

# Sobre la convergencia de los conjuntos de alcanzabilidad de un sistema lineal de segundo orden

## On the convergence of the attainability sets of a second order linear system

R. Temoltzi-Ávila <sup>a,\*</sup>, V. N. Zhermolenko <sup>b</sup>

<sup>a</sup>Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Área Académica de Matemáticas y Física, Carr. Pachuca-Tulancingo Km. 4.5, Col. Carboneras, Mineral de la Reforma, C. P. 42184, Hidalgo, México.

<sup>b</sup>Universidad Estatal Rusa “Gubkin” de Petróleo y Gas, Departamento de Matemáticas Superiores, Leninskii No. 65, C. P. 119991, Moscú, Rusia.

### Resumen

Se determina la frontera de los conjuntos de alcanzabilidad  $D(T)$  de una ecuación diferencial lineal de segundo orden con una perturbación externa. Se muestra que al considerar el límite  $T \rightarrow \infty$ , la frontera de los conjuntos de alcanzabilidad convergen a un único ciclo límite  $C^*$  que se obtiene cuando se considera la peor perturbación externa. Los resultados se ilustran de forma numérica.

*Palabras Clave:* Perturbaciones externas, sistemas lineales, conjunto de alcanzabilidad, ciclo límite máximo.

### Abstract

The boundary of the attainability sets  $D(T)$  of a second order linear differential equation with an external perturbation its determined. It is shown that when the limit  $T \rightarrow \infty$  is considered, the boundary of the attainability sets converge to the only limit cycle  $C^*$  that is obtained when the worst external perturbation is considered. The results are illustrated numerically.

*Keywords:* External perturbations, linear systems, attainability set, maximum limit cycle.

## 1. Introducción

Un problema de interés en el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales que admiten una perturbación externa con recursos acotados, consiste en determinar, o en el mejor de los casos, en estimar los conjuntos de alcanzabilidad  $D(T)$ . Estos conjuntos describen la región en el espacio de estados a la cual las soluciones pueden acceder en un instante  $T > 0$  considerando las diferentes acciones de las perturbaciones admisibles. Algunas propiedades conocidas de tales conjuntos en el caso de sistemas lineales se pueden consultar en (Lee and Markus, 1967; Boyd et al., 1994).

Uno de los métodos que con mayor frecuencia se emplean en la estimación de los conjuntos de alcanzabilidad, consiste en el empleo de aproximaciones mediante elipsoides, ver Kurzhanski and Valyi (1999). En este contexto, el problema sobre la búsqueda de la mejor estimación es ampliamente estudiado en la literatura, ver por ejemplo los trabajos (Sabin and Summers, 1990; Shen and Zhong, 2011; Pitarch et al., 2015). El problema sobre la búsqueda de estimaciones numéricas de los conjuntos

de alcanzabilidad de sistemas no lineales se puede consultar en (Kumkov and Zharinov, 2004; Vinnikov, 2015).

En el caso particular de la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes y una perturbación externa:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + 2\mu\dot{y}_1 + \omega^2 y_1 &= u(t), \quad y_1(0) = 0, \quad \dot{y}_1(0) = 0, \\ u(t) \in \mathcal{U}_\delta &= \{u(t) \in \mathcal{KC}(\mathbb{R}) : |u(t)| \leq \delta\}, \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $0 \leq \mu < \omega$ ,  $\delta > 0$  y  $\mathcal{KC}(\mathbb{R})$  denota el conjunto de funciones continuas a trozos definidas en  $\mathbb{R}$ , en Chernousko (1988) se analiza la aproximación de la frontera de sus conjuntos de alcanzabilidad  $D(T)$  para cada instante  $T > 0$  usando el método de elipsoides.

Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes y una perturbación externa equivalente a (1):

$$\begin{aligned} \dot{y} &= By + cu(t), \quad y(0) = 0, \\ u(t) \in \mathcal{U}_\delta &= \{u(t) \in \mathcal{KC}(\mathbb{R}) : |u(t)| \leq \delta\}, \end{aligned} \quad (2)$$

\*Autor para correspondencia: temoltzi@uaeh.edu.mx

Correo electrónico: temoltzi@uaeh.edu.mx (Raúl Temoltzi-Ávila), zhermol@yandex.ru (Victor Nikolaevich Zhermolenko)

donde  $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$  representa su solución,  $^T$  denota el símbolo de transposición, y

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Es conocido en la literatura que los conjuntos de alcanzabilidad  $D(T)$  de (2) son conjuntos acotados, simétricos y conexos para cada  $T > 0$ , y que cuando  $T \rightarrow \infty$ , la frontera del conjunto  $D(T)$  tiende a una única trayectoria cerrada  $C^*$ ; en tal caso, dicha trayectoria corresponde a un ciclo límite que es orbital y asintóticamente estable que se obtiene de (2) bajo la acción de la peor perturbación externa  $u^*(t) = \delta \operatorname{sign} y_2(t)$ , ver (Zhermolenko, 1980; Aleksandrov et al., 2007; Zhermolenko, 2007, 2012).

En este trabajo se desarrolla un procedimiento alternativo conocido como método de la función soporte, el cual permite determinar la frontera de los conjuntos de alcanzabilidad  $D(T)$  de (2), tomando como referencia los casos que se analizan en (Formals’kii, 1974; Blagodatskikh, 2001; Bugrov and Formals’kii, 2017). Empleando esta técnica, se analizan algunas propiedades geométricas de estos conjuntos y, en particular, se analiza el comportamiento asintótico de su frontera cuando  $T \rightarrow \infty$ . Los resultados obtenidos se ilustran de forma numérica en un caso particular.

## 2. Frontera de los conjuntos de alcanzabilidad

Siguiendo el desarrollo que se presenta en (Formals’kii, 1974; Blagodatskikh, 2001; Bugrov and Formals’kii, 2017), se considera de forma alternativa el problema de hallar la frontera de los conjuntos de alcanzabilidad  $D_z(T)$  para el sistema de ecuaciones diferenciales equivalente a (2):

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + bu(t), \quad z(0) = 0, \\ u(t) &\in \mathcal{U}_\delta = \{u(t) \in \mathcal{KC}(\mathbb{R}) : |u(t)| \leq \delta\}. \end{aligned} \quad (3)$$

el cual se obtiene de considerar la transformación lineal no singular  $y = Cz$ , con

$$C = \frac{1}{\omega^2} \begin{bmatrix} \vartheta & -\mu \\ 0 & \omega^2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -\mu & \vartheta \\ -\vartheta & -\mu \end{bmatrix}, \quad b = \frac{1}{\vartheta} \begin{bmatrix} \mu \\ \vartheta \end{bmatrix},$$

y donde  $\vartheta = \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$ . Se sigue como consecuencia que para cada instante  $T > 0$ :

$$\partial D(T) = \{Cz \in \mathbb{R}^2 : z \in \partial D_z(T)\}. \quad (4)$$

Se conoce de (Formals’kii, 1974; Bugrov and Formals’kii, 2017) que los conjuntos  $D_z(T)$  dependen del instante  $T > 0$  considerado, que estos poseen dos puntos esquina, y que la frontera de  $D(\infty)$  no existe si  $\mu = 0$ . Es claro de (4) que estas propiedades son también válidas para los conjuntos de alcanzabilidad  $D(T)$  de (2). De lo anterior, se supone en lo sucesivo que los parámetros de (2) satisfacen la desigualdad  $0 < \mu < \omega$ . Por otra parte, de la misma referencia que se ha citado, se sabe que la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $D_z(T)$  de (3) definida en un instante  $T > 0$ , consiste de los puntos  $z(T)$  que tienen la propiedad de que la distancia  $\rho(\eta)$  del origen de coordenadas a

la recta tangente soporte  $\Pi(\eta)$  del conjunto  $\partial D_z(T)$  en el punto  $z(T)$ , satisface

$$\begin{aligned} \rho(\eta) &= \max_{z(T) \in D_z(T)} \eta(\theta) z(T) \\ &= \max_{u(T-\tau) \in \mathcal{U}_\delta} \int_0^T \eta(\theta) e^{A\tau} bu(T-\tau) d\tau, \end{aligned}$$

donde  $\eta(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ ,  $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ , ver la Figura 1. Aquí  $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$  se elige de tal manera que  $\eta$  es una función periódica. Se sigue que la perturbación externa que da solución al problema de optimización anterior es  $u^*(T-\tau) = \delta \operatorname{sign}[\eta(\theta)e^{A\tau}b]$ . Por consiguiente, los puntos  $z(T)$  que pertenecen a la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $D_z(T)$ , se pueden describir de forma paramétrica por la función vectorial

$$h(\theta) = \delta \int_0^T \operatorname{sign}[\eta(\theta)e^{A\tau}b] e^{A\tau} b d\tau, \quad \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}], \quad (5)$$

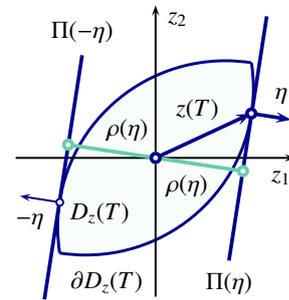


Figura 1: Esquema de construcción del conjunto de accesibilidad  $D_z(T)$ .

Luego, de acuerdo con la definición de la matriz exponencial de  $A$  en (3),

$$e^{A\tau} = e^{-\mu\tau} \begin{bmatrix} \cos(\vartheta\tau) & \sin(\vartheta\tau) \\ -\sin(\vartheta\tau) & \cos(\vartheta\tau) \end{bmatrix},$$

se puede verificar que

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}[\eta(\theta)e^{A\tau}b] &= \operatorname{sign}\left[\frac{\mu}{\vartheta} \cos(\vartheta\tau + \theta) + \sin(\vartheta\tau + \theta)\right] \\ &= \operatorname{sign}[\cos(\vartheta\tau + \theta - m)], \end{aligned}$$

donde

$$m = \arctan\left(\frac{\vartheta}{\mu}\right),$$

y, por consiguiente, la frontera del conjunto  $D_z(T)$  se describe por la función  $h : [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$h(\theta) = \delta \int_0^T \operatorname{sign}[\cos(\vartheta\tau + \theta - m)] e^{A\tau} b d\tau, \quad \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]. \quad (6)$$

Se observa de (6), que  $h$  es una función continua en el intervalos  $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$  y diferenciable a trozos en el mismo intervalo. Los puntos en los cuales  $h$  no es diferenciable, son los puntos  $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$  en los cuales el integrando no está definido, es decir, en los puntos  $(\theta, \tau)$  del conjunto  $\Omega_T := [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \times [0, T]$  que pertenecen al conjunto de rectas

$$\ell_k : \vartheta\tau + \theta - m = \frac{1}{2}(2k + 1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Por tanto, para analizar de forma explícita la frontera de los conjuntos  $D_z(T)$ , es necesario determinar aquellos puntos en

los cuales  $h$  no es diferenciable. Como caso particular, se elige el conjunto de rectas  $\ell_0, \ell_1, \ell_2, \dots$  definidas en  $\Omega_T$ , y se consideran instantes  $T > 0$  que satisfacen las desigualdades  $(\nu - 1)\pi \leq \vartheta T \leq \nu\pi$  para cada  $\nu \in \mathbb{N}$ . De esta manera, se define la sucesión de intervalos:

$$J_\nu = \left[ \frac{(\nu - 1)\pi}{\vartheta}, \frac{\nu\pi}{\vartheta} \right], \quad \nu \in \mathbb{N},$$

en los cuales se analiza la función (6) cuando  $T \in J_\nu$  para cada  $\nu \in \mathbb{N}$ .

### 2.1. Construcción inicial

Se supone como primer caso particular que  $T \in J_1$ . Entonces se puede verificar que en  $\Omega_T$  se hallan definidas las rectas  $\ell_0, \ell_1, \ell_2$  y  $\ell_3$ . Por consiguiente, se divide la región rectangular  $\Omega_T$  de tal manera que  $\Omega_T = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_4$ , donde  $\Omega_k = [\theta_{k-1}, \theta_k] \times [0, T]$ , y

$$\begin{aligned} \theta_0 &= m + \frac{1}{2}\pi, & \theta_1 &= m + \frac{3}{2}\pi - \vartheta T, \\ \theta_2 &= m + \frac{3}{2}\pi, & \theta_3 &= m + \frac{5}{2}\pi - \vartheta T, \\ \theta_4 &= m + \frac{5}{2}\pi, \end{aligned}$$

son las abscisas de los puntos de intersección de las rectas  $\ell_0, \ell_1, \ell_2$  y  $\ell_3$  con las rectas  $\tau = 0$  y  $\tau = \pi$  en el sistema de coordenadas  $O\theta\tau$ . Se observa que los intervalos  $[\theta_0, \theta_1]$  y  $[\theta_2, \theta_3]$  se reducen a los puntos  $\theta_0$  y  $\theta_2$  cuando se toma el siguiente límite lateral  $\vartheta T \rightarrow \pi^-$ .

Considerando los valores del integrando de la función (6) en cada región  $\Omega_k$ , se obtiene la representación de  $h$ :

$$h(\theta) = \delta \cdot \begin{cases} -\int_0^T e^{A\tau} b \, d\tau, & \theta \in [\theta_0, \theta_1), \\ -\int_0^{\tau_1} e^{A\tau} b \, d\tau + \int_{\tau_1}^T e^{A\tau} b \, d\tau, & \theta \in [\theta_1, \theta_2), \\ \int_0^T e^{A\tau} b \, d\tau, & \theta \in [\theta_2, \theta_3), \\ \int_0^{\tau_2} e^{A\tau} b \, d\tau - \int_{\tau_2}^T e^{A\tau} b \, d\tau, & \theta \in [\theta_3, \theta_4], \end{cases}$$

donde  $\tau_1 = (m + \frac{3}{2}\pi - \theta)/\vartheta$  y  $\tau_2 = (m + \frac{5}{2}\pi - \theta)/\vartheta$  describen las ordenadas de los puntos  $(\theta, \tau_1)$  y  $(\theta, \tau_2)$  en  $\Omega_T$  que pertenecen a las rectas  $\ell_1$  y  $\ell_2$ . Después de efectuar la integrales anteriores, se obtiene

$$h(\theta) = \frac{\delta}{\vartheta} \begin{bmatrix} h_1(\theta) \\ h_2(\theta) \end{bmatrix}, \quad \theta \in [\theta_0, \theta_4], \quad (7)$$

donde las componentes  $h_1$  y  $h_2$  son funciones que se definen por tramos, y que se representan por:

$$\begin{aligned} h_1(\theta) &= \begin{cases} -1 + f_1(T), & \theta \in [\theta_0, \theta_1), \\ -1 - f_1(T) + 2\Lambda^3 f_2\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta \in [\theta_1, \theta_2), \\ 1 - f_1(T), & \theta \in [\theta_2, \theta_3), \\ 1 + f_1(T) + 2\Lambda^5 f_2\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta \in [\theta_3, \theta_4], \end{cases} \\ h_2(\theta) &= \begin{cases} -f_2(T), & \theta \in [\theta_0, \theta_1), \\ f_2(T) + 2\Lambda^3 f_1\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta \in [\theta_1, \theta_2), \\ f_2(T), & \theta \in [\theta_2, \theta_3), \\ -f_2(T) + 2\Lambda^5 f_1\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta \in [\theta_3, \theta_4], \end{cases} \end{aligned}$$

con

$$f_1(t) := e^{-\mu t} \cos(\vartheta t), \quad f_2(t) := e^{-\mu t} \sin(\vartheta t)$$

y

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{\pi\mu}{2\vartheta}\right).$$

Se observa que la función (7) satisface las siguientes igualdades:  $p_0^-(T) = h(\theta_0) = h(\theta_4)$  y  $p_0^+(T) = h(\theta_2)$  para cada  $T \in J_1$ , donde  $p_0^\pm : J_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  se definen por

$$p_0^\pm(T) = \pm \frac{\delta}{\vartheta} \begin{bmatrix} 1 - f_1(T) \\ f_2(T) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Lo anterior muestra que  $[\theta, \bar{\theta}] = [\theta_0, \theta_4]$  define uno de los posibles intervalos donde la función  $h$  es periódica.

Se observa además que la imagen del intervalo  $[\theta_0, \theta_4]$  bajo la función  $h$ , describe una trayectoria cerrada simple en el sistema de coordenadas  $Oz_1z_2$  que es diferenciable a trozos, y que la imagen de los intervalos  $[\theta_0, \theta_1]$  y  $[\theta_2, \theta_3]$  bajo  $h$ , en los cuales  $h$  es constante, son puntos de la forma  $p_0^\pm(T)$  para cada  $T \in J_1$ . Resulta que los puntos en los cuales  $h$  no es diferenciable, son precisamente los puntos de la forma  $p_0^\pm(T)$  para cada  $T \in J_1$ .

Por otra parte, de la definición de las componentes  $h_1$  y  $h_2$  en (7), se sigue que si se eligen instantes  $T_1, T_2 > 0$  tal que  $0 < \vartheta T_1 < \vartheta T_2 < \pi$ , entonces  $\partial D_z(T_1) \cap \partial D_z(T_2) = \emptyset$  y que  $D_z(T_1) \subset D_z(T_2)$ .

Finalmente, las funciones  $p_0^\pm$  satisfacen los siguientes límites laterales:  $\alpha_0 = p_0^\pm(0^+) = (0, 0)^\top$ , y

$$\pm\alpha_1 = p_0^\pm\left(\frac{\pi^-}{\vartheta}\right) = \pm \frac{\delta}{\vartheta} \left(1 + \Lambda^2\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se concluye que para cada  $T \in J_1$ , la frontera de los conjuntos de alcanzabilidad  $D(T)$  de (2) se describen por la función vectorial  $\hat{h} : [\theta_0, \theta_4] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\hat{h}(\theta) = Ch(\theta), \quad \theta \in [\theta_0, \theta_4].$$

Es claro también que la imagen de  $[\theta_0, \theta_4]$  bajo  $\hat{h}$ , describe una trayectoria cerrada simple en el sistema de coordenadas  $Oy_1y_2$  que es diferenciable a trozos, que la imagen de los intervalos  $[\theta_0, \theta_1]$  y  $[\theta_2, \theta_3]$  bajo  $\hat{h}$ , en los cuales  $\hat{h}$  es una función constante, son puntos de la forma  $Cp_0^\pm(T)$  para cada  $T \in J_1$ , y que los puntos en los cuales la función  $\hat{h}$  no es diferenciable, son precisamente los puntos de la forma  $Cp_0^\pm(T)$  para cada  $T \in J_1$ . Además, si se eligen instantes  $T_1, T_2 > 0$  que satisfacen la desigualdad  $0 < \vartheta T_1 < \vartheta T_2 < \pi$ , entonces los correspondientes conjuntos  $\partial D(T_1)$  y  $\partial D(T_2)$  son disjuntos, lo cual se sigue de la relación (4).

### 2.2. Construcción general

Se extiende la construcción de los conjunto de alcanzabilidad de (3), suponiendo ahora que el instante  $T > 0$  que define el conjunto alcanzable  $D_z(T)$  es tal que  $T \in J_{n+1}$  para algún número natural  $n \geq 1$ . En esta situación, se observa que en el conjunto  $\Omega_T$  se hallan definidas las rectas  $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{n+3}$ , lo cual permite representar la región rectangular  $\Omega_T$  en el sistema de coordenadas  $O\theta\tau$ , de manera que  $\Omega_T = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_4$ , donde  $\Omega_k = [\theta_{k-1}, \theta_k] \times [0, T]$ , y

$$\begin{aligned} \theta_0 &= m + \frac{1}{2}\pi, & \theta_1 &= m + \frac{2n+3}{2}\pi - \vartheta T, \\ \theta_2 &= m + \frac{3}{2}\pi, & \theta_3 &= m + \frac{2n+5}{2}\pi - \vartheta T, \\ \theta_4 &= m + \frac{5}{2}\pi. \end{aligned}$$

son las abscisas de los puntos de intersección del conjunto de rectas  $\ell_0, \ell_2, \dots, \ell_{n+3}$  con las rectas horizontales  $\tau = 0$  y  $\tau = (n + 1)\pi$ . Sobre cada una de las rectas  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{n+2}$  definida en  $\Omega_T$ , se eligen puntos de la forma  $(\theta, \tau_j)$ , y se consideran las ordenadas de estos puntos para definir los instantes:

$$\tau_j = \frac{m + \frac{1}{2}(2j + 1)\pi - \theta}{\vartheta}, \quad j = 1, \dots, n + 2.$$

Estos instantes satisfacen las desigualdades

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_j < \dots < T.$$

Luego, tomando en consideración el integrando de la función (6) en cada conjunto  $\Omega_k$ , la función  $h : [\theta_0, \theta_4] \rightarrow \mathbb{R}^2$  que describe la frontera de los conjuntos de alcanzabilidad  $D_z(T)$  tiene la representación a trozos

$$h(\theta) = \delta \cdot \begin{cases} \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \int_{A_k} e^{A\tau} b \, d\tau, & \theta \in [\theta_0, \theta_1), \\ \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{k+1} \int_{B_k} e^{A\tau} b \, d\tau, & \theta \in [\theta_1, \theta_2), \\ \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_{C_{k+1}} e^{A\tau} b \, d\tau, & \theta \in [\theta_2, \theta_3), \\ \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \int_{D_{k+1}} e^{A\tau} b \, d\tau, & \theta \in [\theta_3, \theta_4], \end{cases}$$

donde los correspondientes intervalos de integración se definen a partir de la definición de los instantes  $\tau_j$ :

$$\begin{aligned} A_0 &= [0, \tau_1), & A_1 &= [\tau_1, \tau_2), \dots, & A_n &= [\tau_n, T], \\ B_0 &= [0, \tau_1), & B_1 &= [\tau_1, \tau_2), \dots, & B_{n+1} &= [\tau_{n+1}, T], \\ C_1 &= [0, \tau_2), & C_2 &= [\tau_2, \tau_3), \dots, & C_{n+1} &= [\tau_{n+1}, T], \\ D_1 &= [0, \tau_2), & D_2 &= [\tau_2, \tau_3), \dots, & D_{n+2} &= [\tau_{n+2}, T]. \end{aligned}$$

Después de efectuar las integrales correspondientes y realizar las simplificaciones de las expresiones obtenidas, se obtiene la siguiente representación paramétrica de (6):

$$h(\theta) = \frac{\delta}{\vartheta} \begin{bmatrix} h_1(\theta) \\ h_2(\theta) \end{bmatrix}, \quad \theta \in [\theta_0, \theta_4], \quad (9)$$

donde las componentes  $h_1$  y  $h_2$  son funciones escalares definidas por tramos en el intervalo  $[\theta_0, \theta_4]$  que se representan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} h_1(\theta) &= \begin{cases} -1 + (-1)^n f_1(T) + 2 \sum_{k=1}^n \Lambda^{2k+1} f_2\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_0 \leq \theta < \theta_1, \\ -1 + (-1)^{n+1} f_1(T) + 2 \sum_{k=1}^{n+1} \Lambda^{2k+1} f_2\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_1 \leq \theta < \theta_2, \\ 1 + (-1)^{n+1} f_1(T) + 2 \sum_{k=1}^n \Lambda^{2k+3} f_2\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_2 \leq \theta < \theta_3, \\ 1 + (-1)^n f_1(T) + 2 \sum_{k=1}^{n+1} \Lambda^{2k+3} f_2\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_3 \leq \theta \leq \theta_4, \end{cases} \\ h_2(\theta) &= \begin{cases} (-1)^{n+1} f_2(T) + 2 \sum_{k=1}^n \Lambda^{2k+1} f_1\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_0 \leq \theta < \theta_1, \\ (-1)^n f_2(T) + 2 \sum_{k=1}^{n+1} \Lambda^{2k+1} f_1\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_1 \leq \theta < \theta_2, \\ (-1)^n f_2(T) + 2 \sum_{k=1}^n \Lambda^{2k+3} f_1\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_2 \leq \theta < \theta_3, \\ (-1)^{n+1} f_2(T) + 2 \sum_{k=1}^{n+1} \Lambda^{2k+3} f_1\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_3 \leq \theta \leq \theta_4. \end{cases} \end{aligned}$$

Se observa que la función (9) se reduce a la expresión (7) cuando  $n = 0$ .<sup>1</sup>

Los parámetros  $\theta_0, \theta_2$  y  $\theta_4$  permiten verificar que la función definida en (9) satisface:  $p_n^-(T) = h(\theta_0) = h(\theta_4)$  y  $p_n^+(T) = h(\theta_2)$ , donde las funciones  $p_n^\pm : J_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^2$  se definen por

$$p_n^\pm(T) = \pm \frac{\delta}{\vartheta} \begin{bmatrix} 1 + 2 \sum_{k=1}^n \Lambda^{2k} + (-1)^{n+1} f_1(T) \\ (-1)^n f_2(T) \end{bmatrix},$$

mientras que los parámetros  $\theta_1$  y  $\theta_3$  se sigue que:  $q_n^+(T) = h(\theta_1)$  y  $q_n^-(T) = h(\theta_3)$ , donde  $q_n^\pm : J_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^2$  son funciones que se definen por

$$q_n^\pm(T) = \pm \frac{\delta}{\vartheta} \begin{bmatrix} -1 + (-1)^n (1 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \Lambda^{2(k-n)}) f_1(T) \\ (-1)^{n+1} (1 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \Lambda^{2(k-n)}) f_2(T) \end{bmatrix}.$$

Se observa una vez más que las funciones  $p_n^\pm$  y  $q_n^\pm$  coinciden con las funciones  $p_0^\pm$  que se definieron en (8) para  $n = 0$ .

Lo anterior muestra que uno de los intervalos donde la función  $h$  define una función periódica es precisamente el intervalo  $[\underline{\theta}, \bar{\theta}] = [\theta_0, \theta_4]$ .

Se verifica además que la imagen del intervalo  $[\theta_0, \theta_4]$  bajo la función  $h$  que se define en (9), describe una trayectoria cerrada simple en el sistema de coordenadas  $Oz_1z_2$  que es diferenciable a trozos para cada  $T \in J_{n+1}$ , y que dicha función, es continua en  $[\theta_0, \theta_4]$  y no diferenciable en los puntos de la forma  $p_n^\pm(T)$  y  $q_n^\pm(T)$  para cada  $T \in J_{n+1}$ .

Por otra parte, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , de la definición de las componentes  $h_1$  y  $h_2$  en (9), se sigue que si  $T_1, T_2 > 0$  son instantes tales que  $n\pi \leq \vartheta T_1 < \vartheta T_2 \leq (n + 1)\pi$ , entonces resulta que  $\partial D_z(T_1) \cap \partial D_z(T_2) = \emptyset$  y  $D_z(T_1) \subset D_z(T_2)$ . Además, es claro que  $D_z(T)$  es un conjunto acotado para todo  $T \in J_{n+1}$ . En consecuencia, si  $\{T_k\}$  es una sucesión estrictamente creciente de números reales no negativos tales que sus términos satisfacen la desigualdad  $n\pi \leq \vartheta T_k \leq (n + 1)\pi$ , entonces la sucesión de conjuntos alcanzables  $\{D_z(T_k)\}$  es una sucesión de conjuntos monótona creciente y acotada.

Se observa también que las funciones  $p_n^\pm$  y  $q_n^\pm$  satisfacen los límites laterales

$$\pm \alpha_n = p_n^\pm(T^+) = q_n^\pm(T^+) = \pm \frac{\delta}{\vartheta} (1 + \Lambda^2) \sum_{k=0}^{n-1} \Lambda^{2k} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

en el caso en que  $T = n\pi/\vartheta$ , mientras que

$$\pm \alpha_{n+1} = p_n^\pm(T^-) = q_n^\pm(T^-) = \pm \frac{\delta(1 + \Lambda^2)}{\vartheta} \sum_{k=0}^n \Lambda^{2k} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

cuando  $T = (n + 1)\pi/\vartheta$ .

Los resultados que se describen en los secciones 2.1 y 2.2 se resumen en el siguiente resultado.

**Teorema 1.** Si en la ecuación diferencial (2) se eligen los parámetros  $0 < \mu < \omega$ , entonces la frontera del conjunto alcanzable  $D(T)$  para  $T > 0$ , es un conjunto cerrado y acotado cuya frontera se describe por la trayectoria suave a trozos:

$$\hat{h}(\theta) = Ch(\theta), \quad \theta \in \left[ m + \frac{1}{2}\pi, m + \frac{5}{2}\pi \right],$$

donde  $h : [m + \frac{1}{2}\pi, m + \frac{5}{2}\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  se define en (9) y  $n$  denota la parte entera de  $T: n = \llbracket T \rrbracket$ . Además, las intersecciones del conjunto  $\partial D(T)$  con el eje  $Oy_1$  se dan en los puntos  $\pm \hat{\alpha}_{n+1} = C\alpha_{n+1}$ ,

<sup>1</sup>Se supone válido el siguiente hecho conocido sobre sumas:  $\sum_{k=m}^n \xi(k) = 0$  cuando  $n < m$ .

es decir,

$$\pm \hat{\alpha}_{n+1} = \pm \frac{\delta}{\omega^2} (1 + \Lambda^2) \sum_{k=0}^n \Lambda^{2k} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

### 2.3. Comportamiento asintótico

En este apartado se determina la convergencia de la frontera de los conjuntos de alcanzabilidad  $D(T)$  de la ecuación diferencial (2) cuando  $T \rightarrow \infty$ . La posibilidad de considerar este límite se debe a la representación de las funciones  $h : [\theta_0, \theta_4] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $p_m^\pm : J_{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $q_m^\pm : J_{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^2$  para cada  $T > 0$  y  $m = 0, 1, \dots, n$ , donde  $n = \lfloor T \rfloor$ .

La definición de las funciones escalares  $h_1$  y  $h_2$  en (9) permite obtener un comportamiento asintótico de los conjuntos de alcanzabilidad  $D_z(T)$  cuando  $T \rightarrow \infty$  al considerar el límite  $n \rightarrow \infty$  en la desigualdad  $n\pi \leq \vartheta T \leq (n + 1)\pi$ . Este límite describe la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $D_z(\infty)$  de la ecuación diferencial (3). Por tanto, tomando este límite, se obtiene que la función vectorial que describe la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $D_z(\infty)$ , es la función vectorial

$$h^*(\theta) = \frac{\delta}{\vartheta} \cdot \frac{1}{1 - \Lambda^2} \begin{bmatrix} h_1^*(\theta) \\ h_2^*(\theta) \end{bmatrix}, \quad \theta \in [\theta_0, \theta_4], \quad (12)$$

donde

$$h_1^*(\theta) = \begin{cases} \Lambda^2 - 1 + 2\Lambda^3 f_2\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta \in [\theta_0, \theta_2], \\ 1 - \Lambda^2 + 2\Lambda^5 f_2\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta \in [\theta_2, \theta_4], \end{cases}$$

$$h_2^*(\theta) = \begin{cases} 2\Lambda^3 f_1\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta \in [\theta_0, \theta_2], \\ 2\Lambda^5 f_1\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta \in [\theta_2, \theta_4]. \end{cases}$$

Se puede comprobar que la imagen del intervalo  $[\theta_0, \theta_4]$  bajo la función  $h^*$  describe una trayectoria cerrada simple en el sistema de coordenadas  $Oz_1z_2$ , y que la función  $h^*$  es continua en el intervalo  $[\theta_0, \theta_4]$  y diferenciable a trozos en dicho intervalo. Más aún, se puede ver que  $h^*(\theta_0) = -\alpha^*$  y  $h^*(\theta_2) = \alpha^*$ , donde  $\pm\alpha^*$  denotan las intersecciones de esta función vectorial con el eje  $Oz_1$ , y cuyos valores se obtienen del límite de la sucesión de puntos  $\{\pm\alpha_n\}$  definidos en (10) y (11), es decir,

$$\begin{aligned} \pm\alpha^* &= \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \pm \frac{\delta}{\vartheta} (1 + \Lambda^2) \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^{2k} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \pm \frac{\delta}{\vartheta} \frac{1 + \Lambda^2}{1 - \Lambda^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

de donde resulta

$$\pm\alpha^* = \pm \frac{\delta}{\vartheta} \frac{1 + \Lambda^2}{1 - \Lambda^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

De la definición de la función (12) se puede concluir que el conjunto alcanzable  $D_z(\infty)$  de la familia de ecuaciones diferenciales (3) es un conjunto cerrado y acotado en el sistema de coordenadas  $Oz_1z_2$ . La mayor y menor distancia del origen de coordenadas de  $Oz_1z_2$  a las rectas tangentes soporte  $\Pi(\eta)$  y  $\Pi(-\eta)$  del conjunto  $\partial D_z(\infty)$ , se obtiene a partir de las soluciones de la ecuación  $\rho'(\theta) = 0$ ,  $\theta \in [m + \frac{\pi}{2}, m + \frac{5}{2}\pi]$ , donde  $\rho(\theta) = \eta(\theta)h^*(\theta)$  y  $\eta(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ ; es decir, a partir de las soluciones de las ecuaciones

$$\exp\left[\mu\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right)\right] \sin(\theta) = -\frac{2\mu}{\omega} \frac{\Lambda^3}{1 - \Lambda^2}, \quad \theta \in [m + \frac{1}{2}\pi, m + \frac{1}{2}\pi],$$

$$\exp\left[\mu\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right)\right] \sin(\theta) = \frac{2\mu}{\omega} \frac{\Lambda^5}{1 - \Lambda^2}, \quad \theta \in [m + \frac{3}{2}\pi, m + \frac{5}{2}\pi],$$

ver Formals'kii (1974).

Las observaciones anteriores permite determinar propiedades análogas del conjunto alcanzable  $D(\infty)$  de la familia de ecuaciones diferenciales (2). Los resultados se resumen en el siguiente resultado.

**Teorema 2.** Si en la ecuación diferencial (2) se eligen los parámetros  $0 < \mu < \omega$ , entonces el conjunto de alcanzabilidad  $D(\infty)$  es un conjunto cerrado y acotado, cuya frontera se describe por la trayectoria suave a trozos:

$$\hat{h}^*(\theta) = Ch^*(\theta), \quad \theta \in \left[m + \frac{1}{2}\pi, m + \frac{5}{2}\pi\right], \quad (14)$$

donde  $h^* : [\theta_0, \theta_4] \rightarrow \mathbb{R}^2$  es definida en (12). La intersección del conjunto de alcanzabilidad con el eje  $Oy_1$  se da en los puntos  $\pm\hat{\alpha}^* = \pm C\alpha^*$ , es decir,

$$\pm\hat{\alpha}^* = \pm \frac{\delta}{\omega^2} \frac{1 + \Lambda^2}{1 - \Lambda^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Es posible determinar la mayor y menor distancia del origen de coordenadas  $Oy_1y_2$  a las rectas tangentes soporte de la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $D(\infty)$  a partir de la solución de la ecuación  $\hat{\rho}'(\theta) = 0$ ,  $\theta \in [m + \frac{\pi}{2}, m + \frac{5}{2}\pi]$ , donde  $\hat{\rho}(\theta) = \eta(\theta)\hat{h}^*(\theta)$ .

### 3. Ciclo límite máximo

La importancia e interpretación geométrica de los puntos  $\pm\hat{\alpha}^*$  definidos en (15), así como la trayectoria que describe la función vectorial  $\hat{h}^* : [\theta_0, \theta_4] \rightarrow \mathbb{R}^2$  que se define en (14), se debe a que dichos elementos forman parte de la solución del problema de desviación máxima de B. V. Bulgakov, cuya formulación se puede consultar en Elishakoff and Ohsaki (2010). En tal situación, la aplicación del problema de desviación máxima para sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma (2), ha sido analizado exhaustivamente en la literatura, ver por ejemplo los trabajos (Zhermolenko, 1980; Aleksandrov et al., 2007; Zhermolenko, 2007; Aleksandrov et al., 2016). Los resultados se obtienen como un corolario.

**Corolario 1.** Bajo la composición de la función definida en (14) y las aplicaciones  $m + \frac{3}{2}\pi - \vartheta t \mapsto \theta$  y  $m + \frac{5}{2}\pi - \vartheta t \mapsto \theta$  cuando  $t \in [0, \pi/\vartheta)$ , se obtiene una trayectoria cerrada que describe un ciclo límite  $C^*$  de la ecuación diferencial (2) bajo la acción de la perturbación externa  $u^*(t) = \delta \text{sign } y_2(t)$ , y cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$y_1^*(t) = \pm \frac{\delta}{\omega^2} \left(1 - \frac{2e^{-\mu t}}{\vartheta(1 - \Lambda^2)} (\mu \sin(\vartheta t) + \vartheta \cos(\vartheta t))\right),$$

$$y_2^*(t) = \pm \frac{2\delta e^{-\mu t}}{\vartheta(1 - \Lambda^2)} \sin(\vartheta t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\vartheta}.$$

Del corolario 1 se concluye que la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $D(\infty)$  de (2), se obtiene como solución de la ecuación diferencial (2) cuando se considera la perturbación externa  $u^*(t) = \delta \text{sign } y_2(t)$ , es decir, se cumple:  $D(\infty) = C^*$ . Se observa además que, a diferencia de los conjuntos  $D(T)$  de (2)

para cada  $T > 0$ , el conjunto  $D(\infty)$  no posee puntos esquina, ver Bugrov and Formals’kii (2017).

En el contexto del problema de desviación máxima de Bulgakov,  $\hat{\alpha}^*$  es llamada *desviación máxima* de oscilación de la solución  $y^*(t) = (y_1^*(t), y_2^*(t))^T$  respecto al eje  $Oy_1$ ,  $u^*(t) = \delta \text{sign } y_2(t)$  es llamada *peor perturbación externa*, y  $C^*$  es llamado *ciclo límite máximo*, ver (Zhermolenko, 1980, 2007; Aleksandrov et al., 2007).

Se observa que los puntos  $\pm \hat{\alpha}^*$  definidos en (15) dependen linealmente del parámetro que describe los recursos disponibles del conjunto de perturbaciones externas  $\mathcal{U}_\delta$ ; es decir, admiten como factor el parámetro  $\delta > 0$ . Esta propiedad se observa también de la definición de los parámetros (13) y la definición de la función vectorial (12). Lo anterior significa que el diámetro del conjunto alcanzable  $D(\infty)$  sobre el eje  $Oy_1$  se puede ajustar si se consideran valores distintos del parámetro  $\delta > 0$ . Esta característica ha sido aprovechada para establecer un criterio de estabilidad robusta en Aleksandrov et al. (2016).

En el siguiente ejemplo se ilustra los resultados obtenidos y se muestra un gráfico que se ha obtenido bajo la colección de macros PSTricks.

**Ejemplo 1.** Como caso particular para la ecuación diferencial (2) se supone que  $\mu = 0.2$ ,  $\omega = 1.0$  y  $\delta = 1.0$ . Para estos valores se obtiene  $\vartheta \approx 0.9797$ ,  $m \approx 1.3694$  y  $\Lambda \approx 0.7256$ .

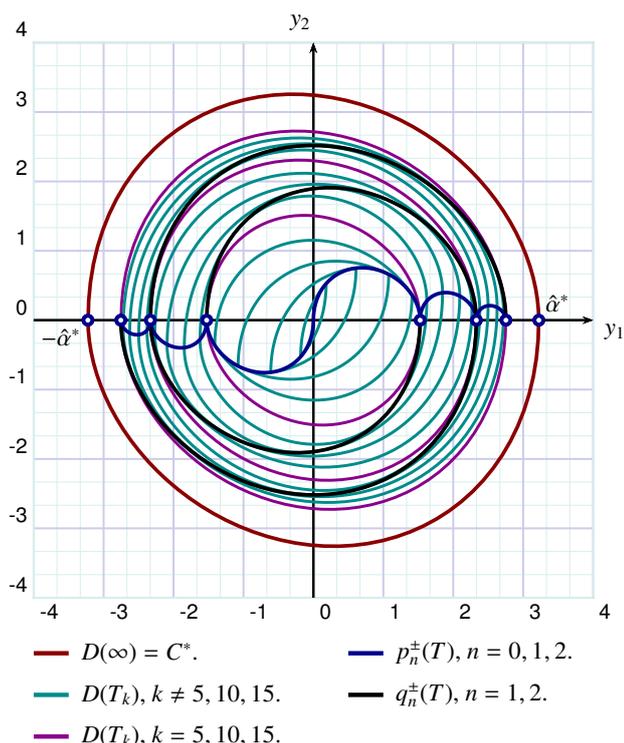


Figura 2: Conjunto de alcanzabilidad  $D(\infty) = C^*$ , conjuntos de alcanzabilidad  $D(T_k)$ , y trayectorias  $p_n^+$  y  $q_n^+$  donde no son diferenciables las trayectorias que describen las fronteras de los conjuntos de alcanzabilidad  $D(T_k)$  del Ejemplo 1.

En la Figura 2 se muestran diferentes conjuntos de alcanzabilidad  $D(T_k)$  que se obtienen como imagen de la función  $\hat{h}(\theta) = Ch(\theta)$ , en los cuales se emplean los valores

$$T_{5j+k} = \left(j + \frac{k}{5}\right) \frac{\pi}{\vartheta}, \quad j = 0, 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots, 5,$$

es decir,  $T_1 \approx 0.6412, T_2 \approx 1.2825, \dots, T_{15} = 9.6191$ . En la Figura 1 se muestran también las gráficas de las funciones  $p_0^+$  y  $p_0^-$  sobre las cuales la función  $h$  no es diferenciable, así como las funciones  $p_n^+$  y  $q_n^+$  para  $n = 1, 2$ .

De acuerdo con los resultados del corolario 1, se determina la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $D(\infty) = C^*$ , cuyas intersecciones con el eje  $Oy_1$  se obtienen en los puntos  $\pm \hat{\alpha}^* = \pm C\alpha^*$ , donde  $\hat{\alpha}^* \approx (3.2249, 0)^T$ .

Se verifica también que la menor y mayor distancia del origen de coordenadas de  $Oy_1y_2$  a las rectas tangentes soporte de la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $D(\infty)$  se da en los valores  $\tilde{\theta}_1 \approx 4.0292, \tilde{\theta}_2 \approx 5.3336, \tilde{\theta}_3 \approx 7.1708$  y  $\tilde{\theta}_4 \approx 8.4752$ , en los cuales se obtienen las distancias  $\hat{\rho}(\tilde{\theta}_1) = \hat{\rho}(\tilde{\theta}_3) \approx 3.0760$  y que  $\hat{\rho}(\tilde{\theta}_2) = \hat{\rho}(\tilde{\theta}_4) \approx 3.3057$ .

#### 4. Conclusiones

Se ha determinado de forma explícita la frontera de los conjuntos de alcanzabilidad  $D(T)$  de la ecuación diferencial (2) definidos para cada instante  $T > 0$ . Se ha mostrado que la función vectorial que describe tales conjuntos, no es diferenciable sobre un conjunto de puntos que pertenecen a trayectorias definidas en el plano. Se ha analizado también el comportamiento de estos conjuntos cuando  $T \rightarrow \infty$  y, en particular, se ha mostrado que la frontera del conjunto  $D(\infty)$  coincide con el ciclo límite máximo  $C^*$  que se obtiene como solución del problema de desviación máxima de Bulgakov, de acuerdo con resultados conocidos en la literatura. Los resultados obtenidos se han ilustrado de forma numérica en un ejemplo.

#### Agradecimientos

Los autores agradecen las observaciones a este trabajo por parte de los revisores, las cuales ayudaron a enriquecerlo.

#### Referencias

Aleksandrov, V. V., Aleksandrova, O. V., Konovalenko, I., Tikhonova, K. V., 2016. Perturbed stable systems on a plane. Part I. Moscow University Mechanics Bulletin 71 (5), 108–113.  
DOI: 10.3103/S0027133016050022

Aleksandrov, V. V., Alexandrova, O. V., Prikhod’ko, I. P., Temoltzi-Auila, R., 2007. Synthesis of self-oscillations. Moscow University Mechanics Bulletin 62 (3), 65–68.  
DOI: 10.3103/S0027133007030016

Blagodatskikh, V. I., 2001. Introducción al control óptimo: Teoría lineal. Vysshaya Shkola, Moscú, [En ruso].

Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E., Balakrishnan, V., 1994. Linear matrix inequalities in system and control theory. SIAM, Philadelphia.

Bugrov, D. I., Formals’kii, A. M., 2017. Time dependence of the attainability regions of third order systems. Journal of Applied Mathematics and Mechanics 81, 106–113.  
DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2017.08.004

Chernousko, F. L., 1988. Estimación de estados fase de sistemas dinámicos. Método de elipsoides. Nauka, Moscú, [En ruso].

Elishakoff, I., Ohsaki, M., 2010. Optimization and anti-optimization of structures under uncertainty. Imperial College Press, London.

Formals’kii, A. M., 1974. Controlabilidad y estabilidad de sistemas con recursos de control acotados. Nauka, Moscú, [En ruso].

Kumkov, S. S., Zharinov, A. N., 2004. Constructing attainability sets for nonlinear controlled systems in the plane. IFAC Proceedings Volumes 37 (17), 158–168, iFAC Workshop GSCP-04: Generalized solutions in control problems, Pereslavl-Zalessky, Russia, September 21-29, 2004.  
DOI: 10.1016/j.jmaa.2007.01.109

Kurzanski, A., Valyi, I., 1999. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser, Boston.

- Lee, E. B., Markus, L., 1967. Foundations of optimal control theory. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Pitarch, J. L., Sala, A., Arino, C. V., 2015. Estabilidad de sistemas Takagi-Sugeno bajo perturbaciones persistentes: estimación de conjuntos inescapables. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial* 12, 457–466.  
DOI: 10.1016/j.riai.2015.09.007
- Sabin, G. C. W., Summers, D., 1990. Optimal technique for estimating the reachable set of a controlled n-dimensional linear system. *International Journal of Systems Science* 21 (4), 657–692.  
DOI: 10.1080/00207729008910401
- Shen, C., Zhong, S., 2011. The ellipsoidal bound of reachable sets for linear neutral systems with disturbances. *Journal of the Franklin Institute* 348, 2570–2585.  
DOI: 10.1016/j.jfranklin.2011.07.017
- Vinnikov, E. V., 2015. Construction of attainable sets and integral funnels of nonlinear controlled systems in the Matlab environment. *Computational Mathematics and Modeling* 26 (1), 107–119.  
DOI: 10.1007/s10598-014-9259-5
- Zhermolenko, V. N., 1980. Sobre el problema de Bulgakov referente a la desviación máxima de un sistema oscilatorio de segundo orden. *Vestn. Mosk. Univ. Ser. 1: Mat. Mekh.* 2, 87–91, [En ruso].
- Zhermolenko, V. N., 2007. Maximum deviation of oscillating system of the second order with external and parametric disturbances. *Journal of Computer and Systems Sciences International* 46, 407–411.  
DOI: 10.1134/S1064230707030094
- Zhermolenko, V. N., 2012. On maximal deviation of linear system. *Automation and Remote Control* 73 (7), 1117–1125.  
DOI: 10.1134/S0005117912070016