maximum limit cycles.

## 1. INTRODUCCIÓN

El problema de desviación máxima para sistemas lineales tiene sus orígenes en los trabajos de (Bulgakov, 1946), cuya formulación consiste en determinar soluciones para un sistema de ecuaciones diferenciales con una perturbación externa acotada, y de manera tal que su norma sea máxima para cada instante  $T > 0$ . Los resultados relacionados con el problema de Bulgakov, ver por ejemplo (Aleksandrov, Zueva, & Sidorenko, 2014), permiten estimar el comportamiento de la solución del sistema

con condiciones iniciales nulas:

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + \mathbf{b}v, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{0}, \\ v(\cdot) &\in \mathcal{V} = \{v(t) \in L_\infty : |v(t)| \leq \delta_1\}, & 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{x}(v(t), t) \in \mathbb{R}^n$  es la solución de (1) correspondiente a una perturbación externa escalar  $v(t) \in L_\infty$  acotada por  $\delta_1 > 0$ ,  $L_\infty$  es el conjunto de funciones medibles y acotadas casi dondequiera,  $A$  es una matriz de Hurwitz de tamaño  $n \times n$  y  $\mathbf{b}$  es un vector  $n$ -dimensional. Se supone que el par  $\{A, \mathbf{b}\}$  satisface el criterio de controlabilidad completa para el sistema (1):  $\text{rang}[\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-1}\mathbf{b}] = n$ , ver por ejemplo (Kirk, 2004).

Si se emplea la norma vectorial  $\|\mathbf{y}\| = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i|$ , entonces tiene lugar la siguiente desigualdad para la solución de (1) en cada instante  $T > 0$  fijo

$$\|\mathbf{x}(v(\cdot), T)\| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j(v(\cdot), T)| \leq \delta_1 \cdot \max_{1 \leq j \leq n} \int_0^T |\mathbf{e}_j^\top e^{At} \mathbf{b}| dt,$$

donde  $\mathbf{e}_j$  es el  $j$ -ésimo vector canónico correspondiente a la coordenada  $x_j(v(t), t)$  de la solución del sistema; por lo tanto, para  $\epsilon > 0$  dado se puede elegir  $\delta_1 = \epsilon/\chi$ , donde

$$\chi = \max_{1 \leq j \leq n} \int_0^T |\mathbf{e}_j^\top e^{At} \mathbf{b}| dt.$$

con el fin de que las soluciones de (1) satisfagan la restricción  $\|\mathbf{x}(v(T), T)\| \leq \epsilon$ . En este sentido, el criterio de calidad robusta para el sistema (1) con condiciones iniciales nulas e instante  $T > 0$  fijo, está definido por

$$\chi = \sup_{0 < \epsilon < \infty} \frac{\epsilon}{\delta_1(\epsilon)}.$$

Al tomar el valor  $\delta_1(\epsilon)$  en este criterio se puede construir en  $\mathbb{R}^n$  un cubo  $n$ -dimensional que contiene en su interior el conjunto de soluciones del sistema (1), y como consecuencia, el conjunto de alcanzabilidad del sistema (Kirk, 2004).

Tomando como base una formulación análoga del problema de desviación máxima dado por Bulgakov, en este trabajo se extiende el criterio de calidad robusta al caso en que  $T \rightarrow \infty$  y tal que las condiciones iniciales nulas se sustituyen por aquellas que satisfagan la desigualdad  $\|\mathbf{x}(0)\| \leq \delta_2$ , donde  $\delta_2 > 0$  es un parámetro por determinar.

La formulación del problema de desviación máxima que se considera ha sido discutida en algunos casos para sistemas de ecuaciones diferenciales con una perturbación externa; por ejemplo, en (Aleksandrov, Alexandrova, Prikhod'ko, & Temoltzi-Ávila, 2007; Zhermolenko, 2007; González, 2011) se construyen ciclos límite máximos al resolver el problema de desviación máxima de un sistema de ecuaciones diferenciales de orden dos; en cada caso, se presentan de forma explícita las ecuaciones paramétricas que describen el ciclo límite máximo, el cual es orbitalmente asintóticamente estable; los resultados obtenidos en (Aleksandrov et al., 2014) permiten construir un ciclo límite máximo para sistemas de orden tres realizando una transformación del sistema considerado, donde las ecuaciones paramétricas del ciclo límite máximo determinan las desviaciones máximas de alguna coordenada del sistema al intersectar estas con el sistema coordinado. En cada uno de estos resultados, la síntesis de la peor perturbación externa que resuelve el problema de desviación máxima, permite construir un ciclo límite máximo, cuyas intersecciones con las rectas de alcanzabilidad correspondientes permiten determinar la desviación

máxima del sistema, mediante la cual se determina un cubo  $n$ -dimensional mínimo que contiene en su interior las soluciones de la ecuación diferencial para cada perturbación externa de valores acotados.

## 2. ESTABILIDAD ROBUSTA Y EL PROBLEMA DE DESVIACIÓN MÁXIMA PARA SISTEMAS OSCILANTES

Se considera la dinámica de un sistema descrito por la ecuación diferencial con una perturbación externa

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}u, \\ u(\cdot) \in \mathcal{U} &= \{u(t) \in PC : |u(t)| \leq \delta_1\}, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$  es el vector  $n$ -dimensional de coordenadas fase del sistema,  $\mathbf{A}$  es una matriz de Hurwitz de tamaño  $n \times n$  de entradas constantes,  $\mathbf{b}$  es un vector  $n$ -dimensional de entradas constantes, y  $u(\cdot)$  es una función (perturbación externa) constante a trozos de magnitud acotada, donde  $PC$  denota el conjunto de las funciones continuas a trozos. Se supone que la matriz  $\mathbf{A}$  posee al menos un par de valores propios complejos conjugados con parte real negativa y que el par  $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}\}$  satisface el criterio de controlabilidad completa.

Dado que los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$  poseen parte real negativa, la solución trivial  $\mathbf{y} \equiv \mathbf{0}$  del sistema (2) es asintóticamente estable cuando  $\delta_1 = 0$ ; en el caso en que  $\delta_1 > 0$ , la estabilidad robusta del sistema (2) puede estudiarse bajo el concepto de estabilidad bajo perturbaciones permanentes cuya definición fue introducida por I. G. Malkin y G. N. Duboshin (ver por ejemplo (Elsoltz, 1969)). En este contexto, se considera la siguiente:

**Definición 1.** La solución trivial  $\mathbf{y} \equiv \mathbf{0}$  del sistema (2) es robustamente estable, si dado  $\epsilon > 0$  existen  $\delta_1 = \delta_1(\epsilon) > 0$  y  $\delta_2 = \delta_2(\epsilon) > 0$  tales que  $|u(t)| \leq \delta_1$  y  $\|\mathbf{y}(0)\| < \delta_2$  implican que  $\|\mathbf{y}(t)\| \leq \epsilon$  para todo  $t > 0$  y toda perturbación externa  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ .

El análisis sobre la estabilidad robusta del sistema (2) se realiza en el sentido de la Definición 1 al considerar las soluciones al problema de determinar perturbaciones externas admisibles  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$  que proporcionen valores extremos a los funcionales  $\varphi_i[\mathbf{y}(t)] = |y_i(t)|$ ,  $i = 1, \dots, n$ , y para los cuales se plantean los problemas de optimización

$$\varphi_i[\mathbf{y}(t)] \rightarrow \sup_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Los valores obtenidos definen las desviaciones máximas de las correspondientes coordenadas  $y_i(t)$  del sistema (2). Cada uno de estos valores permite determinar la magnitud de la peor perturbación externa  $u(\cdot)$  que garantice la estabilidad robusta de (2).

El siguiente resultado básico, el cual corresponde a una reformulación clásica de desacoplamiento, ver por ejemplo (Hirsch & Smale, 1974), permite desacoplar (2) en  $m$  subsistemas completamente controlables de orden dos y  $n - m$  subsistemas de orden uno.

**Lema 1.** Si la matriz  $\mathbf{A}$  del sistema (2) posee  $2m$  valores propios complejos conjugados distintos con parte real negativa denotados por  $-\varepsilon_1 \pm i\omega_1, \dots, -\varepsilon_m \pm i\omega_m$ , y posee  $n - 2m$  valores propios reales negativos distintos denotados por  $-\varepsilon_{2m+1}, \dots, -\varepsilon_n$ ,

donde  $2m \leq n$ , entonces el sistema (2) es equivalente al sistema

$$(3) \quad \dot{\mathbf{x}} = B\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U},$$

donde  $B = \text{diag}\{B_1, \dots, B_m, -\varepsilon_{2m+1}, \dots, -\varepsilon_n\}$ ,

$$B_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon_j^2 - \omega_j^2 & -2\varepsilon_j \end{bmatrix},$$

$\mathbf{b} = (0, 1, \dots, 0, 1, b_{2m+1}, \dots, b_n)^\top$ , con  $b_{2m+1}, \dots, b_n \neq 0$ .

En realidad, si  $\mathbf{u}_1 \pm i\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{u}_m \pm i\mathbf{v}_m$  son los vectores propios asociados a los valores propios complejos conjugados, y  $\mathbf{u}_{2m+1}, \dots, \mathbf{u}_n$  los vectores propios asociados a los valores propios reales, dado que la multiplicidad de cada valor propio es uno,  $Q = [\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{2m+1}, \dots, \mathbf{u}_n]$  es invertible, y es conocido que

$$Q^{-1}AQ = \text{diag}\{A_1, \dots, A_m, -\varepsilon_{2m+1}, \dots, -\varepsilon_n\},$$

con

$$A_j = \begin{bmatrix} -\varepsilon_j & \omega_j \\ -\omega_j & -\varepsilon_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Si  $\mathbf{q} = Q^{-1}\mathbf{e}_n = (q_1, \dots, q_n)^\top$ , entonces el sistema (2), bajo la transformación  $\mathbf{y} = Q\bar{\mathbf{y}}$ , es equivalente al sistema

$$\dot{\bar{\mathbf{y}}} = Q^{-1}AQ\bar{\mathbf{y}} + \mathbf{q}u, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U},$$

el cual es completamente controlable con matriz de controlabilidad  $Q^{-1}U$ . Como este sistema es desacoplado, lo cual se sigue de la estructura de la matriz  $Q^{-1}AQ$ , cada uno de sus subsistemas es completamente controlable, y por lo tanto, cada uno puede transformarse en su forma canónica mediante la transformación  $\bar{\mathbf{y}} = \bar{U}P\mathbf{x}$ , donde

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \text{diag}\{\bar{U}_1, \dots, \bar{U}_m, 1, \dots, 1\}, \\ P &= \text{diag}\{P_1, \dots, P_m, 1, \dots, 1\}, \end{aligned}$$

con

$$\bar{U}_j = \begin{bmatrix} q_{2j-1} & -\varepsilon_j q_{2j-1} + \omega_j q_{2j} \\ q_{2j} & -\omega_j q_{2j-1} - \varepsilon_j q_{2j} \end{bmatrix}, \quad P_j = \begin{bmatrix} 2\varepsilon_j & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se sigue que  $\mathbf{b} = (Q\bar{U}P)^{-1}\mathbf{e}_n$ . La controlabilidad completa de cada subsistema implica que  $b_{2m+1}, \dots, b_n \neq 0$ .

Por lo tanto, la transformación  $\mathbf{y} = S\mathbf{x}$ , donde  $S = Q\bar{U}P$ , es no degenerada. Esto muestra que (2) y (3) son equivalentes.

Como consecuencia del Lema 1, bajo la transformación  $\mathbf{y} = S\mathbf{x}$ , el sistema (2) es equivalente a un sistema de  $m$  ecuaciones diferenciales de orden dos y  $n - m$  ecuaciones diferenciales de orden uno con una perturbación externa:

$$(4) \quad \begin{cases} \ddot{x}_{2j-1} + 2\varepsilon_j \dot{x}_{2j-1} + (\varepsilon_j^2 + \omega_j^2)x_{2j-1} = u, \\ \dot{x}_k + \varepsilon_k x_k = b_k u, \\ u(\cdot) \in \mathcal{U}, \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 2m+1, \dots, n. \end{cases}$$

En cada uno de estos subsistemas de ecuaciones diferenciales son conocidas las desviaciones máximas de las coordenadas respecto al origen de coordenadas, ver por ejemplo (Aleksandrov et al., 2007; Zhermolenko, 2007).

En el caso de los subsistemas en (4) para  $j = 1, \dots, m$ , pueden plantearse los subproblemas de optimización restringidos a intervalos  $[t_p, t_{p+1}]$ ,  $p = 1, 2, \dots$ , los cuales dependen del propio subproblema de optimización:

$$\begin{aligned} |x_{2j-1}(t)| &\rightarrow \sup_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \\ x_{2j-1}(t_p) &= \beta_p, \quad x_{2j}(t_p) = 0, \quad x_{2j}(t_{p+1}) = 0, \\ x_{2j}(t) &\neq 0 \text{ para cada } t \in (t_p, t_{p+1}). \end{aligned}$$

La solución a este problema está dada por la perturbación  $u^o(t) = \delta_1 \text{sign } x_{2j}(t)$ , y las intersecciones  $\{\beta_p\}$  de la solución con el eje  $x_{2j-1}$  satisfacen la relación recurrente contractiva  $\beta_p = e^{-\pi\epsilon_j/\omega_j} \beta_{p-1} + \delta_1(1 + e^{-\pi\epsilon_j/\omega_j})/(\epsilon_j^2 + \omega_j^2)$ . Tomando  $\alpha_j^* = \lim_{p \rightarrow +\infty} \beta_p$  en esta relación, se obtiene la desviación máxima de la coordenada  $x_{2j-1}$ . Subproblemas de optimización completamente análogos se pueden plantear en las coordenadas  $x_{2j}$  para  $j = 1, \dots, m$ . Por lo tanto, los valores que satisfacen los problemas de optimización están dados por

$$\sup_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} |x_j(t)| \rightarrow \alpha_j^* := \delta_1 \alpha_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_{2j-1} &= \frac{2}{\epsilon_j^2 + \omega_j^2} \coth \frac{\pi\epsilon_j}{2\omega_j}, \\ \alpha_{2j} &= \frac{2}{\sqrt{\epsilon_j^2 + \omega_j^2}} \left( 1 + \coth \frac{\pi\epsilon_j}{2\omega_j} \right) e^{-\frac{\epsilon_j}{\omega_j} \left( \frac{\pi}{3} - \arctan \frac{\epsilon_j}{\omega_j} \right)}, \end{aligned}$$

Los valores  $(\alpha_{2j-1}^*, \alpha_{2j}^*)$  permiten construir un cuadrado  $R_{2j-1}$  que contiene en su interior las soluciones de los subsistemas en (4) cuando  $j = 1, \dots, m$  (ver la Figura 1).

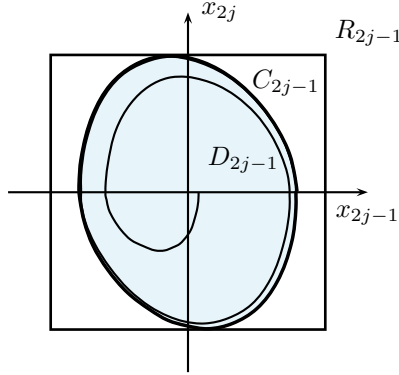


FIGURA 1. Representación gráfica de las desviaciones máximas de las coordenadas  $x_{2j-1}$  y  $x_{2j}$  y los conjuntos que de ellas se generan.

Por otra parte, al acotar directamente la ecuación integral asociada a los subsistemas de (4) para  $k = 2m + 1, \dots, n$ , suponiendo una condición inicial  $x_k(0) = x_k^0$

se observa que

$$\begin{aligned}
\sup_{u \in \mathcal{U}} |x_k(t)| &= \sup_{u \in \mathcal{U}} \left| e^{-\epsilon_k t} x_k^0 + \int_0^t e^{-\epsilon_k(t-s)} b_k u(s) ds \right| \\
&\leq e^{-\epsilon_k t} |x_k^0| + |b_k| \int_0^t e^{-\epsilon_k(t-s)} \sup_{u \in \mathcal{U}} |u(s)| ds \\
&\leq e^{-\epsilon_k t} |x_k^0| + |b_k| \delta_1 \int_0^t e^{-\epsilon_k(t-s)} ds \\
&\leq \left( |x_k^0| - \frac{\delta_1 |b_k|}{\epsilon_k} \right) e^{-\epsilon_k t} + \frac{\delta_1 |b_k|}{\epsilon_k},
\end{aligned}$$

de donde la peor perturbación externa que determina las desviaciones máximas es constante siempre que la condición inicial satisfaga la desigualdad  $|x_k^0| < \delta_1 |b_k| / \epsilon_k$ , y está es dada por  $u^o(t) = \delta_1 \text{sign } b_k$ ; en tal situación resulta que

$$\sup_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} |x_k(t)| \rightarrow \alpha_k^* := \delta_1 \alpha_k, \quad k = 2m + 1, \dots, n,$$

donde

$$\alpha_k = \frac{|b_k|}{\epsilon_k}.$$

De esta manera, si la condición inicial  $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)^\top$  satisface la restricción  $|x_i^0| \leq \alpha_i^*$ ,  $i = 1, \dots, n$ , las coordenadas de la solución del sistema (3) cumplen las relaciones  $|x_i(t)| \leq \alpha_i^*$  para toda perturbación externa  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$  y  $t \geq 0$ . Por lo tanto, se puede construir un paralelepípedo  $P_{\mathbf{x}}$  en  $\mathbb{R}^n$  cuyos  $2^n$  vértices  $\{\delta_1 \mathbf{x}_1, \delta_1 \mathbf{x}_2, \dots, \delta_1 \mathbf{x}_{2^n}\}$  dependen de las desviaciones máximas del sistema (3), donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^\top, \quad \mathbf{x}_2 = (\alpha_1, -\alpha_2, \dots, \alpha_n)^\top, \\
&\dots, \quad \mathbf{x}_{2^n} = (\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n)^\top,
\end{aligned}$$

y tales que  $\mathbf{x}(t) \in P_{\mathbf{x}}$  para todo  $t \geq 0$ . Resulta que

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \delta_1 \|\mathbf{x}_i\|, \quad i \in \{1, \dots, 2^n\}.$$

La estimación anterior muestra que las soluciones del sistema (3) son acotadas para las condiciones iniciales dadas.

En consecuencia, de las propiedades de las desviaciones máximas para sistemas de ecuaciones diferenciales de orden dos, al considerar la peor perturbación  $u^o(t) = \delta_1 \text{sign } \dot{x}_{2j-1}(t)$  con  $j \in \{1, \dots, m\}$ , las coordenadas  $\{x_{2j-1}(t), \dot{x}_{2j-1}(t)\}$  de la solución  $\mathbf{x}(t)$  cuya condición inicial  $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)^\top$  satisface la restricción  $|x_i^0| \leq \alpha_i^*$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tienden a un único ciclo límite máximo orbitalmente asintóticamente estable  $C_{2j-1}$  (ver la Figura 1), el cual interseca de forma tangencial al menos dos caras de  $P_{\mathbf{x}}$ , y cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned}
x_{2j-1}(t) &= \mp \left( \frac{\delta_1}{\varepsilon_j^2 + \omega_j^2} + \alpha_{2j-1}^* \right) \cdot e^{-\varepsilon_j t} \left( \cos \omega_j t + \frac{\varepsilon_j}{\omega_j} \sin \omega_j t \right) \pm \frac{\delta_1}{\varepsilon_j^2 + \omega_j^2}, \\
x_{2j}(t) &= \pm \frac{\varepsilon_j^2 + \omega_j^2}{\omega_j} \left( \frac{\delta_1}{\varepsilon_j^2 + \omega_j^2} + \alpha_{2j-1}^* \right) e^{-\varepsilon_j t} \sin \omega_j t,
\end{aligned}$$

donde  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega_j}$ . El ciclo límite máximo  $C_{2j-1}$  coincide con la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $D_{2j-1}$  de la ecuación diferencial con una perturbación externa:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{2j-1} + 2\varepsilon_j \dot{x}_{2j-1} + (\varepsilon_j^2 + \omega_j^2)x_{2j-1} &= u, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \\ (x_{2j-1}(0), \dot{x}_{2j-1}(0)) &\in D_{2j-1}, \quad 1 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

Por otra parte, ya que las coordenadas restantes del sistema (4) son periódicas de periodo  $\tau = \frac{\pi}{\omega_j}$ , ver por ejemplo (Hale, 1963), se sigue que el sistema (3) posee un ciclo límite que depende de la peor perturbación externa  $u_i^o(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Si se considera la peor perturbación  $u^o(t) = \delta_1 \text{sign } b_k$  para  $k \in \{2m+1, \dots, n\}$ ,  $x_k(t)$  tiende asintóticamente al valor  $\alpha_k^*$ , es decir,  $x_k(t)$  tiende asintóticamente ya sea a uno de los vértices, una arista, o una de las caras de  $P_{\mathbf{x}}$ . En consecuencia, para cada  $k \in \{2m+1, \dots, n\}$ , el intervalo  $D_k = [-\alpha_k^*, \alpha_k^*]$  determina el conjunto de alcanzabilidad de la ecuación diferencial con una perturbación externa<sup>1</sup>

$$\dot{x}_k + \varepsilon_k x_k = b_k u, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \quad x_k(0) \in D_k, \quad 2m+1 \leq k \leq n.$$

Resumiendo los casos descritos, se sigue que

$$D_{\mathbf{x}} = D_1 \times D_3 \times \dots \times D_{2m-1} \times D_{2m+1} \times D_{2m+2} \times \dots \times D_n$$

aproxima el conjunto de alcanzabilidad del sistema (3). De la construcción de los conjuntos de alcanzabilidad de cada coordenada es claro que  $D_{\mathbf{x}} \subset P_{\mathbf{x}}$ .

Por otra parte, dado que la transformación  $\mathbf{y} = S\mathbf{x}$  es lineal y no degenerada, se concluye que las soluciones  $\mathbf{y}(t)$  del sistema (2) para cada  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$  están contenidas en el paralelepípedo

$$(5) \quad P_{\mathbf{y}} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = S\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in P_{\mathbf{x}}\},$$

y su conjunto de alcanzabilidad se estima por

$$(6) \quad D_{\mathbf{y}} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = S\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in D_{\mathbf{x}}\}.$$

La estabilidad robusta de la solución trivial  $\mathbf{y} \equiv \mathbf{0}$  del sistema (2) para perturbaciones externas, se sigue de reconsiderar el estimado de calidad robusta presentado en la introducción; esto es, para  $\epsilon > 0$  dado, el estimado de  $\|\mathbf{y}(t)\| \leq \epsilon$  para todo  $0 \leq t < \infty$  y toda perturbación externa  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ , se obtiene de tomar  $\delta_1 = \epsilon/\chi$ , donde

$$\chi := \frac{\epsilon}{\delta_1(\epsilon)} = \text{máx} \{\|S\mathbf{x}_1\|, \dots, \|S\mathbf{x}_{2^n}\|\},$$

siempre que la condición inicial del sistema satisfaga la desigualdad

$$(7) \quad \|\mathbf{y}(0)\| \leq \delta_2 := \delta_1(\epsilon) \cdot \text{máx} \{\|S\mathbf{x}_1\|, \dots, \|S\mathbf{x}_{2^n}\|\}.$$

Como conclusión de los resultados discutidos, el criterio de calidad robusta que caracteriza las desviaciones máximas del sistema (2) cuando  $0 \leq t < \infty$  y cuyas condiciones iniciales satisfacen (8) está dado por

$$(8) \quad \chi = \sup_{0 < \epsilon < \infty} \frac{\epsilon}{\delta_1(\epsilon)}.$$

Esto se resume en el siguiente:

<sup>1</sup>En realidad, el conjunto  $D_k$  puede reducirse solamente a un semiintervalo de la forma  $[-\alpha_k^*, 0]$  o bien  $[0, \alpha_k^*]$ , lo cual depende del signo del parámetro  $b_k$ .

**Teorema 1.** Si  $A$  satisface las condiciones del Lema 1, entonces el sistema (2) con condiciones iniciales que satisfagan (7) es robustamente estable bajo el criterio de calidad robusta (8). En tal caso,  $\mathbf{y}(t) \in D_{\mathbf{y}} \subset P_{\mathbf{y}}$  para todo  $0 \leq t < \infty$  y toda perturbación externa  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ , donde  $P_{\mathbf{y}}$  y  $D_{\mathbf{y}}$  se definen por (5) y (6), respectivamente.

### 3. EJEMPLOS DE ESTABILIDAD ROBUSTA

En este apartado se ilustran los resultados obtenidos para sistemas particulares de orden tres y cuatro presentados en la literatura y que tienen la forma:

$$(9) \quad \dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{e}_n\varphi(t, \mathbf{y}).$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se supone que  $\varphi(t, \mathbf{y})$  es una función acotada, esto es,  $|\varphi(t, \mathbf{y})| \leq \delta_1$ . A fin de determinar la estabilidad del sistema (9) se hallan las condiciones de estabilidad robusta del sistema (2) al determinar el valor  $\delta_1 > 0$  correspondiente.

En cada caso, la matriz  $A$  se elige de forma apropiada a fin de que los valores propios sean uno real y dos complejos conjugados en el caso de orden tres, mientras que para el sistema de orden cuatro, se eligen de manera que haya dos pares de valores propios complejos conjugados. En cada caso, se estima el correspondiente conjunto de alcanzabilidad.

**3.1. Sistemas de orden tres.** Se considera que los coeficientes de la matriz  $A$  del sistema (9) se expresan como  $a_1 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$ ,  $a_2 = 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \omega_2^2$  y  $a_3 = \varepsilon_1(\varepsilon_2^2 + \omega_2^2)$ , donde  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega_2 > 0$ . Las expresiones para los coeficientes permiten tener dos valores propios conjugados con parte real negativa  $-\varepsilon_2 \pm i\omega_2$  y un valor propio real negativo  $-\varepsilon_1$ . Empleando la transformación  $\mathbf{y} = S\mathbf{x}$ , donde

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} (\varepsilon_2^2 + \omega_2^2)\rho^{-1} & 2\varepsilon_2\rho^{-1} & \rho^{-1} \\ \varepsilon_1 & 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 1 \end{bmatrix},$$

$\rho = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 + \omega_2^2$ , se sigue que el sistema (9) es equivalente al sistema

$$(10) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= B\mathbf{x} + \mathbf{b}\varphi(t, S\mathbf{x}), \\ B &= \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\varepsilon_2^2 - \omega_2^2 & -2\varepsilon_2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b} &= [\rho^{-1} \quad 0 \quad 1]^\top. \end{aligned}$$

Un caso particular de este sistema lineal, el cual puede expresarse en forma del sistema (10) con la transformación dada, se discute en (Duan, Wang, Yang, & Huang, 2009) con coeficientes  $a_1 = 0.5$ ,  $a_2 = 2.8$ ,  $a_3 = 0.15$ , donde se emplea la función perturbación  $\varphi(t, \mathbf{y}) = -\lambda y_1 e^{-3y_1^2}$  con  $\lambda = 70$ . Si en lugar de la perturbación dada se consideran elementos de  $\mathcal{U} = \{u(t) \in KC : |u(t)| \leq \delta_1\}$  y se busca que las soluciones de (9) satisfagan la restricción  $\|\mathbf{y}(t)\| \leq 1$ , basta tomar  $\delta_1 \approx 0.124981$ . Al elegir el valor  $\lambda = 0.504739$  se consigue que  $\varphi(t, \mathbf{y}) \in \mathcal{U}$ . En este caso, el sistema



dado es robustamente estable, lo cual se sigue de los resultados obtenidos en el apartado anterior.

Se observa que la solución del sistema (10) satisface  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq 0.839612$ . En la Figura 2 se muestran las soluciones del sistema (9) y (10), así como las construcciones de los conjuntos de alcanzabilidad  $D_{\mathbf{y}}$  y  $D_{\mathbf{x}}$ , y los correspondientes paralelepípedos  $P_{\mathbf{y}}$  y  $P_{\mathbf{x}}$ . Las estimaciones de los conjuntos de alcanzabilidad corresponden a cilindros y las soluciones están contenidas en su interior.

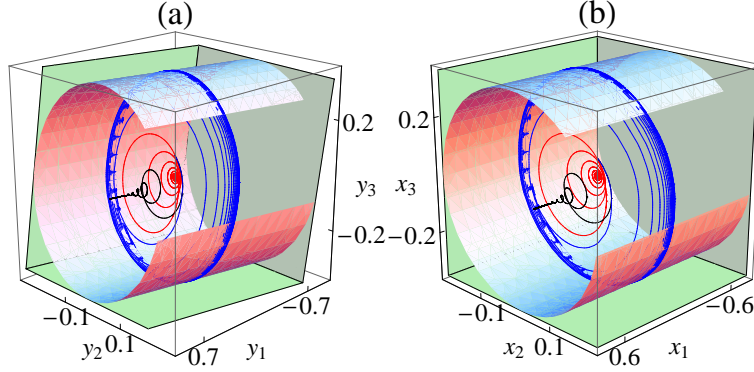


FIGURA 2. (a) Representación del paralelepípedo  $P_{\mathbf{y}}$  y estimación del conjunto de alcanzabilidad  $D_{\mathbf{y}}$  para el sistema (7). (b) Representación del paralelepípedo  $P_{\mathbf{x}}$  y estimación del conjunto de alcanzabilidad  $D_{\mathbf{x}}$  para el sistema transformado (8).

**3.2. Sistemas de orden cuatro.** Se supone ahora que los coeficientes de la matriz  $A$  del sistema (9) se expresan como  $a_1 = 2(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ ,  $a_2 = 4\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_1^2 + \omega_1^2 + \epsilon_2^2 + \omega_2^2$ ,  $a_3 = 2\epsilon_1(\epsilon_2^2 + \omega_2^2) + 2\epsilon_2(\epsilon_1^2 + \omega_1^2)$  y  $a_4 = (\epsilon_1^2 + \omega_1^2)(\epsilon_2^2 + \omega_2^2)$ . Los valores asignados a dichos coeficientes determinan dos pares de valores propios complejos conjugados con parte real negativa. El cambio de coordenadas  $\mathbf{y} = S\mathbf{x}$ , donde

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \epsilon_2^2 + \omega_2^2 & 2\epsilon_2 & 1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2^2 + \omega_2^2 & 2\epsilon_2 & 1 \\ \epsilon_1^2 + \omega_1^2 & 2\epsilon_1 & 1 & 0 \\ 0 & \epsilon_1^2 + \omega_1^2 & 2\epsilon_1 & 1 \end{bmatrix}$$

expresa el sistema (9) en el sistema equivalente

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= B\mathbf{x} + \mathbf{b}\varphi(t, S\mathbf{x}), \\ (11) \quad B &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\epsilon_1^2 - \omega_1^2 & -2\epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\epsilon_2^2 - \omega_2^2 & -2\epsilon_2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b} &= [0 \ 1 \ 0 \ 1]^\top. \end{aligned}$$

Como caso particular, se toman los coeficientes de la matriz  $A$  en el sistema (9) dados por  $a_1 = 0.0400$ ,  $a_2 = 2.0206$ ,  $a_3 = 0.0404$  y  $a_4 = 0.9803$  con los cuales se obtiene el modelo de Fitt discutido en (Leonov & Kuznetsov, 2011). La perturbación externa considerada es la función saturación  $\varphi(\sigma) = \delta_1 \text{sign}(\sigma) \min\{1, |\sigma|\}$ . Si para

el sistema (9) se buscan soluciones con la propiedad  $\|\mathbf{y}(t)\| \leq 1$ , entonces basta con tomar  $\delta_1 \approx 0.033473$ . Para el sistema asociado se tiene  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq 0.236257$ . La Figura 2 muestra la proyección de las soluciones de los sistemas (9) y (11) en las coordenadas  $y_1y_2y_3$  y  $x_1x_2x_3$ , respectivamente. En el espacio  $y_1y_2y_3$ , la estimación de la región de alcanzabilidad  $D_{\mathbf{y}}$  está constituida por un cilindro oblicuo (el cual se obtiene del hecho de que  $C_1$  y  $C_3$  son ciclos límite), mientras que en el espacio  $x_1x_2x_3$ , la estimación  $D_{\mathbf{x}}$  es un cilindro. Gráficas similares se obtienen en las proyecciones restantes.

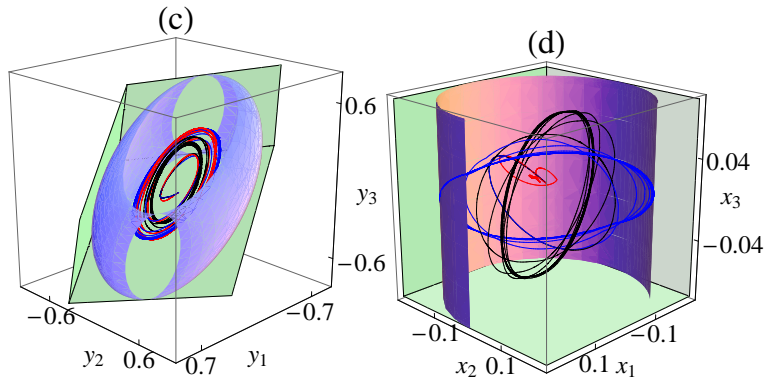


FIGURA 3. (a) Representación de la proyección del paralelepípedo  $P_{\mathbf{y}}$  y estimación del conjunto de alcanzabilidad  $D_{\mathbf{y}}$  para el sistema (7) en las coordenadas  $y_1y_2y_3$ . (b) Representación de la proyección del paralelepípedo  $P_{\mathbf{x}}$  y estimación del conjunto de alcanzabilidad  $D_{\mathbf{x}}$  para el sistema transformado (11) en las coordenadas  $y_1y_2y_3$ .

### CONCLUSIONES

El planteamiento del problema de desviación máxima permite construir regiones que contienen en su interior las soluciones del sistema considerado. Las soluciones de la ecuación diferencial intersectan de forma tangencial a estas regiones únicamente en algunos puntos de forma diametralmente opuesta. La extensión del criterio de calidad robusta obtenido muestra que las soluciones del sistema (2) pertenecen a un conjunto acotado para todo instante  $0 \leq t < \infty$ .

### REFERENCIAS

- Aleksandrov, V. V., Alexandrova, O. V., Prihod'ko, I. P., & Temoltzi-Ávila, R. (2007). Synthesis of self-oscillations. *Mosc. Univ. Mech. Bull.*, 62, 65–68. doi: 10.3103/S0027133007030016
- Aleksandrov, V. V., Zueva, I. O., & Sidorenko, G. Y. (2014). Robust stability of third-order control systems. *Mosc. Univ. Mech. Bull.*, 69(1), 10–15. doi: 10.3103/S0027133014010026
- Bulgakov, B. V. (1946). On accumulation of perturbations in the linear oscillatory controls with constant parameters. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 51, 339–342.

- Duan, Z., Wang, J., Yang, Y., & Huang, L. (2009). Frequency-domain and time-domain methods for feedback nonlinear systems and applications to chaos control. *Chaos, Solitons and Fractals*, *40*, 848–861. doi: 10.1016/j.chaos.2007.08.034
- Elsigoltz, L. (1969). *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. Moscú: Mir.
- González, H. (2011). Limit cycles and bounded trajectories for a nonlinear second-order differential equation. *Electronic Journal of Differential Equations*, *2011*, 1–9.
- Hale, J. K. (1963). *Oscillations in nonlinear systems*. New York: Mc-Graw-Hill.
- Hirsch, M. W., & Smale, S. (1974). *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*. New York: Academic Press.
- Kirk, D. E. (2004). *Optimal control. an introduction*. Mineola: Dover Publications, Inc.
- Leonov, G., & Kuznetsov, N. (2011). Analytical-numerical methods for investigation of hidden oscillations in nonlinear control systems. *18th IFAC World Congress*, *18*, 2494–2505.
- Zhermolenko, V. N. (2007). Maximum deviation of oscillating system of the second order with external and parametric disturbances. *J. Comput. Sys. Sc. Int.*, *46*, 407–411. doi: 10.1134/S1064230707030094

\* FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS, BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA, AV. SAN CLAUDIO S/N, SAN MANUEL, 72570 PUEBLA, PUE., MÉXICO.

\*\* CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO, CIUDAD DEL CONOCIMIENTO, CARRETERA PACHUCA-TULANCINGO KM. 4.5, PACHUCA, HIDALGO, MÉXICO.

*E-mail address:* vladimiralexandrov365@hotmail.com

*E-mail address:* temoltzi@uaeh.edu.mx