https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/icbi/issue/archive
Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI

Pädi

ISSN: 2007-6363

Publicación Semestral Pädi Vol. 8 No. 15 (2020) 72–76

Sobre un criterio de divisibilidad entre once
On a divisibility rule for eleven

Andrés Eduardo Blancas Saavedra [a], Benjamín A. Itzá Ortiz [a], Margarita Tetlalmatzi Montiel [a,*]

[a] *Área Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Pachuca, Hidalgo, México.*

Resumen

Después de una breve reseña sobre la divisibilidad de números enteros, en este trabajo presentaremos el siguiente criterio sencillo de divisibilidad entre 11, el cual es inédito en lo que a los autores respecta: un número entero es divisible entre 11 si y solo si la suma del número formado por sus dos últimos dígitos más el número resultante al borrar esos dos últimos dígitos es divisible entre 11. También se incluyen algunas aplicaciones y notas históricas.

Palabras Clave:
Divisibilidad, Números enteros, Números capicúa,

Abstract

After a brief review of divisibility rules for integer numbers, in this work we present the following simple divisibility rule for 11, which is new as far as the authors are concerned: an integer is divisible by 11 if and only if the sum of the number formed by its last two digits plus the number obtained by deleting those two digits is divisible by 11. Applications and historical notes are also included.

Keywords:
Divisibility, Integer numbers, Palindromic numbers.

1. Introducción

Los criterios para poder realizar cálculos numéricos en forma rápida han sido muy apreciados por su gran utilidad, como cuando no se podía contar con una calculadora. Además, pueden ser una forma divertida y entretenida de motivar las matemáticas. El gran matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) presenta, al final del primer capítulo de su obra Disquisitiones arithmeticae, varios métodos para comprobar cálculos numéricos empleando congruencias (Ore, 1988). Dentro de estos criterios se encuentran los que permiten saber si un número se puede dividir por otro, sin tener que realizar la división y en una forma relativamente sencilla. Sin embargo, los criterios de divisibilidad tienen su origen varios siglos antes de la aparición del Disquisitiones arithmeticae (Dickson, 2005; Ore, 1988). A pesar de su longevidad, los criterios de divisibilidad en la actualidad tienen aplicaciones muy relevantes, como ejemplo es el área de la criptografía, en donde una de las técnicas para garantizar la privacidad de los mensajes a través del internet está basada en la factorización de los números enteros (Preneel and Rijmen, 1998). En efecto, para saber si un número p es factor en la descomposición de cierto número entero N en factores primos, es equivalente a dicidir si N es divisible entre p, por lo que los criterios de divisbilidad juegan un rol determinante. Debe hacerse notar que, aunque actualmente se cuenta con un gran poder computacional, puede ser difícil saber si un número entero muy grande es divisible entre un número primo dado, se dice que con la eventual llegada de una computadora cuántica este problema dejaría de ser complejo, por lo que muchos de estos sistemas criptográficos dejarían de ser seguros.

El ímpetu para este trabajo surgió en uno de los cursos de inducción impartidos a los alumnos de nuevo ingreso a la carrera de Licenciado en Matemáticas Aplicadas de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, en donde se plantearon a los alumnos algunos de los criterios de divisibilidad. La primera inquietud entre los estudiantes fue querer saber el porqué fun-

*Autor para correspondencia: tmontiel@uaeh.edu.mx
Correo electrónico: pimienta_bros@hotmail.com (Andrés Eduardo Blancas Saavedra), itza@uaeh.edu.mx (Benjamín Alfonso Itzá Ortiz), tmontiel@uaeh.edu.mx (Margarita Tetlalmatzi Montiel)

Fecha de recepción: 28/03/2020 Fecha de aceptación: 28/04/2020 Fecha de publicación: 05/07/2020
DOI:10.29057/icbi.v8i15.5632

cionan, lo cual significa estudiar una demostración matemática formal de los criterios. El primer autor fue uno de los estudiantes que asistireron a este curso y propuso un criterio de divisibilidad para 11. La idea consiste en percatarse que si se desea saber cuándo un número es divisible entre 11, por ejemplo el número 12111, entonces basta sumar al número formado por las dos últimas cifras (en el número 12111 es el 11) al número obtenido al borrar las dos últimas cifras (en el número 12111 es el 121) y checar si el resultado es divisible entre 11. En nuestro ejemplo 121+11=132=11x12, que sí es divisible entre 11. Por tanto, 12111 también es divisible entre 11. Por otro lado, el número 1211 no es divisible entre once y en efecto la suma 12+11=23 tampoco lo es. Así, se afirma que el siguiente enunciado es verdadero: *un número es divisible entre once si y solo si la suma del número formado por sus dos últimos dígitos más el número obtenido al borrar sus últimos dos dígitos es divisible entre 11*. Al momento del curso de inducción solo se pudo comprobar que el criterio funcionaba para varios números enteros, cosa que el lector mismo puede corroborar. Sin embargo, fue hasta que se planteó el problema a los otros dos autores de este trabajo que se propuso una demostración al primer autor, presentada en el Teorema 2.1.

El resto del presente trabajo se divide en tres secciones. En la sección 2, después de presentar varios de los criterios conocidos de divisibilidad por 11, enunciamos y demostramos el criterio resultado principal de este artículo. En esta sección también incluimos una aplicación de nuestro criterio para la divisibilidad entre 11 de los números capicúas con un número par de dígitos. Asimismo, se incluye una discusión de cómo aplicar las ideas en la demostración del Teorema 2.1 para formular otros critetrios de divisibilidad entre 11. En la sección 3 incluimos una breve reseña histórica sobre criterios de divisibilidad, particularmente del 11. Finalmente, nuestras conclusiones se encuentran en la cuarta y última sección.

2. Criterios de Divisibilidad por 11

El estudio de las propiedades de los números es fascinante. Desde los primeros registros que se tienen del empleo de los números enteros hasta su estudio con un enfoque científico transcurrieron cerca de 5000 años, esto ocurre precisamente con los Pitagóricos al rededor del año 600 de nuestra era (Apostol, 1976). Desde esa época hasta nuestros días, el interés en el estudio de los número enteros ha producido una gran gama de resultados. Dentro de esta gran gama se encuentran las propiedades de divisibilidad, y muy particularmente los criterios de divisibilidad. Un criterio de divisibilidad por un número entero m es un criterio o algoritmo corto que permite determinar si un número entero d es divisible por m pero sin realizar la división, usualmente empleando los dígitos de d.

Ya que serán nociones muy recurridas en este trabajo, antes de iniciar es pertinente aclarar dos conceptos, el de divisibilidad y el de congruencia. Para el primero considere dos números enteros m y d, con $d \neq 0$, se dice que d es divisible por m si existe un número entero c tal que $d = m \times c$. Por ejemplo, 6 es divisible por 2 ya que 6=2 × 3. Para el segundo considere dos números enteros a y b y un número natural n, se dice que a y b son congruentes módulo n si al dividir a y b por n se obtiene el mismo residuo, esto es denotado como $a \equiv b \mod n$. Como un caso particular, al dividir 16 entre 3 y dividir 4 entre 3, el residuo en ambas divisiones es 1, resultando que $16 \equiv 4 \mod 3$.

En este trabajo nos concentraremos en los criterios de divisibilidad para 11. Existen varios de estos criterios, algunos de ellos se enlistan a continuación.

Un número $a = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ es divisible por 11 si y sólo si

1. Al formar la suma alternada de los dígitos, es decir, la diferencia de la suma de los dígitos en posición impar, menos la suma de los dígitos en posición par, $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots$, es divisible entre 11 (Niven et al., 1991; Kisačanin, 2002; Richmond and Richmond, 2004; Wikipedia, 2020). Ejemplo: 702 394, como $7-0+2-3+9-4 = 11$, se tiene que 702 394 es divisible por 11.
2. La suma de los dígitos en bloques de dos, formados de derecha a izquierda, $a_1a_0 + a_3a_2 + a_5a_4 + a_7a_6 + \cdots$, es divisible por 11 (Kisačanin, 2002; Wikipedia, 2020) Ejemplo: 297, observe $2 + 97 = 99 = 9 \times 11$, entonces 297 es divisible por 11.
3. Al formar la suma alternada de bloques de 3, iniciando de derecha a izquierda, $a_2a_1a_0 - a_5a_4a_3 + a_8a_7a_6 - \cdots$, la suma es divisible por 11 (Kisačanin, 2002). Ejemplo 702394: ya que $702 - 394 = 308 = 11 \times 28$, 702394 es divisible por 11.
4. Al restar el último dígito del resto el resultado es divisible por 11 (Smith, 1971; Wikipedia, 2020). Ejemplo: 297 es divisible por 11, ya que $29 - 7 = 22 = 2 \times 11$.
5. Cuando multiplica el último dígito por 10 y lo suma al resto, la suma es divisible por 11 (Smith, 1971; Wikipedia, 2020). Ejemplo: 297, resulta que $29 + 70 = 99 = 9 \times 11$, luego es divisible por 11.
6. Cuando el número de dígitos es par: suma el primer dígito, resta el último dígito y suma el resto, el resultado es divisible por 11 (Wikipedia, 2020). Ejemplo 702394: el número de dígitos es par (6) y $0239 + 7 - 4 = 242 = 22 \times 11$, luego 702394 es divisible por 11.
7. Cuando el número de dígitos es impar: resta el primero y el último dígito al resto, la suma es divisible por 11 (Wikipedia, 2020). Ejemplo 19305: el número de dígitos es impar (5) como $930 - 1 - 5 = 924 = 84 \times 11$, el número dado es divisible por 11.

Aparentemente el criterio más popular es el primero de esta lista. Todos estos criterios son algorítmicos, por ejemplo el criterio 4. Esto se puede ver en el siguiente ejemplo, el número 702 394 es divisible por 11, ya que

$$70239 - 4 = 70235,\ 7023 - 5 = 7018,$$

$$701 - 8 = 693,\ 69 - 3 = 66 = 6 \times 11.$$

A esta lista de criterios de divisibilidad para 11 queremos agregar el siguiente planteado por el primer autor: un número es divisible entre once si y solo si la suma de los bloques del número formados por los dos últimos dígitos y por el resto de los dígitos es divisible entre 11. En un lenguaje más abstracto se plantea y prueba a continuación.

Teorema 2.1. *Sea $s = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$ un número entero positivo con 2 o más dígitos. Entonces s es divisible por once si y solo si la suma $a_n a_{n-1} \cdots a_4 a_3 + a_2 a_1$ es divisible por once.*

Demostración. Supongamos que $s = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$ es un número entero con $n \geq 2$ dígitos. Denotemos por $t = a_n a_{n-1} \cdots a_4 a_3$ el número formado por los primeros $n-2$ dígitos de s. Observemos que

$$\begin{aligned} s &= 10^{n-1}a_n + 10^{n-2}a_{n-1} + \cdots + 10^2 a_3 + 10a_2 + a_1 \\ &= 10^2\left(10^{n-3}a_n + 10^{n-4}a_{n-1} + \cdots + a_3\right) + a_2a_1 \\ &= 10^2 t + a_2a_1 \\ &= 99t + (t + a_2a_1) \\ &= 11(9t) + (t + a_2a_1). \end{aligned}$$

Por tanto, s es divisible entre once si y solo si $t + a_2a_1 = a_n a_{n-1} \cdots a_4 a_3 + a_2 a_1$ es divisible entre once. □

Por ejemplo, el número 702 394 es divisible por 11, ya que $7023 + 94 = 7117$ y $71 + 17 = 88 = 8 \times 11$ es divisible por 11.

Un resultado que nos parece interesante es planteado en el ejercicio 5 de la sección 3.4 de (Richmond and Richmond, 2004), este dice:

Proposición 2.2. *Un número capicúa es cualquier número que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Si m es un número natural capicúa con una cantidad par de dígitos, entonces m es divisible por 11.*

Demostración. El caso de un número capicúa de dos dígitos es de la forma $aa = 10a + a = 11a$ por lo que es divisible entre 11. El caso de un número capicúa de cuatro dígitos es de la forma $abba$. Observe que $ab + ba = (10a + b) + (10b + a) = 11(a + b)$, como esta suma es divisible por 11, por el teorema 2.1, también $abba$ es divisible entre once.

Para el caso general procedemos por inducción sobre el número de dígitos del número capicúa. De esta modo, supongamos que todo número capicúa con $2k$ dígitos es divisible entre 11, donde los casos k igual a 1 y 2 ya han sido demostrados. Consideremos entonces un número capicúa

$$a_{k+1}a_k \ldots a_2a_1a_1a_2 \cdots a_ka_{k+1}$$

con $2(k + 1)$ dígitos.

$$\begin{aligned} &a_{k+1}a_k \ldots a_2a_1a_1a_2 \cdots a_ka_{k+1} \\ &\qquad = 10^{2k+1}a_{k+1} + 10(a_k \ldots a_2a_1a_1a_2 \cdots a_k) + a_{k+1} \\ &\qquad = (10^{2k+1} + 1)a_{k+1} + 10(a_k \ldots a_2a_1a_1a_2 \cdots a_k). \end{aligned}$$

Y puesto que por hipótesis de inducción $a_k \ldots a_2a_1a_1a_2 \cdots a_k$ es divisible por 11 y también $10^{2k+1} + 1$ es divisible por 11, podemos concluir que el número capicúa deseado es divisible por 11. □

En la demostración anterior se afirmó que $10^{2k+1} + 1$ es divisible por 11. Una forma de comprobar esto es recordando la expansión binomial, siendo

$$\begin{aligned} 10^n &= (11 - 1)^n \\ &= \binom{n}{0}11^n - \binom{n}{1}11^{n-1} + \binom{n}{2}11^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}11^1 \\ &\quad + (-1)^n\binom{n}{n}11^0 \\ &= 11r + (-1)^n, \end{aligned}$$

donde $r = 11^{n-1} - \binom{n}{1}11^{n-2} + \binom{n}{2}11^{n-3} + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}$. Con lo cual, $10^n + (-1)^{n+1}$ es divisible por 11, esto es, si n es par $10^n - 1$ es divisible por 11, y si n es impar $10^n + 1$ es divisible por 11. Otra forma de comprobarlo es usando las identidades

$$10^{2k+1} + 1 = 11\sum_{i=0}^{2k}(-1)^i 10^i, \ \text{para}\, k = 0, 1, \ldots \qquad (1)$$

$$10^{2k} - 1 = 11\sum_{i=1}^{2k-1}(-1)^i 10^i, \ \text{para}\, k = 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

que pueden ser demostradas empleando inducción matemática. Un dato curioso, los números de la forma $10^{2k+1} + 1$ y $10^{2k} - 1$ son números capicúa con una cantidad par de dígitos.

Combinando el criterio 4 de divisibilidad entre 11 y el Teorema 2.1 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.3. *Supongamos que $s = a_na_{n-1} \ldots a_2a_1$ es un número entero con $n \geq k$ dígitos. Se tiene que s es divisible por 11 si y sólo si la suma $a_na_{n-1} \ldots a_{k+1} + (-1)^k a_k \ldots a_2a_1$ es divisible por 11.*

Observe, en el teorema anterior el caso particular $k = 1$ no es otra cosa que el criterio 4; mientras que para $k = 2$ es el resultado del Teorema 2.1. La clave para demostrar el Teorema 2.3 son las relaciones de las potencias de 10 con el 11 (1) y (2) , ya que, siguiendo las ideas de la demostración del Teorema 2.1, se llega a

$$s = 10^k(10^{n-k-1}a_n + \cdots + a_{k+1}) + a_k \ldots a_1,$$

como existe un r con $10^k = 11r + (-1)^k$ y si $t = 10^{n-(k+1)}a_n + \cdots + a_{k+1}$, sustituyendo y reacomodando nos queda

$$s = 11rt + (-1)^k t + a_k \ldots a_2a_1.$$

Ya que $(-1)^k t + a_k \ldots a_2a_1$ y $t + (-1)^k a_k \ldots a_2a_1$ es la diferencia de los dos números cuando k es impar y es la suma de ellos cuando k es par, podemos concluir que s es divisible por 11 si y sólo si $t + (-1)^k a_k \ldots a_2a_1$ es divisible por 11.

Como una nota adicional, el criterio 3 de divisibilidad por 11 es similar para 7 y 13 (Kisačanin, 2002), esto es:

- Un número es divisible por 7 si al formar la suma alternada de bloques de 3 dígitos, iniciando de derecha a izquierda, la suma es divisible por 7. Por ejemplo 978 446 es divisible por 7, ya que $978 - 446 = 534 = 76 \times 7$.

- Un número es divisible por 13 si al formar la suma alternada de bloques de 3, iniciando de derecha a izquierda, la suma es divisible por 13. Por ejemplo, el que 5 131 269 sea divisible por 13 se sigue de la suma $5 - 131 + 269 = 143 = 11 \times 13$.

La razón de esto es $1001 = 7 \times 11 \times 13$, resultando las congruencias $10^3 \equiv -1 \mod 7$, $10^3 \equiv -1 \mod 11$ y $10^3 \equiv -1 \mod 13$. Empleando propiedades de congruencia de números enteros, se tiene que también $10^{3k} \equiv (-1)^k \mod m$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$ y $m = 7, 11$ y 13. Al agrupar los dígitos de tres en tres, si $s = a_na_{n-1} \ldots a_1a_0$, se obtienen los grupos

$10^{3k}a_{3k+2}a_{3k+1}a_{3k} = (mr_k + (-1)^k)a_{3k+2}a_{3k+1}a_{3k}$, para k entero no negativo, $m = 7$, 11 y 13 y un cierto r_k entero.

Otro criterio que es similar para 7, 11 y 13 se puede ver en (Bogomolny, 2018).

El número 11 pertenece a una familia de números llamados repituno (*repunit* en inglés), estos son números que en sus dígitos solo tienen al 1, por ejemplo 11, 111, 1111. Los números repituno tienen muchas propiedades curiosas e interesantes como puede verse en (Wells, 1986), por ejemplo 1 111 111 111 al cuadrado es 1234567890098765432l. Se puede observar que todos ellos son números capicúa, por lo que los números repituno con una cantidad par de dígitos son números divisibles por 11. Que este resultado no engañe al lector, ya que no es sencillo determinar la factorización en números primos de los números repituno debido a que son números muy grandes. Si se representa por $R_1 = 1$, $R_2 = 11, \ldots$, se sabe que R_2, R_{19}, R_{23}, R_{317} y R_{1031} son números primos, sin embargo, no se conoce toda la factorización en números primos de R_{323} (Studio Kamada, 2020; Wells, 1986).

Confiamos en que el lector concuerde con nosotros: el estudio de las propiedades de los números es fascinante. Para el lector interesado en continuar la lectura sobre criterios de divisibilidad le sugerimos, además de las referencias ya mencionadas, el artículo (Renault, 2006)

3. Notas históricas

Al enlistar los criterios de divisibilidad por 11 no es posible apreciar el esfuerzo que por siglos ha dado origen a los diferentes criterios de divisibilidad. Posiblemente uno de los primeros criterios de divisibilidad registrados es el encontrado en el Talmud de Babilonia, obra compilada entre los siglos tercero y sexto de nuestra era. Este criterio es sobre divisibilidad por 7, en lenguaje matemático moderno dice: si a y b son números enteros, $100a + b$ es divisible por 7 si $2a + b$ es divisible por 7 (Dickson, 2005; McDowell, 2018). Por ejemplo

$$\begin{aligned} 5586 &\equiv 100(55) + 86 \mod 7 \\ &\equiv 2(55) + 86 \mod 7 \\ &\equiv 196 \mod 7 \\ &\equiv 100(1) + 96 \mod 7 \\ &\equiv 2(1) + 96 \mod 7 \\ &\equiv 98 \mod 7 \\ &\equiv 14 \mod 7, \end{aligned}$$

por lo tanto, como 14 es divisible por 7, 5586 es dvisible por 7.

Sobre criterios de divisibilidad por 11 se mencionan algunos a continuación. En uno de los trabajos del matemático persa Alkarkhi (953-1029) que llegaron a Europa en la Edad Media, aproximadamente en el año 1015, se encuentran criterios para 9 y 11 (Dickson, 2005; Ore, 1988). El matemático italiano Leonardo Pisano o Fibonacci (1170 - 1240) estudió los números indoarábigos en África del Norte y tuvo un papel importante en la introducción de estos números a Europa, particularmente con su libro Liber Abbaci (1202) (Ore, 1988). En este libro, Fibonacci indica y demuestra un criterio para 9 (Dickson, 2005). Aunque Dickson menciona que Pisano da un criterio de divisibilidad para el 11 , coincidimos con Cantor (Cantor, 1880) en que su criterio es a prueba y error. Por ejemplo, encuentra la factorización en números primos del número $624481 = 11^2 \times 13 \times 397$ realizando divisiones sucesivas, probando uno a uno los números primos en orden ascendente hasta que el cuadrado del último que prueba es mayor al número que tiene, así concluye que 397 es un número primo, y comprueba esta factorización empleando congruencia módulo 7 (Singler, 2002). Nos parece muy notable la soltura con que Pisano emplea las propiedades de las congruencias. La lista podría continuar con muchos otros personajes de la historia de las matemáticas, entre ellos se encuentran Blaire Pascal (1623 - 1662), Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) y Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Pascal proporciona un criterio general de divisibilidad que es generalizado por Lagrange para números enteros en otras bases (Dickson, 2005).

Antes de mencionar el Criterio de Pascal es conveniente tener presente las siguientes propiedades de congruencias.

Si n es un número entero positivo, y a, b, c y d son números enteros que cumplen las relaciones $a \equiv b \mod n$ y $c \equiv d \mod n$, se tiene que

1. $a + c \equiv b + d \mod n$.
2. $ac \equiv bd \mod n$.

Blaire Pascal fue un matemático francés que realizó importantes contribuciones en varias áreas de la matemática, incluso trabajó en el diseño y la construcción de la primera calculadora mecánica. Pascal presenta en su artículo De Numeris Multiplicibus un criterio de divisibilidad general, esto es, con el criterio de Pascal se pueden proprocionar criterios para cualquier entero positivo (Dickson, 2005; Kisačanin, 2002; McDowell, 2018). Con éste se pueden justificar varios de los criterios anteriores, e incluso inventar algunos. Se invita al lector a apreciar como una pizca de creatividad puede derivar en proponer nuevos criterios alternativos.

Teorema 3.1. *(**Criterio de Pascal** (Kisačanin, 2002)). Si m y a son números enteros no negativos, y los dígitos de a son a_n, $a_{n-1}, \ldots, a_1$ y a_0, es decir, si*

$$a = 10^n a_n + 10^{n-1}a_{n-1} + \cdots + 10a_1 + a_0,$$

Entonces a es divisible por m si y solo si $r_n a_n + r_{n-1}a_{n-1} + \cdots + r_2 a_2 + r_1 a_1 + r_0 a_0$ es divisible por m, donde $10^k \equiv r_k \mod m$, con k =0, 1, 2, . . . , n.

Demostración. Por las propiedades de divisibilidad, y del hecho de que $10^k \equiv r_k \mod m$, para k =0, 1, 2, . . . , n, se tiene que m divide a $10^k - r_k$, también a $a_k(10^k - r_k)$ y además a $\sum_{k=0}^n a_k(10^k - r_k) = \sum_{k=0}^n a_k 10^k - \sum_{k=0}^n a_k r_k = a - \sum_{k=0}^n a_k r_k$. Nuevamente por las propiedades de divisibilidad y por la última identidad, se puede concluir que si m divide a alguno de los números a o $\sum_{k=0}^n a_k r_k$, entonces también divide al otro. □

El primer criterio de divisibilidad para 11, de la lista proporcionada, queda justificado con el Criterio de Pascal, por las congruencias $10^{2k} \equiv 1 \mod 11$ y $10^{2k+1} \equiv -1 \mod 11$ considere $r_{2k} = 1$ y $r_{2k+1} = -1$, para $k = 0, , 1, 2, \ldots$ Así, $a = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ es divisible por 11 si y solo si $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots$ es divisible por 11.

Una variante del Criterio de Pascal es considerar agrupamientos de los dígitos de un número y no solo considerarlos de uno en uno (Kisačanin, 2002; McDowell, 2018). Con esta variante se justifican los criterios 2 y 3 de la lista. Para el criterio

2, al agrupar los dígitos de dos en dos las potencias de 10 que les acompañan son pares y cada una de ellas es congruente con 1 módulo 11, así $a = a_1a_0 + 10^2a_3a_2 + 10^4a_5a_4 + \cdots$ es divisible por 11 si y solo si $a_1a_0 + a_3a_2 + a_5a_4 + \cdots$. El criterio 3 se sigue al observar que los grupos de tres dígitos tendrían al 10 a una potencia múltiplo de 3.

El criterio 4 se obtiene observando que

$$\begin{aligned} a &= a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0 \\ &= 10(a_na_{n-1}\ldots a_2a_1) + a_0 \\ &\equiv -1(a_na_{n-1}\ldots a_2a_1) + a_0 \quad \text{mód } 11. \end{aligned}$$

Para los criterios 6 y 7 observe

$$10^{2k+1}a + 10b + c \equiv -a - b + c \quad \text{mód } 11$$

y que

$$10^{2k}a + 10b + c \equiv 1a - b + c \quad \text{mód } 11.$$

Esto proporciona otra demostración para el teorema 2.1 observando que $a = a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0 = 100(a_na_{n-1}\ldots a_2) + a_1a_0 \equiv 1(a_na_{n-1}\ldots a_2) + a_1a_0$ mód 11 así como para el teorema 2.3 al hacer los agrupamientos necesarios.

Finalmente el criterio 5 de la lista resulta de la identidad, para a y b enteros, $11a + 11b = (10a + b) + (a + 10b)$, se tiene $10a + b \equiv -a - 10b$ mód 11, es decir 11 divide a $10a + b$ si y solo si 11 divide a $a + 10b$. Para $a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0$, considere $a = a_na_{n-1}\ldots a_2a_1$ y $b = a_0$.

4. Conclusiones

En este trabajo se propone y demuestra un criterio de divisibilidad entre 11, el cual es inédito en lo que a los autores respecta. Entre otras aplicaciones, se muestra cómo nuestro criterio puede utilizarse para probar que todo número capicúa con un número par de dígitos es divisible entre 11. Los criterios de divisibilidad son de gran interés en matemáticas, no solo por su gran utilidad a la hora de querer descomponer un número entero como el producto de sus factores primos, sino por la importancia en la formación de un alumno universitario al invitarlo a cuestionarse el porqué estos criterios funcionan. Por esta razón en el artículo se proveen discusiones históricas e ideas con el afán de que el lector pueda plantear o descubrir sus propios criterios de divisibilidad. La teoría de números, a la cual pertenece el presente artículo, es de aquellas ramas de matemáticas que se prestan a planteamientos muy intuitivos de ideas matemáticas, pero que muchas veces puede llegar a ser muy difícil proveer una prueba o demostración de los resultados. Por tal motivo, creemos que el presente artículo puede motivar la curiosidad del lector y hacerle percibir un poco de lo que consiste el quehacer matemático.

Agradecimientos

Los autores agradecen los valiosos comentarios de los revisores que han contribuido a la mejora del presente artículo.

Referencias

Apostol, T. M., 1976. Introduction to Analytic Number Theory. Springer-Verlag, New York.

Bogomolny, A., 2018. Divisibility by 7, 11, and 13. Último acceso 10 de marzo de 2020.
URL: `https://www.cut-the-knot.org/blue/div7-11-13.shtml`

Cantor, M., 1880. Vorlesungen über geschichte der mathematik. Internet Archive.
URL: `https://archive.org/details/vorlesungenberge02unse/\page/8/mode/2up`

Dickson, E., 2005. History of the Theory of Numbers. Divisibility and Primality. Vol. 1. Dover, New York.

Kisačanin, B., 2002. Mathematical problems and proof. Combinatorics, number theory and geometry. Kluwer Academic Publisher, New York.

McDowell, E. L., 2018. Divisibility tests: A history and user's guide. Convergence.
DOI: `10.4169/convergence20180513`

Niven, I., Zuckerman, H. S., Montgomery, H. L., 1991. An introduction to the theory of numbers. John Wiley & Sons Inc., New York.

Ore, O., 1988. Number theory and its history. Dover, New York.

Preneel, B., Rijmen, V., 1998. Cryptographic primitives for information authentication - state of the art. Lecture Notes in Computer Science 1528, 49–104.

Renault, M., 2006. Stupid divisibility tricks. 101 ways to stupefy your friends. Math Horizons 14 (2), 18–42.
DOI: `10.1080/10724117.2006.11974676`

Richmond, B., Richmond, T., 2004. A discrete transition to advanced mathematics. Vol. 3. Pure and Applied Undergraduate Texts. American Mathematical Society, Providence Rhode Island.

Singler, L., 2002. Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer, New York.

Smith, F., 1971. Divisibility rules for the fifteen primes. The arithmetic teacher 18 (2), 85–87.

Studio Kamada, 2020. Factorization of 11...11 (repunit). Último acceso 10 de marzo de 2020.
URL: `https://stdkmd.net/nrr/repunit/`

Wells, D., 1986. The penguin dictionary of curious and interesting numbers. Penguin Books, Great Britain.

Wikipedia, 2020. Divisibility rule. Último acceso 10 de marzo de 2020.
URL: `https://en.wikipedia.org/wiki/Divisibility_rule`