

## Algunos errores en el uso de funciones de Lyapunov para control de estructura variable “Some mistakes using Lyapunov functions for variable structure control”

D. I. Vázquez-Dueñas <sup>\*</sup>, J. L. Álvarez-Urias 

*Depto. de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Instituto Tecnológico de Sonora, 5 de Febrero 818 Sur, C.P. 85000, Cd. Obregón, Sonora, México.*

### Resumen

Este trabajo discute errores encontrados en el uso de funciones de Lyapunov propuestas en resultados recientes de control de estructura variable, tales como: parámetros inválidos en diseños continuos con convergencia en tiempo finito; funciones implícitas de Lyapunov para sistemas con perturbaciones donde las condiciones de diseño para la ley de control no pueden satisfacerse para la clase de perturbaciones válidas según los autores; y funciones de Lyapunov discontinuas donde dan condiciones LMI que no pueden ser signadas.

#### Palabras Clave:

Método de Lyapunov, control robusto, control por modos deslizantes.

### Abstract

This work discusses some errors found in Lyapunov function proposals of recent results on variable structure control, such as: invalid parameters in continuous controller designs with finite-time convergence; based on implicit Lyapunov functions for systems with disturbances where the design conditions for the control law can not be satisfied for the class of disturbances valid according to the authors; and based on piecewise Lyapunov functions where the authors give LMI conditions that can not be signed.

#### Keywords:

Lyapunov methods, robust control, sliding mode control.

## 1. Introducción

El control de estructura variable al que pertenecen los modos deslizantes, que surgió en la antigua Unión Soviética en los años cincuenta (Anosov, 1959; Utkin and Young, 1978), constituye una de las áreas más exitosas y prolíficas del control automático (Shtessel et al., 2013). Desde el punto de vista matemático, esta área ha representado retos importantes que no se habían planteado hasta su aparición: el manejo de sistemas de ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo, cuyas condiciones de existencia y unicidad de soluciones requería interpretaciones novedosas como la de Filippov (Filippov, 1960) o la del control equivalente (Utkin, 1992); la convergencia no asintótica o en tiempo finito (Haimo, 1986) que podía conseguirse por medios diversos como la  $\eta$ -alcanzabilidad (Edwards and Spurgeon, 1998) o los argumentos de homogeneidad (Bhat and Bernstein, 2005); la reducción de orden o régimen desli-

zante cuyos fenómenos indeseables de señales de frecuencia infinita que causaban cascabeleo (Levant, 2010) fue significativamente reducido con la introducción de los esquemas de alto orden (Bartolini et al., 1998).

Sin embargo, como se ilustra mediante tres ejemplos detallados en el presente artículo, la explosión de trabajos en esta área y la rapidez con que algunos desarrollos son aceptados más por razones de autoridad que por argumentos científicos (Levant, 2003), han contribuido a la propagación de errores ampliamente citados por otros autores. Muchos trabajos en esta área comparten características que los hacen más vulnerables a la producción y transmisión de errores: carencia de ejemplos, falta de datos completos para la reproducción de las simulaciones, abuso del carácter presuntamente obvio de ciertos argumentos, rechazo a los contrastes más directos en favor de argumentos especiosos que invocan trabajos más sofisticados que no son necesarios, etcétera. Este trabajo concluye, a partir de tres casos

\* Autor para correspondencia: dexmen109@hotmail.com

Correo electrónico: dexmen109@hotmail.com (David Ismael Vázquez-Dueñas); jorge\_kookee\_04@hotmail.com (Jorge Luis Álvarez-Urias).

distintos, con una serie de recomendaciones a los investigadores de esta área a fin de prevenir en lo sucesivo errores similares.

Los argumentos de las variables se omitirán cuando puedan deducirse del contexto; las derivadas son respecto al tiempo  $t$  a menos que se indique lo contrario.

## 2. Una demostración inconclusa de convergencia global en tiempo finito

En (Bhat and Bernstein, 1998, Proposición 1) se tiene el siguiente resultado:

El origen  $(x, y) = (0, 0)$  del doble integrador

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad (1)$$

bajo la ley de control

$$u = -\text{sgn}(y)|y|^\alpha - \text{sgn}(\phi_\alpha(x, y))|\phi_\alpha(x, y)|^{\alpha/(2-\alpha)} \quad (2)$$

es un punto de equilibrio globalmente estable en tiempo finito (GFTS, por sus siglas en inglés) para  $\alpha \in (0, 1)$ , donde  $\phi_\alpha(x, y) \triangleq x + (1/(2-\alpha))\text{sgn}(y)|y|^{2-\alpha}$ .

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene el sistema en lazo cerrado

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\text{sgn}(y)|y|^\alpha - \text{sgn}(\phi_\alpha(x, y))|\phi_\alpha(x, y)|^{\alpha/(2-\alpha)}, \quad (3)$$

cuya estabilidad es analizada en Bhat and Bernstein (1998) por medio de la siguiente función continuamente diferenciable

$$V(x, y) = \frac{2-\alpha}{3-\alpha}|\phi_\alpha|^{(3-\alpha)/(2-\alpha)} + sy\phi_\alpha + \frac{r}{3-\alpha}|y|^{3-\alpha}, \quad (4)$$

donde  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $r > 1$ , y  $0 < s < 1$  son fijas.

La prueba de estabilidad en Bhat and Bernstein (1998) para el origen del lazo cerrado arriba descrito se basa en (Haimo, 1986, Proposición 1): el origen de (3) es GFTS si

2.1. el origen es globalmente asintóticamente estable (GAS), es decir, si existe una función de Lyapunov  $V(x, y)$  para (3) con las siguientes características (Khalil, 2002, Teorema 4.2):

2.1.1.  $V(x, y) > 0$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$  con  $V(0, 0) = 0$ . Para establecer que  $V(x, y) > 0$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ , se utiliza un argumento de homogeneidad, que se basa en:

2.1.1.1. probar que la función es positiva en alguna curva que rodea el origen, y

2.1.1.2. probar que el valor de  $V(x, y)$  en cualquier punto en  $\mathbb{R}^2$  es un múltiplo positivo de su valor en un punto de la curva.

2.1.2.  $\dot{V}(x, y) < 0$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ , se prueba utilizando nuevamente argumentos de homogeneidad, es decir:

2.1.2.1. probando que la función es negativa en alguna curva que rodea al origen, y

2.1.2.2. probando que el valor de  $\dot{V}(x, y)$  en cualquier punto de  $\mathbb{R}^2$  es un múltiplo positivo de su valor en un punto de la curva.

2.1.3.  $V(x, y)$  es radialmente no acotada.

2.2.  $\dot{V}(x, y) \leq r(V)$  donde  $\dot{z} = r(z)$ ,  $z \in \mathbb{R}$ , es una ecuación de tiempo finito, que a su vez se prueba por medio de (Haimo, 1986, Fact 1).

Enseguida se proporcionan detalles de esta prueba que en Bhat and Bernstein (1998) son omitidos; la lista de arriba servirá como guía para ello. Como se verá, uno de los puntos no es probado correctamente en ese artículo, lo que deja la prueba inconclusa.

Parte 2.1.1. Probando por homogeneidad que  $V(x, y)$  es definida positiva en cualquier punto  $(x, y) \neq (0, 0)$ :

En Bhat and Bernstein (1998) se verifica que  $V(0, 0) = 0$  por evaluación directa; luego se prueba que  $V(x, y)$  es definida positiva en la curva  $\mathcal{O} = \{(x, y) : \max_{(x,y) \neq (0,0)} \{|\phi_\alpha|^{1/(2-\alpha)}, |y|\} = 1\}$  que rodea al origen (ilustrada en la Figura 1 para  $\alpha = 0,5$ ,  $s = 0,3$ ,  $r = 3$ ).

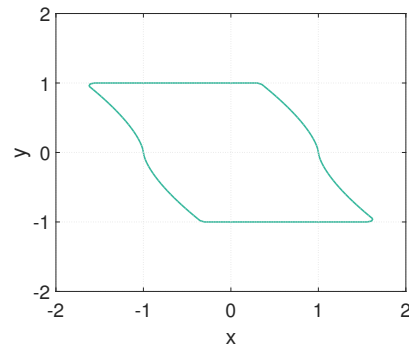


Figura 1: Conjunto  $\mathcal{O}$  con  $\alpha = 0,5$ ,  $s = 0,3$ ,  $r = 3$ .

El signo de  $V(x, y)$  en  $\mathcal{O}$  es analizado por partes:

- Si  $\max\{|\phi_\alpha|^{1/(2-\alpha)}, |y|\} = 1$  con  $|\phi_\alpha|^{1/(2-\alpha)} = 1$  y  $|y| < 1$ , se tiene que  $sy\phi_\alpha$  es el único elemento de  $V$  que puede ser no positivo. Entonces, si  $y$  y  $\phi_\alpha$  son ambos positivos o negativos, la función  $V$  es definida positiva. Por otro lado, es necesario analizar el caso cuando  $y$  y  $\phi_\alpha$  son de signo distinto:  $y < 0$  con  $\phi_\alpha = 1$  o  $y > 0$  con  $\phi_\alpha = -1$ . Para ambos casos la función  $V$  es

$$V(x, y) = \frac{2-\alpha - (3-\alpha)s|y| + r|y|^{3-\alpha}}{3-\alpha}.$$

Como el denominador de la expresión anterior es positivo, falta asegurar que el numerador también lo sea. Por medio de análisis de la primera y segunda derivada del numerador es posible concluir que  $V(x, y)$  es positiva en este segmento de la curva.

- Si  $\max\{|\phi_\alpha|^{1/(2-\alpha)}, |y|\} = 1$  con  $|y| = 1$  y  $|\phi_\alpha|^{1/(2-\alpha)} < 1$ , donde  $\phi_\alpha$  y  $y$  son del mismo signo,  $V$  es definida positiva. Es necesario analizar los casos donde  $y$  y  $\phi_\alpha$  tienen distinto signo, con  $|y| = 1$ ; en ambos casos  $V(x, y)$  queda como:

$$V(x, y) = \frac{(2-\alpha)|\phi_\alpha|^{(3-\alpha)/(2-\alpha)} - (3-\alpha)s|\phi_\alpha| + r}{3-\alpha}.$$

Enfocándose de nuevo en el numerador, por medio del análisis de la primera y segunda derivada es posible concluir que  $V(x, y)$  es positiva en este segmento de la curva.

Por lo tanto,  $V(x, y) > 0$  en  $\mathcal{O}$ .

Ahora que se sabe que  $V(x, y) > 0$  en la curva  $\mathcal{O}$ ; se demuestra que es positiva en todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$  ya que  $V(x, y)$  es un múltiplo positivo de la misma función evaluada en  $\mathcal{O}$ . Para esto es suficiente mostrar que  $V(x, y)$  es una función homogénea que cumple con:

$$V(k^{2-\alpha}x, ky) = k^{3-\alpha}V(x, y) \quad (5)$$

y, dado un par  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$  se proporciona una constante  $k > 0$  tal que  $(k^{2-\alpha}x, ky) \in \mathcal{O}$ , donde  $V(x, y) > 0$ . La constante  $k$  puede tomar uno de dos valores para que cualquier punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$  se “proyecte” en un punto de la curva  $\mathcal{O}$  garantizando la positividad de  $V(x, y)$ ; dichos valores son:  $k = |\phi_\alpha|^{-1/(2-\alpha)}$  y  $k = 1/|y|$  (detalles omitidos por brevedad).

Parte 2.1.2. Probando que  $\dot{V}(x, y) < 0 \forall (x, y) \neq (0, 0)$ :

La derivada de  $V(x, y)$  respecto al tiempo es:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) = & -ry^2 - s|\phi_\alpha|^{2/(2-\alpha)} - |y|^{1-\alpha}|\phi_\alpha|^{(1+\alpha)/(2-\alpha)} \\ & - s\phi_\alpha \operatorname{sgn}(y)|y|^\alpha - (r+s)|y|^{2-\alpha}|\phi_\alpha|^{\alpha/(2-\alpha)} \operatorname{sgn}(y\phi_\alpha). \end{aligned}$$

Note que  $\dot{V}(x, y)$  no es negativa para todo  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $0 < s < 1$ , y  $r > 1$ , lo que contradice Bhat and Bernstein (1998). Por ejemplo  $\alpha = 0,5$ ,  $s = 0,6$ ,  $r = 10$  y el punto  $(x, y) = (1, 2357, -0,5)$  arrojan  $\dot{V}(x, y) = 0,3648 > 0$ .

Ahora bien, puesto que los argumentos son de homogeneidad basados en la curva  $\mathcal{O}$  definida arriba, el signo de  $\dot{V}(x, y)$  se analiza en dicha curva:

- Por un lado, si  $\max\{|\phi_\alpha|^{1/(2-\alpha)}, |y|\} = 1$  con  $|\phi_\alpha|^{1/(2-\alpha)} = 1$  y  $|y| < 1$ , con  $y$  y  $\phi_\alpha$  ambos del mismo signo, entonces la función  $\dot{V}$  es definida negativa. Por otro lado, cuando los signos de  $y$ ,  $\phi_\alpha$  son distintos ( $y < 0$  con  $\phi_\alpha = 1$  o  $y > 0$  con  $\phi_\alpha = -1$ ) tenemos que:

$$\dot{V} = -r|y|^2 - |y|^{1-\alpha} - s + s|y|^\alpha + (r+s)|y|^{2-\alpha}.$$

La Figura 2 despliega  $V(x, y)$  para los valores  $(x, y) \in \mathcal{O}$  con  $y \in [-1, 1]$ ,  $r \in [1, 10]$ ,  $s = 0,6$ ,  $\alpha = 0,5$ . Claramente, existen valores en los que  $\dot{V}(x, y)$  es positiva, lo que constituye un error.

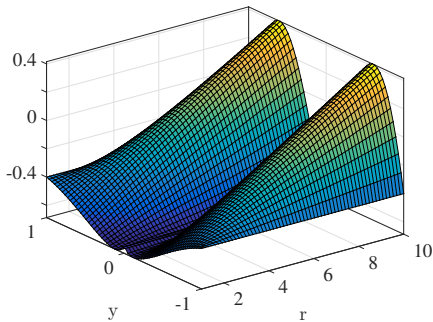


Figura 2:  $\dot{V}(x, y)$  con  $s = 0,6$  y  $\alpha = 0,5$ .

- Si  $\max\{|\phi_\alpha|^{1/(2-\alpha)}, |y|\} = 1$  con  $|\phi_\alpha|^{1/(2-\alpha)} < 1$  y  $|y| = 1$ , con  $y$  y  $\phi_\alpha$  ambos del mismo signo, entonces la función  $\dot{V}$  es definida negativa. Por otro lado, cuando  $y$ ,  $\phi_\alpha$  son de distinto signo ( $y = 1$  con  $\phi_\alpha < 0$  o  $y = -1$  con  $\phi_\alpha > 1$ ), tenemos:

$$\dot{V} = -r - s|\phi_\alpha|^{2/(2-\alpha)} - |\phi_\alpha|^{(1+\alpha)/(2-\alpha)} + s|\phi_\alpha| + (r+s)|\phi_\alpha|^{\alpha/(2-\alpha)}.$$

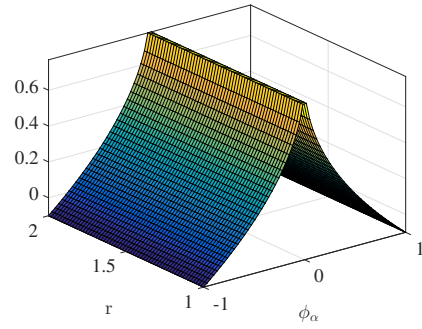


Figura 3:  $\dot{V}(x, y)$  con  $s = 0,9$  y  $\alpha = 0,0001$ .

La Figura 3 despliega  $V(x, y)$  para los valores  $(x, y) \in \mathcal{O}$  con  $\phi_\alpha \in [-1, 1]$ ,  $r \in [1, 2]$ ,  $s = 0,9$ ,  $\alpha = 0,0001$ : nuevamente existen valores en los que  $\dot{V}(x, y)$  es positiva, lo que desde luego es un error.

Las Figuras 2 y 3 pueden variar dependiendo de los valores de  $s$  y  $r$ .

En la Figura 4 se muestran las trayectorias de los estados del sistema en lazo cerrado (3) con  $\alpha = 0,5$ ,  $s = 0,6$ ,  $r = 10000$  y condición inicial  $(x_0, y_0) = (0,728072, 0,55)$ , que son valores aceptados en la metodología de Bhat and Bernstein (1998). En la Figura 5 se muestra la señal de control  $u$  que se vuelve discontinua después del tiempo  $t = 2,79s$ , característica que presentan las leyes de control por estructura variable. En la Figura 6 se muestra el comportamiento de la función (4) y en la Figuras 7 su derivada, la función  $V(x, y)$  no es monótonamente decreciente y su derivada no es negativa para todo tiempo  $t$ , dichos comportamientos no se corresponden a los de una función de Lyapunov válida.

Puede garantizarse  $\dot{V}(x, y) < 0$  en  $\mathcal{O}$  seleccionando los valores  $r = 2$  y  $s = 0,01$ , como garantizan (al menos gráficamente, no analíticamente) la condición deseada entonces  $\dot{V} < 0$  en  $\mathcal{O}$ .

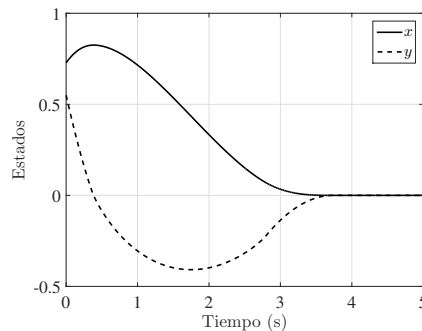
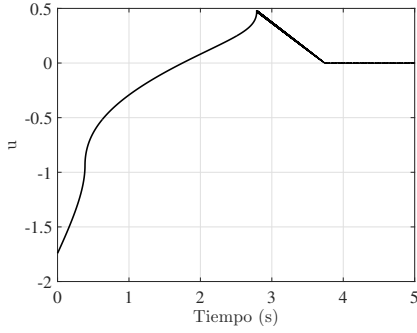
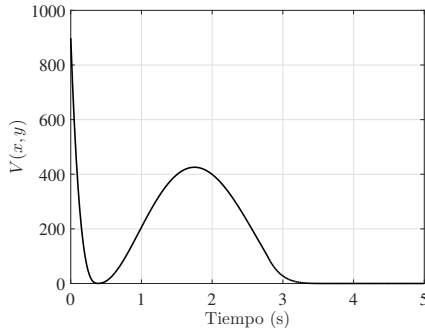
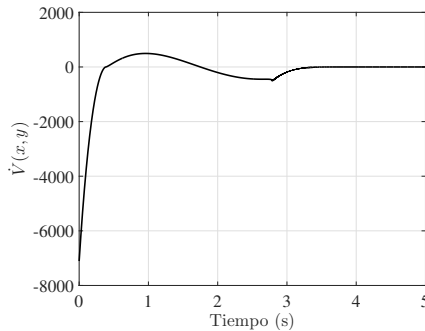


Figura 4: Trayectoria de los estados del sistema con  $\alpha = 0,5$ ,  $s = 0,6$  y  $r = 10000$ .

Figura 5: Señal de control  $u$  con  $\alpha = 0,5$ ,  $s = 0,6$  y  $r = 10000$ .Figura 6: Función (4) con  $\alpha = 0,5$ ,  $s = 0,6$  y  $r = 10000$ .Figura 7: Derivada de (4) con  $\alpha = 0,5$ ,  $s = 0,6$  y  $r = 10000$ .

Naturalmente, si  $\dot{V}(x, y) < 0$  en  $\mathcal{O}$ , puede probarse por homogeneidad que  $\dot{V}(x, y) < 0$ ,  $\forall (x, y) \neq (0, 0)$ , usando el hecho de que  $\dot{V}(x, y)$  satisface

$$\dot{V}(k^{2-\alpha}x, ky) = k^2 \dot{V}(x, y) \quad (6)$$

para  $k > 0$  y  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ : la negatividad de  $\dot{V}(x, y)$  se sigue de la negatividad de  $\dot{V}(k^{2-\alpha}x, ky)$  porque está evaluada en  $\mathcal{O}$  donde la negatividad ya ha sido establecida, no para  $r > 1$  y  $0 < s < 1$  como se afirma en Bhat and Bernstein (1998), sino con  $r = 2$ ,  $s = 0,01$ .

*Parte 2.1.3. Probando que  $V(x, y)$  es radialmente no acotada:*

Una función  $V(x)$  que satisface la condición  $V(x) \rightarrow \infty$  cuando  $\|x\| \rightarrow \infty$  se denomina radialmente no acotada (Khalil, 2002). Del lado izquierdo de (5) se puede ver que, si  $k \rightarrow \infty$  entonces  $\|(k^{2-\alpha}x, ky)\| \rightarrow \infty$ , y del lado derecho si  $k \rightarrow \infty$  entonces  $V(x, y) \rightarrow \infty$ .

Por lo tanto,  $V(x, y)$  es una función de Lyapunov del sistema en lazo cerrado (3) en  $\mathbb{R}^2$ , tal que el origen  $(x, y) = (0, 0)$  es GAS.

*Parte 2.2. Probando que  $\dot{V}(x, y) \leq r(V)$  donde  $\dot{z} = r(z)$ ,  $z \in \mathbb{R}$ , es una ecuación de tiempo finito:*

Un sistema unidimensional  $\dot{x} = r(x)$  con  $r(0) = 0$ , y  $x \in \mathbb{R}$  es tiempo finito si y sólo si (Haimo, 1986, Fact 1)

1.  $xr(x) \leq 0$  y  $xr(x) = 0$  sólo para  $x = 0$ , con  $x$  en una vecindad alrededor del origen, y
2.  $\int_p^0 (dx/r(x)) < \infty$ ,  $\forall p \in \mathbb{R}$ .

La primera condición es para la existencia de un punto de equilibrio asintótico que ya fue probado en las partes anteriores. Lo siguiente será analizar la segunda condición.

Ya que  $V$  es radialmente no acotada (probado en 2.1.3.), entonces el conjunto  $\mathcal{V} = \{(x, y) : V(x, y) = 1\}$  es un compacto (Khalil, 2002), lo que indica que  $\max \dot{V} \in \mathcal{V}$  existe ya que  $\dot{V}$  es continua y el conjunto  $\mathcal{V}$  contiene todos sus límites y es acotado.

Definiendo  $c = -\max_{(x,y) \in \mathcal{V}} \dot{V}(x, y)$  con  $c > 0$  porque  $-\dot{V}$  es definida positiva y  $(0, 0) \notin \mathcal{V}$ . Si se utiliza  $k = [V(x, y)]^{-1/(3-\alpha)}$  en (5), se tiene

$$V \left( \left( [V(x, y)]^{-1/(3-\alpha)} \right)^{2-\alpha} x, \left( [V(x, y)]^{-1/(3-\alpha)} \right) y \right) = 1,$$

entonces,  $\left( \left( [V(x, y)]^{-(2-\alpha)/(3-\alpha)} \right) x, \left( [V(x, y)]^{-1/(3-\alpha)} \right) y \right) \in \mathcal{V}$  para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ .

Con (6) y  $k = [V(x, y)]^{-1/(3-\alpha)}$  se tiene que  $\dot{V}(x, y) = -c[V(x, y)]^{2/(3-\alpha)}$ . Sea  $T(x_0, y_0)$  el tiempo necesario para que el sistema llegue al origen desde una condición inicial  $(x_0, y_0)$ . Entonces, por (Haimo, 1986, Proposición 1),  $\dot{V} \leq r(V) = -cV^{2/(3-\alpha)} \Rightarrow \dot{z} = -cz^{2/(3-\alpha)}$ ,  $z \in \mathbb{R}$ , y

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -cz^{2/(3-\alpha)} \Rightarrow \int_{t_0}^T \frac{dz}{z^{2/(3-\alpha)}(t)} = - \int_{t_0}^T c dt \\ &\Rightarrow \left( \frac{3-\alpha}{1-\alpha} \right) z^{(1-\alpha)/(3-\alpha)}(t) \Big|_{t_0}^T = -ct \Big|_{t_0}^T \\ &\Rightarrow \left( \frac{3-\alpha}{1-\alpha} \right) \left( z^{(1-\alpha)/(3-\alpha)}(T) - z^{(1-\alpha)/(3-\alpha)}(t_0) \right) = -c(T - t_0) \\ &\Rightarrow T = \left( \frac{3-\alpha}{c(1-\alpha)} \right) z^{(1-\alpha)/(3-\alpha)}(t_0), \end{aligned}$$

ya que  $z^{(1-\alpha)/(3-\alpha)}(T) = 0$  y  $t_0 = 0$ .

Por lo tanto,  $V(x, y)$  con  $r = 2$  y  $s = 0,01$  es una función de Lyapunov del sistema en lazo cerrado (3) en  $\mathbb{R}^2$ , tal que el origen  $(x, y) = (0, 0)$  es GFTS.

### 3. Condiciones a posteriori inverificables

El trabajo Polyakov et al. (2015) da condiciones suficientes que garantizan estabilización en tiempo finito para sistemas de la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) + d(t, x(t)), \quad t > 0, \quad (7)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

$x \in \mathbb{R}^n$  el estado del sistema,  $u \in \mathbb{R}$  la entrada y  $d : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función que describe las incertidumbres y perturbaciones del sistema que se asumen medibles, acotadas y podrían ser discontinuas con respecto a  $x$  (fricción seca).

El Teorema 6 en Polyakov et al. (2015) cuenta con tres condiciones a satisfacer, aunque el análisis se centrará en una de ellas que impide que el conjunto se satisfaga. Primero, hay que resaltar que (Polyakov et al., 2015, (6)) es una condición que no se puede programar y sólo puede verificarse una vez que la ley de control es aplicada utilizando las ganancias obtenidas, es decir, *a posteriori*. Para el siguiente desarrollo se omitirán los argumentos donde sea conveniente.

Supongamos que se tiene un sistema en la forma (7) al que se desea aplicar la ley de control  $u = V^{1-\mu}kD_r(V^{-1})x$  propuesta en el Teorema 6 en Polyakov et al. (2015), donde  $d := [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n]^T$  son perturbaciones medibles y acotadas. A partir del Teorema 6 en Polyakov et al. (2015) se obtienen la ganancia  $k$  y la matriz  $P = X^{-1}$ ,  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P > 0$ ; la matriz  $P$  se emplea en  $Q(V, x) = x^T D_r(V^{-1}) P D_r(V^{-1}) x - 1 = 0$  para calcular  $V$ ,  $V \in \mathbb{R}_+$ , con  $D_r(V^{-1}) = \text{diag}[V^{-r_1} \ V^{-r_2} \ \dots \ V^{-r_n}]$  y  $r_i = 1 + (n - i)\mu$ ,  $0 < \mu \leq 1$ ; finalmente,  $V$  es empleada para calcular  $u$  y para verificar la condición

$$\beta^2 V^{-2\mu} \geq \sup_{t \in \mathbb{R}_+} d^T(t, x) D_r^2(V^{-1}) d(t, x). \quad (8)$$

Del lado derecho de (8) se tiene

$$d^T D_r^2(V^{-1}) d = \sum_{i=1}^n d_i^2 V^{-2r_i} = \sum_{i=1}^n d_i^2 V^{-2(1+(n-i)\mu)},$$

ya que  $V$  es una función positiva, (8) puede ser reescrita como

$$\beta^2 \geq \sum_{i=1}^n d_i^2 V^{-2(1+(n-i-1)\mu)}. \quad (9)$$

Ya que  $V$  es función de Lyapunov entonces es monótonamente decreciente y (9) debería cumplirse para toda  $V \in \mathbb{R}_+$ , que incluye valores cercanos a cero. Como  $V$  va decreciendo, es necesario que su exponente no sea negativo ya que el valor de la sumatoria en (9) se elevaría y podría dejar de cumplirse la desigualdad en (8).

Analizando los términos de la sumatoria en (9), primero se tiene  $i = n$  por lo que el exponente de  $V$  es  $-2(1 - \mu)$ ; como se requiere que el exponente no sea negativo, entonces con  $\mu = 1$  o  $d_n = 0$  es suficiente; después,  $i = n - 1$  genera el exponente  $-2$  que ya es negativo, así que  $d_{n-1} = 0$ ; para  $i = n - 2$  el exponente es  $-2(1 + \mu)$  que es negativo, entonces  $d_{n-2} = 0$ ; para los demás términos  $i = \{1, 2, \dots, n - 3\}$  debe tener  $d_i = 0$  para que la desigualdad pueda cumplirse.

Entonces, por más grande que sea  $\beta$ , la desigualdad en (9) no se puede cumplir si se tiene alguna  $d_i \neq 0$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  debido a que  $V$  decrece y, al tener exponentes negativos dentro

de la sumatoria en (9), el valor de la sumatoria aumentaría hasta infinito.

*Ejemplo 1.* Considere el sistema (7) para  $n = 4$  con  $d_1 = 0,05 \sin(t)$ ,  $d_2 = 0,08 \cos(x_2)$ ,  $d_3 = 0,05 \sin(3t)$ ,  $d_4 = 0,01 \sin(t) + 0,01 \cos(x_4)$ , y  $x(0) = [2 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ .

Los parámetros utilizados para resolver las LMI del Teorema 6 en Polyakov et al. (2015) son:  $\mu = 1$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 0,2$ ,  $\gamma = 10$ , y  $V$  es obtenida a partir de  $Q(V, x) = 0$  durante la simulación. Las ganancias  $k$  y matriz  $P$  que dan solución a las LMI son:

$$k = [-3,2840 \quad -8,1597 \quad -9,2349 \quad -3,7079],$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,3433 & 0,5166 & 0,3909 & 0,0999 \\ 0,5166 & 1,2349 & 0,8921 & 0,2801 \\ 0,3909 & 0,8921 & 0,9150 & 0,2559 \\ 0,0999 & 0,2801 & 0,2559 & 0,1680 \end{bmatrix}$$

En la Figura 8 se muestra la evolución de los estados que convergen hacia el origen pero no permanecen en él. La Figura 9 muestra la función de Lyapunov con comportamiento inadecuado. La Figura 10 muestra la evolución en el tiempo del lado izquierdo de la condición

$$\beta^2 V^{-2\mu} - \sup_{t \in \mathbb{R}_+} d^T(t, x) D_r^2(V^{-1}) d(t, x) \geq 0,$$

equivalente a (8): la trayectoria debería ser positiva en todo tiempo  $t > 0$  si (8) se sostiene.

Como se puede apreciar en el ejemplo 1, el sistema cumple con las especificaciones dadas en Polyakov et al. (2015), se obtuvieron ganancias  $k$  y matriz  $P$ , pero la desigualdad mostrada en (8) no logra satisfacerse para todo tiempo  $t$ .

La metodología en Polyakov et al. (2015) no está diseñada para la clase de perturbaciones que se mencionan, sino para aquellas donde  $d_i = 0$ ,  $i = \{1, 2, \dots, n - 1\}$  y  $|d_n| \leq \beta$ .

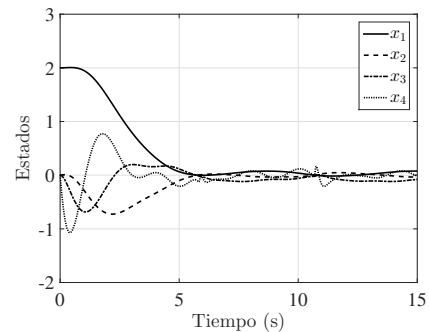


Figura 8: Evolución de los estados en el tiempo para el Ejemplo 1.

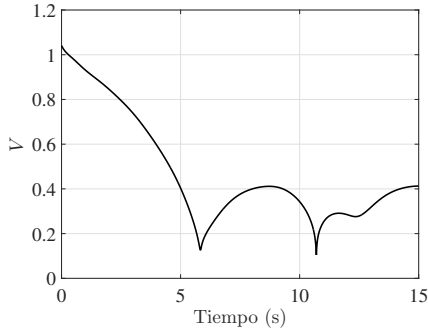


Figura 9: Evolución de la función de Lyapunov en el tiempo para el Ejemplo 1.

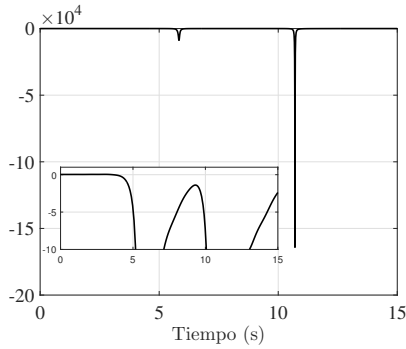


Figura 10: Evolución de la condición en (8) para el ejemplo 1.

#### 4. Funciones de Lyapunov que no lo son

En el trabajo Tapia et al. (2017) se muestran condiciones LMI para la síntesis de una ley de control discontinua por modos deslizantes de segundo orden. Parte del proceso para obtener las condiciones LMI se basa en el *S-procedure* (Johansson, 1999) que relaja las condiciones al agregar un término nuevo *por sectores* a la LMI. La condición (Tapia et al., 2017, (7)) pide que

$$\begin{bmatrix} P_i & (*) \\ (-1)^{(i-1)} \frac{\beta |k| L}{2} & 0 \end{bmatrix} - \bar{E}_i^T U_i \bar{E}_i > 0, \quad (10)$$

con  $U_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\bar{E}_i = [E_i \ e_i]$ , (\*) como transpuesto del término simétrico y ' $\geq$ ' denotando la no negatividad por elemento de la matriz.

Para que una matriz  $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sea definida positiva debe poder aplicarse congruencia con la matriz identidad; es decir,  $J > 0$  si y sólo si  $J = TT^T$  con  $T$  no singular (Lancaster and Tismenetsky, 1985). Note que la matriz a la izquierda de (10) tiene un cero en la diagonal principal y no existe matriz  $T$  que logre colocar un cero en dicha entrada tal que  $J = TT^T$ , por lo tanto, la matriz en la izquierda de (10) no puede ser definida positiva por sí sola.

En el término de la derecha  $\bar{E}_i^T U_i \bar{E}_i$  en (10) se tiene que  $\bar{E}_i = [E_i \ e_i]$ , donde  $e_i = 0$  para las regiones que contengan al origen. Las regiones están definidas por  $C_i \subset \{x : \sigma(x) = (-1)^{(i-1)} Lx > 0\}$ ,  $i = 1, 2$ . Las regiones también pueden ser escritas de forma matricial como:  $C_i = \{x : \bar{E}_i \bar{x} = E_i x + e_i \geq 0\}$ .

Note que el origen está en el borde de las regiones  $C_i$  en donde  $\bar{E}_i = [E_i \ 0]$  (Tapia et al., 2017), por lo que la matriz

que se produce en  $\bar{E}_i^T U_i \bar{E}_i$  siempre tiene cero en la misma entrada que el término de la izquierda en (10) sobre la diagonal principal sin importar la región, por lo que la resta en (10) produce una matriz con cero en la misma entrada y, por lo tanto, no puede ser signada (Lancaster and Tismenetsky, 1985).

La condición LMI (Tapia et al., 2017, (8))

$$\begin{bmatrix} P_i A + A^T P_i & (*) \\ \Upsilon_j & 0 \end{bmatrix} + \bar{E}_i^T W_i \bar{E}_i < 0, \quad i, j = 1, 2, \quad (11)$$

donde  $\Upsilon_j = (-1)^{(i-1)} \left( \frac{1}{2} \beta |k| LA + kB^T P_i \right) + d_j B^T P_i$  y  $W_i \geq 0$ , cuenta con la misma estructura que (10), por lo tanto es una LMI que tampoco puede ser signada.

Entonces, las condiciones LMI (10) y (11) que se presentan en Tapia et al. (2017) no se pueden satisfacer nunca.

En el ejemplo 2 de Tapia et al. (2017) se tiene el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -5 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u(t) + d(t)) \\ y(t) &= [1 \ 0 \ 0] x(t) \end{aligned}$$

con perturbación  $d(t) = 0,2 + 0,2 \sin(30t)$ .

Se considera la variable de deslizamiento  $\sigma(t) = 3,5y(t) + \dot{y}(t)$  y  $k = -2,5$ . Para este ejemplo se tiene que

$$\bar{E}_1 = \bar{E}_2 = \begin{bmatrix} 3,5 & 1 & 0 & 0 \\ -3,5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3,5 & 1 & 0 \\ 0 & -3,5 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

por lo que  $\bar{E}_i^T U_i \bar{E}_i$  quedaría de la forma:

$$\bar{E}_i^T U_i \bar{E}_i = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{31} & 0 \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \Psi_{32} & 0 \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

donde  $\Psi_{ij}$ , con  $i, j = \{1, 2, 3\}$  como entradas de la matriz con valores posibles distinto de cero. La estructura de (12) es la misma a las mostradas en (10) y (11) y, como ya se mencionó, no pueden ser signadas. Entonces, para el ejemplo 2 en Tapia et al. (2017) las LMI (10) y (11) no pueden encontrar ninguna solución que estabilice al sistema mostrado.

#### 5. Recomendaciones

Con base en la revisión presentada en las secciones precedentes, recomendamos a los autores, revisores e investigadores que se acercan al área de control de estructura variable lo siguiente:

1. *Aplicabilidad*: Trabajos como Polyakov et al. (2015) demuestran la necesidad de ser estrictos con la *causalidad* del diseño de controladores. Una metodología como la ahí presentada donde se pide verificar *a posteriori* si una condición se cumple, no es una metodología de diseño. La aplicabilidad de una metodología teóricamente validada depende de poder garantizar su viabilidad antes de la simulación y/o implementación en tiempo real; estas últimas son sólo presentadas con fines ilustrativos.

2. *Consistencia*: Ninguno de los trabajos arriba mencionados incluye detalles sobre sus demostraciones, mismas que despachan en pocas líneas. Esto claramente demuestra ser peligroso y conducir a argumentaciones falsas o incompletas. Se recomienda incluir detalles al menos a nivel de revisión para asegurarse de que los argumentos simplificados no sean falsos.
3. *Reproducibilidad*: Los ejemplos deben ser reproducibles en cualquier artículo de esta área, puesto que se trata de sistemas pequeños e ilustrativos. No hay razón para omitir lo que puede servir al autor para descartar resultados equivocados y al lector para convencerse debidamente de la validez de lo expuesto. Si en Polyakov et al. (2015) se hubieran intentado incluir ejemplos con perturbaciones que abarcaran el rango prometido, habrían detectado problemas; si en Bhat and Bernstein (1998) hubieran graficado simplemente la función de Lyapunov presunta, habrían detectado que era falsa; si en Tapia et al. (2017) se hubieran verificado los valores propios de las soluciones presentadas se habría comprobado que no son expresiones signadas.
4. *Sistematicidad*: Aunque no es exclusivo del área de modos deslizantes, las soluciones propuestas en el área de control de estructura variable suelen ser poco sistemáticas y depender de la habilidad del diseñador para reproducir *en cada ejemplo* razonamientos y cadenas de desigualdades que garanticen lo que se desea conseguir. Esto puede superarse utilizando metodologías de optimización convexa Boyd et al. (1994), lo que desde luego evitaría los razonamientos *ad hoc* que son más propensos a errores.

## 6. Conclusiones

Se han abordado 3 trabajos como ejemplos de errores en el uso de las funciones de Lyapunov para esquemas de control de estructura variable. Se ha probado que el trabajo “Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators” por Bhat y Bernstein, 1998, no cuenta con la familia de funciones de Lyapunov ahí declaradas; que el trabajo “Finite-time and fixed-time stabilization: implicit Lyapunov function approach” por Polyakov et al, 2015, sólo aplica a una clase de perturbaciones significativamente más restringida que lo mencionada por los autores, y que el trabajo “An LMI approach for second-order sliding set design using piecewise Lyapunov functions” Tapia et al, 2017, muestra condiciones LMI

que nunca pueden ser satisfechas. Se han realizado una serie de recomendaciones generales para abordar estos trabajos más cuidadosamente.

## Agradecimientos

Agradecemos a CONACYT el apoyo prestado a este trabajo por medio de las becas 731289 y 731421, al Proyecto PROFAPI CA-18 2020, así como a nuestros asesores Alán Tapia y Miguel Bernal de nuestra institución de adscripción.

## Referencias

- Anosov, D., 1959. On stability of equilibrium points of relay systems. *Automation and Remote Control* 20 (2), 135–149.
- Bartolini, G., Ferrara, A., Usai, E., 1998. Chattering avoidance by second-order sliding mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control* 433 (2), 241–246.
- Bhat, S., Bernstein, D., 2005. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Mathematics of Control, Signals and Systems* 17 (2), 101–127.
- Bhat, S. P., Bernstein, D. S., 1998. Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators. *IEEE Transactions on automatic control* 43 (5), 678–682.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V., 1994. Linear matrix inequalities in system and control theory. Vol. 15. *Studies in Applied Mathematics*, Philadelphia, USA.
- Edwards, C., Spurgeon, S., 1998. *Sliding mode control: Theory and applications*. Taylor and Francis, London, England.
- Filippov, A., 1960. Differential equations with discontinuous right-hand side. *Mathematical Sbornik* 51 (1), 99–128.
- Haimo, V. T., 1986. Finite time controllers. *SIAM Journal on Control and Optimization* 24 (4), 760–770.
- Johansson, M., 1999. Piecewise linear control systems. Ph.D. thesis, Lunden Institute of Technology, Department of Automatic Control, Lunden, Sweden.
- Khalil, H., 2002. *Nonlinear systems*, 3rd Edition. Prentice Hall, New Jersey, USA.
- Lancaster, P., Tismenetsky, M., 1985. *The theory of matrices: with applications*. Elsevier.
- Levant, A., 2003. Higher-order sliding modes, differentiation and output feedback control. *International Journal of Control* 76 (9-10), 924–941.
- Levant, A., 2010. Chattering analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control* 55 (6), 1380–1389.
- Polyakov, A., Efimov, D., Perruquetti, W., 2015. Finite-time and fixed-time stabilization: Implicit Lyapunov function approach. *Automatica* 51, 332–340.
- Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., Levant, A., 2013. *Sliding mode control and observation*. Birkhäuser, New York, USA.
- Tapia, A., Bernal, M., Fridman, L., 2017. An LMI approach for second-order sliding set design using piecewise Lyapunov functions. *Automatica* 79, 61–64.
- Utkin, V., 1992. *Sliding modes in control and optimization*. Springer, Berlin, Germany.
- Utkin, V., Young, K.-K., 1978. Methods for constructing discontinuity planes in multidimensional variable structure systems. *Automation and Remote Control* 39 (10), 1466–1470.