

Puesta en operación y modelado de un cuadri-rotor: Matrice 100 de DJI Commissioning and modeling of a quadrotor: DJI Matrice 100

K. F. Maya-Gress^a, R. Villafuerte-Segura^{a,*}, H. Romero-Trejo^a, M. Bernal^b

^aUniversidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Pachuca, Hidalgo, México.

^bInstituto Tecnológico de Sonora, 85000, Ciudad Obregón, Sonora, México.

Resumen

En la actualidad el empleo de vehículos aéreos no tripulados (VANT) es muy recurrente en diversas aplicaciones industriales, comerciales, ambientales, académicas, investigación, entre otras. Uno de los temas centrales de estos vehículos es su correcta manipulación/control en ausencia del ser humano. Sin embargo, esto no se puede alcanzar sin la puesta en operación y el empleo de modelos matemáticos. En este manuscrito se presenta la puesta en operación del VANT conocido como Matrice 100 de DJI, además del empleo de las técnicas más recurrente encontradas en la literatura para la obtención de su modelo matemático correspondiente. Este VANT es una plataforma experimental con base de fibra de carbón y cuatro rotores, cuenta con un software (simulador de vuelo) de arquitectura abierta para la comunicación/manipulación; desarrollado en el entorno integral libre Android Studio. Para el modelo matemático se considera una configuración en CRUZ y se emplea la metodología propuesta por Euler-Lagrange para describir las dinámicas traslacionales y rotacionales caracterizando las energías cinéticas y potenciales involucradas, teniendo como resultado un modelo no lineal subactuado de orden doce. Para corroborar el buen funcionamiento y la manipulación de la plataforma experimental; así como su correspondencia con el modelo matemático, se presentan simulaciones desarrolladas en Simulink-Matlab y el simulador de vuelo del fabricante, además de pruebas experimentales. Para lo anterior, se emplea un control clásico PD sintonizado solo para alcanzar una altura z en el VANT (considerando solo dinámicas traslacionales).

Palabras Clave:

Vehículo aéreo no tripulado, modelo matemático, simulador de vuelo.

Abstract

Currently the use of unmanned aerial vehicles (UAV) is very recurrent in various applications industrial, commercial, environmental, academic, research, among others. One of the main topics of these vehicles is their correct manipulation/control in the absence of human presence. However, this cannot be achieved without starting up the plant and obtaining more complete mathematical models. This paper obtains a mathematical model of the UAV called Matrice 100 by DJI using well-known methodology found in the literature, and validates it by starting up the plant. This UAV is an experimental platform with carbon fiber frame and four rotors, it has a flight simulator of open architecture for communication/manipulation of the UAV, developed in Android Studio. To obtain the mathematical model, a structural configuration known as CROSS is considered and the methodology proposed by Euler-Lagrange is applied to describe the translational and rotational dynamics of the UAV to get an underactuated nonlinear model of order-twelve. To corroborate the proper functioning of the experimental platform and its correspondence with the mathematical model, simulation routines in Simulink-Matlab and the flight simulator provided by the manufacturer are presented, as well as experimental tests. For the above, a classic PD control tuned only to reach a height z in UAV is used (considering only translational dynamics).

Keywords:

Unmanned aerial vehicle, mathematical model, flight simulation.

1. Introducción

En la década reciente los VANT se han vuelto muy populares como plataformas altamente demandadas en la investigación y sector productivo, debido a su amplio espectro de apli-

cación. La extensa variedad de estas plataformas de vuelo que actualmente existen son una prueba de que se están utilizando para diversas tareas alrededor del mundo, tales como inspección de interiores y de exteriores poco accesibles para el

*Autor para correspondencia: villafuerte@uaeh.edu.mx

Correo electrónico: krndrgma@gmail.com (Kristian Freyri Maya-Gress), villafuerte@uaeh.edu.mx (Raúl Villafuerte-Segura), rhugo@uaeh.edu.mx (Hugo Romero-Trejo), miguel.bernal@itson.edu.mx (Miguel Ángel Bernal-Reza).

ser humano (Sa and Corke, 2014), fotografía aérea, cinematografía, inspección ambiental, para aplicaciones agrícolas, entre otras. El desempeño de estos vehículos, también ha mostrado una mejora constante en el tiempo de vuelo, cargas útiles y funciones inteligentes relacionadas con la seguridad. Sin embargo, la mayoría de las plataformas comerciales son difíciles de adaptar para desarrollar tareas robóticas que involucren la evasión de obstáculos, la planificación trayectorias (Burri et al., 2015; Popovic et al., 2016), la selección de objetos (Mellinger et al., 2011) y/o la agricultura de precisión (Zhang and Kovacs, 2012); en ausencia del ser humano. Ya que para realizar el diseño, síntesis y sintonización de controladores que se desempeñen de manera eficiente, se requiere de un modelo matemático adecuado, estimadores de estado precisos de baja latencia y un alto rendimiento, así como el conocimiento completo de la arquitectura del VANT y de sus software para su manipulación.

Los VANTs, típicamente son clasificados por arquitectura, diseño, estructura y demás. Entre estos vehículos se encuentra el cuadri-rotor, el cual es un helicóptero cuya configuración consiste en una estructura de varillas perpendiculares simétricas y cuatro rotores en sus extremos, donde cada rotor está formado por el conjunto motor-hélice también llamados propulsores. La dinámica de este cuadri-rotor es más sencilla que la de un helicóptero convencional, las hélices tienen una configuración tal que dos rotores giran en el sentido de las agujas del reloj y los otros dos en la dirección opuesta para evitar que el cuadri-rotor gire sobre si mismo. Precizando más, los dos rotores colocados en los extremos de una barra de carbón giran en la misma dirección, mientras que los otros dos giran en dirección opuesta. Esta disposición le da al cuadri-rotor algunas propiedades interesantes, por ejemplo, en el modo suspendido (hover), los efectos giroscópicos y los pares aerodinámicos tienden a cancelarse. Típicamente, un cuadri-rotor tiene tres ángulos de rotación equivalentes a tres maniobras consecutivas: alabeo (roll), cabeceo (pitch) y guiñada (heading o yaw), además de tres traslaciones principales, normalmente llamadas igual que el eje sobre el que se producen: x , y , z , respectivamente. Estas rotaciones y traslaciones permiten que el VANT alcance cualquier punto en el espacio con una orientación deseada.

En la literatura, existe gran número de contribución acerca del estudio de esta clase de VANT, entre los cuales, en los últimos años se encuentran las aportaciones de Kiyashko et al. (2017), que utiliza un modelo no lineal desacoplado donde se incluye tanto la parte rotacional como la parte traslacional, además se propone un controlador proporcional-integral-derivativo (PID) ocupando las tres variables rotacionales de la plataforma. En otra aportación, el cuadri-rotor se comporta como un sistema lineal invariante en el tiempo (Babu et al., 2017). Eso hace posible realizar la identificación paramétrica de cada grado de libertad basado en un método de predicción del error. También, se utiliza un método de señal binaria pseudo aleatorio (PRBS, por sus siglas en inglés) para identificar la dinámica del sistema. Después de analizar la dinámica, se obtienen cuatro funciones de transferencia de segundo orden. En Gandolfo et al. (2016), se considera un modelo cinemático de un VANT, donde se asumen nulas las dinámicas rotatorias de alabeo y cabeceo. Este modelo considera cuatro grados de libertad; y relaciona velocidades lineales y angulares en un marco de referencia fijado al cuerpo de la aeronave. Por otro lado, en Santiaguillo-Salinas

et al. (2017), se utiliza el modelo dinámico tradicional dado por tres ecuaciones diferenciales no lineales con el par de los ángulos igualados a las aceleraciones angulares de la aeronave. En Santana et al. (2016), se utiliza un modelo similar a la referencia anterior, con la diferencia que los pares angulares están definidos con una sustracción de fuerzas que implican los momentos inerciales en dos de los ejes cardinales; en tales ecuaciones los movimientos del VANT son descritos por transformaciones de cuerpo rígido aplicadas al punto de interés (comúnmente el centro de masa de la aeronave). En Shakev et al. (2018), el par angular está directamente relacionado a las velocidades angulares de los motores, mismas que crean fuerzas en dirección al eje del rotor. En Jia et al. (2017), se maneja una parte rotacional de modelo que no involucra operadores trigonométricos, sino que se basa en los momentos inerciales de cuadri-rotor. Muchas manipulaciones pueden ser ejecutadas sobre el modelo, por ejemplo, en Ma et al. (2016), se desacopla el sistema dinámico representativo del VANT para controlar de manera independiente el movimiento sobre los ejes x y y . Por otro lado, en Tian et al. (2018) consideran constantes dentro del modelo matemático que generalmente son determinadas en la experimentación y varían cuando el desempeño del cuadri-rotor cambia y podría no ser el mismo para los cuatro rotores. En Navabi and Mirzaei (2017), se dejan los momentos inerciales de cada eje explícitos en el modelo, ya que la estrategia de control usada en este trabajo requiere de los mismos. También, en Liu et al. (2016), se realiza una considerable reducción del modelo matemático al contemplar únicamente el movimiento del VANT verticalmente.

Contribución: en este manuscrito se presenta la puesta en operación y la obtención del modelo matemático del cuadri-rotor Matrice 100 de DJI. Para la obtención del modelo se emplea la propuesta presentada en Salazar et al. (2008) y la metodología Euler-Lagrange para caracterizar las energías cinéticas y potenciales involucradas. Para validar el modelo matemático obtenido y la estructura física del VANT, se realiza una comparación entre simulaciones de Simulink-Matlab, el simulador de vuelo proporcionado por el fabricante y vuelo real del VANT. Lo anterior, se realiza implementando una clásica ley de control PD para manipular la altura de vehículo.

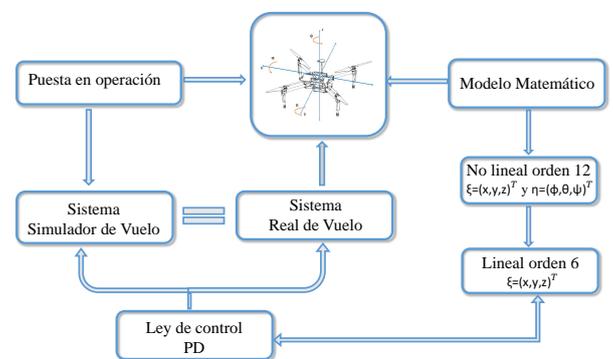


Figura 1: Diagrama general de la contribución del manuscrito.

Para dar a entender mejor esta contribución, en la Figura 1 se proporciona un esquema general, el cual se describen a con-

tinuación:

- La *puesta en operación* consiste en dos partes principales: i) el montaje de la estructura física del cuadri-rotor y ii) el entendimiento y manejo de los sistemas de programación (software) para vuelos simulados y vuelos reales. Cabe mencionar que para esta plataforma, el sistema de simulador de vuelo y el sistema real de vuelo son equivalentes, es decir, la manipulación de simulador de vuelo es casi idéntica a la manipulación de la plataforma experimental.
- El *modelo matemático* es obtenido empleando la propuesta dada en (Salazar et al., 2008) y la metodología Euler-Lagrange; las cuales son de la técnicas más empleadas para la obtención de modelos matemáticos de cuadri-rotos. Para esto, se consideran dinámicas traslacionales $\xi = (x \ y \ z)^T \in \mathbb{R}^3$ y rotacionales $\eta = (\phi \ \theta \ \psi)^T \in \mathbb{R}^3$ para obtener un modelo de orden doce. Sin embargo, para fines de validación e implementación experimental, se considera un sistema de orden reducido (orden 6), ya que en esta primera etapa solo se considera un movimiento traslacional sobre el eje z.
- La *validación experimental* de los puntos anteriores, se realiza mediante la aplicación de la clásica ley de control PD propuesta en Ammari (2017), esto con el fin de determinar la correlación/correspondencia entre el modelo matemático, el simulador de vuelo y la plataforma real.

El resto del manuscrito se encuentra estructurado de la manera siguiente: en la Sección 2, se describe la estructura física de la plataforma Matrice 100 de DJI y la arquitectura de su software para la comunicación y asignación de tareas. En la Sección 3 se realiza un análisis para la obtención del modelo matemático del cuadri-rotor, mientras que en la Sección 4 se presentan simulaciones empleando Simulink-Matlab y el simulador de vuelo del Matrice 100; y una aplicación real. Finalmente, se tienen las conclusiones de este trabajo y las referencias utilizada para la realización del mismo.

2. Puesta en operación de la plataforma

En esta sección se presentan las especificaciones técnicas, el montaje y el software del VANT.

2.1. Especificaciones técnicas de la plataforma

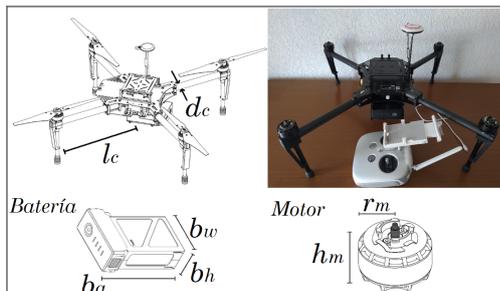


Figura 2: Cuadri-rotor Matrice 100 de DJI.

El cuadri-rotor empleado en esta investigación es una plataforma experimental que consta básicamente de una base de fibra de carbón y cuatro rotores como se aprecia en la Figura 2, cuyas especificaciones técnicas son dadas en la Tabla 1.

Tabla 1: Parámetros físicos del cuadri-rotor.

Longitud (l)	0.65 m
Longitud al centro de gravedad (l_c)	$l/2$
Masa de la barra de carbón (m_{bc})	0.05 kg
Radio de la barra de carbón ($r_{bc} = d_c/2$)	0.01 m
Masa del motor (m_m)	0.106 kg
Radio del motor (r_m)	0.025 m
Altura del motor (h_m)	0.03 m
Masa de la batería (m_b)	0.6 kg
Ancho de la batería (b_w)	0.08 m
Alto de la batería (b_h)	0.04 m
Largo de la batería (b_a)	0.135 m
Masa total (m)	2.335 kg

2.2. Simulador de vuelo y su correlación con plataforma física

Parte de la puesta en operación de la plataforma experimental consiste en el pleno conocimiento y manipulación del software para comunicación y/o asignación de tareas. Esta plataforma cuenta con un lenguaje que permite realizar configuraciones personalizadas. A continuación se realiza una descripción de la estructura algorítmica para programar al cuadri-rotor presentado en este trabajo.

2.2.1. Herramienta de desarrollo de software (SDK)

El DJI Mobile SDK (Software Development Kit) es un herramienta que permite crear una aplicación para un sistema concreto. En este caso se emplea para desarrollar y personalizar un proyecto dentro del ambiente de Android Studio. El SDK permite acceder a los distintos dispositivos/sensores del cuadri-rotor, tales como cámara de mano y del VANT, giroscopio, sistema de posicionamiento global (GPS), barómetro, entre otros. El SDK simplifica el proceso de desarrollo de la aplicación al cuidar la funcionalidad de nivel inferior, como la estabilización de vuelo, la gestión de la batería, la transmisión de señales y la comunicación. De esta manera, el usuario puede acceder a la configuración interna del VANT (DJI, 2019a).

2.2.2. Conexión a la aplicación y al VANT

El diagrama mostrado en la Figura 3 ilustra cómo el SDK se adapta a una aplicación móvil y cómo se conecta al VANT. Aquí, el dispositivo móvil (smartphone) se conecta mediante un cable USB al radio control y este último se comunica con el VANT de forma inalámbrica. El SDK es compatible para distintos programas como lo es Android Studio, este es un entorno de desarrollo integrado (IDE) oficial para el desarrollo de aplicaciones (apps) en ambiente Android y se basa en IntelliJ IDEA. Además, del potente editor de códigos y las herramientas para desarrolladores de IntelliJ, Android Studio permite compilar aplicaciones compatibles con el modelo del cuadri-rotor, con lo cual se puede acceder de manera total a las variables y actuadores de la plataforma.

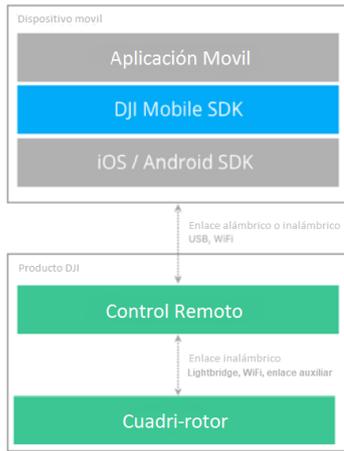


Figura 3: Diagrama de conexión.

2.2.3. Simulador de vuelo

La plataforma experimental cuenta con un simulador de vuelo (DJI Flight Simulator) proporcionado por el fabricante. Este simulador es una interfaz virtual que asemeja los movimientos de cuadri-rotor tal cual lo hace físicamente. Esto permite probar y experimentar distintas estrategias de vuelo antes de llevarlas a cabo en el cuadri-rotor real. En la Figura 4 se aprecia el ambiente en el que se desenvuelve el simulador. Flight Simulator está basado en Windows y es compatible con varios controles remotos DJI. También, está disponible para operar en el software con el teclado DJI (2019b).

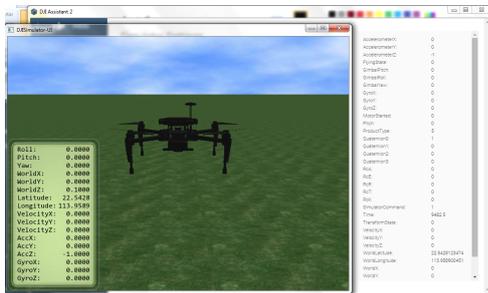


Figura 4: Simulador de vuelo del Matrice 100.

Para que el simulador de vuelo esté disponible en la computadora, es necesario que el cuadri-rotor se encuentre conectado al mismo vía USB, de lo contrario no es posible ejecutar la simulación de vuelo.

2.2.4. Correlación entre simulador y plataforma física

El SDK que proporciona el fabricante permite tener a disposición las variables físicas del cuadri-rotor, así como la completa manipulación de estas, mediante su integración en una aplicación para dispositivos móviles a través de Android Studio. Una vez desarrollada la aplicación, se descarga en el dispositivo móvil utilizado para el control de vuelo. Este dispositivo a su vez se conecta vía USB al control remoto, el cual envía las ordenes al VANT de manera inalámbrica, como se mostró en el diagrama de la Figura 3.

Para la puesta en operación del Matrice 100 se utiliza únicamente la manipulación de la altura o desplazamiento sobre el

eje z, desacoplando y obviando las demás dinámicas, utilizando únicamente la medición de la altura a través del barómetro como se muestra en la Figura 5.

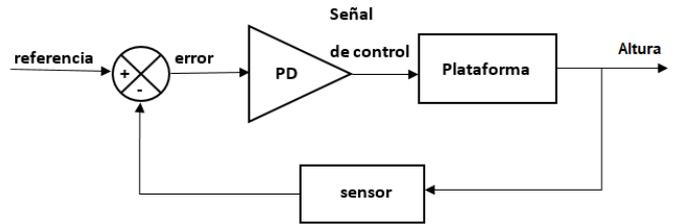


Figura 5: Diagrama del lazo cerrado.

Las variables disponibles en la plataforma que están a la disposición para sensar y manipular se muestran en la Figura 6.

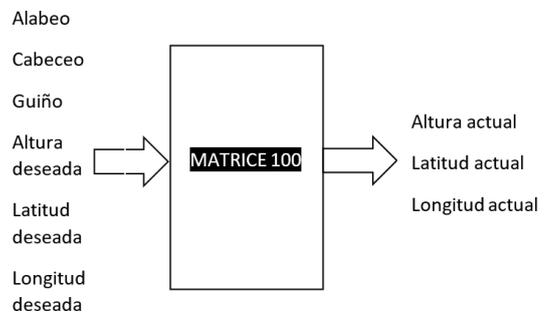


Figura 6: Variables de entrada y salida.

3. Modelo dinámico

En esta sección se presenta la obtención del modelo matemático de cuadri-rotor Matrice 100, utilizando una de las metodologías más empleados en la literatura vía Euler-Lagrange. Este modelo matemático es no lineal y de orden doce, el cual se puede simplificar al aplicar una ley de control “auxiliar” para cancelar dinámicas rotacionales y obtener un modelo de orden seis, considerando solo manipulación traslacional.

3.1. Modelo no lineal de orden doce

Este enfoque está basado en la obtención de las energías potenciales y cinéticas gobernadas en el cuadri-rotor. Para lo cual, se definen dos sistemas de coordenadas: \mathbf{R}_w como el sistema de coordenadas de referencia inercial (referencia general) y \mathbf{R}_b como otro sistema de coordenadas cuidadosamente unido al cuerpo del cuadri-rotor (Salazar et al., 2008). El vector $\xi = (x \ y \ z)^T \in \mathbb{R}^3$ representa la posición del centro de masa del cuadri-rotor en comparación con el sistema \mathbf{R}_w . El vector compuesto por $\eta = (\phi \ \theta \ \psi)^T \in \mathbb{R}^3$ define los tres ángulos de Euler, alabeo, cabeceo y guiñada respectivamente, y que definen la orientación del cuadri-rotor, ver Figura 7.

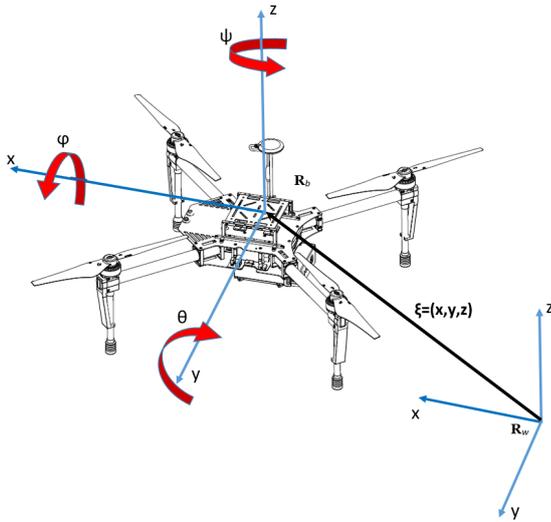


Figura 7: Ángulos de movimiento del cuadri-rotor (DJI, 2019c).

La energía cinética de traslación del cuadri-rotor está dada por la expresión

$$T_{tras} = \frac{m}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi},$$

aquí m representa la masa del cuadri-rotor. Ahora considerando la parte rotacional, la energía cinética correspondiente está dada por

$$\begin{aligned} T_{rot} &= \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M(\eta) \dot{\eta} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\eta}^T W_{\eta}^T \mathbb{I} W_{\eta} \dot{\eta} = \frac{1}{2} \Omega^T \mathbb{I} \Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

donde $M(\eta) = W_{\eta}^T \mathbb{I} W_{\eta}$ es la matriz de inercia para la energía cinética de rotación y $\Omega = W_{\eta} \dot{\eta}$ es el vector de velocidades angulares. Aquí, el vector Ω está expresado con respecto al sistema referencial \mathbf{R}_b coordinado respecto a la estructura del VANT. Esto está directamente relacionado con las velocidades generalizadas $\dot{\eta}$ de la relación cinemática estándar y

$$W_{\eta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \cos(\theta)\sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\theta) \end{pmatrix},$$

por lo que

$$\Omega = \begin{pmatrix} \dot{\phi} - \sin(\psi) \\ \dot{\psi} \sin(\phi) \cos(\theta) + \dot{\theta} \cos(\phi) \\ \dot{\psi} \cos(\phi) \cos(\theta) - \dot{\theta} \sin(\phi) \end{pmatrix}.$$

Además, la matriz de inercias \mathbb{I} está representada como

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}.$$

Cabe señalar que para la obtención de las inercias anteriores, la configuración de vuelo del cuadri-rotor es importante. Típicamente, estas configuraciones se clasifican en *CRUZ* y en *SUMA*, ver Figura 8.

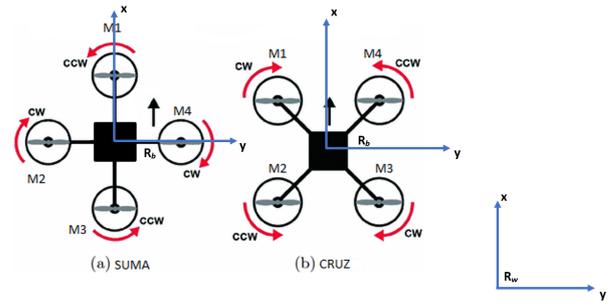


Figura 8: Configuración SUMA y CRUZ.

Para una configuración de vuelo en *CRUZ*, cada elemento de la matriz de inercias \mathbb{I} es obtenido por

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \left(\frac{I_x + I_y}{2} \right) + \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right) \cos(2\theta) - I_{xy} \sin(2\theta), \\ I_{yy} &= \left(\frac{I_x + I_y}{2} \right) - \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right) \cos(2\theta) + I_{xy} \sin(2\theta), \\ I_{zz} &= I_z, \end{aligned}$$

donde I_x , I_y y I_z son las inercias en los tres ejes en configuración *SUMA* y cada una está dada como a continuación se muestra

$$\begin{aligned} I_x &= I_{bcx} + \sum_{i=1}^4 I_{m_i x} + I_{bx}, \\ I_y &= I_{bcy} + \sum_{i=1}^4 I_{m_i y} + I_{by}, \\ I_z &= I_{bcz} + \sum_{i=1}^4 I_{m_i z} + I_{bz}. \end{aligned}$$

Para lo cual, se considera la inercia en tres elementos del cuadri-rotor: las barras de carbón, los motores y la batería; denotados por $I_{bc(i)}$, $I_{m(i)}$ y $I_{b(i)}$, respectivamente. Cada una de ellas está definida de la siguiente manera, ver (Tipler and Mosca, 2007), empezando por las barras de carbón:

$$\begin{aligned} I_{bcx} &= I_{bcy} = \frac{3}{4} m_{bc} r_{bc}^2 + \frac{1}{12} m_{bc} l^2, \\ I_{bcz} &= \frac{1}{2} m_{bc} r_{bc}^2 + \frac{1}{6} m_{bc} l^2, \end{aligned}$$

continuyendo con la inercia en los motores:

$$\begin{aligned} I_{m_2 x} &= I_{m_3 x} = \frac{1}{4} m_m r_m^2 + \frac{1}{3} m_m h^2, \\ I_{m_2 y} &= I_{m_3 y} = \frac{1}{4} m_m r_m^2 + \frac{1}{3} m_m l_m^2 + m_m l_c^2, \\ I_{m_2 z} &= I_{m_3 z} = \frac{1}{2} m_m r_m^2 + m_m l_c^2. \\ I_{m_1 x} &= I_{m_4 x} = \frac{1}{4} m_m r_m^2 + \frac{1}{3} m_m h^2 + m_m l_c^2, \\ I_{m_1 y} &= I_{m_4 y} = \frac{1}{4} m_m r_m^2 + \frac{1}{3} m_m l_m^2, \\ I_{m_1 z} &= I_{m_4 z} = \frac{1}{2} m_m r_m^2 + m_m l_c^2, \end{aligned}$$

y finalizando con la inercia en la batería:

$$I_{bx} = m_b \left(\frac{b_w^2 + b_h^2}{12} \right) + m_b l_0^2, \quad I_{by} = m_b \left(\frac{b_a^2 + b_h^2}{12} \right) + m_b l_0^2,$$

$$I_{bz} = m_b \left(\frac{b_w^2 + b_a^2}{12} \right).$$

Por otro lado, la única fuerza que contribuye a la energía potencial presente en este sistema dinámico, es la fuerza de gravedad g debida a la aceleración gravitacional. Esta está expresada como

$$U = mgz,$$

siendo z la altura del cuadri-rotor; por lo que el Lagrangiano está dado por

$$L(g, \dot{g}) = T_{tras} + T_{rot} - U$$

$$= \frac{m}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi} + \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M(\eta) \dot{\eta} - mgz. \quad (2)$$

Ahora, para obtener el modelo dinámico del cuadri-rotor, consideramos las ecuaciones de Euler-Lagrange, teniendo en cuenta el vector de fuerzas externas generalizadas que está definido como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{g}} \right) - \frac{\partial L}{\partial g} = F, \quad (3)$$

donde $F = (F_\xi, \tau)$. F_ξ es el vector de fuerzas que se aplica al cuadri-rotor. Estas fuerzas son las entradas de control para producir un movimiento de traslación y τ es el vector de los momentos generalizados producidos por las entradas de control para realizar movimientos de rotación. Todas las demás fuerzas aerodinámicas presentes en el sistema serán despreciadas, porque son mucho más pequeños en comparación con las fuerzas producidas por las entradas principales de control, asumiendo que las velocidades experimentadas por el VANT son reducidas. Así, las fuerzas aplicadas al vehículo con respecto a la referencia \mathbf{R}_b son entonces

$$F_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}, \quad (4)$$

con u definida como

$$u = f_1 + f_2 + f_3 + f_4,$$

siendo $f_i = k_i \omega_i^2$, $i = 1, \dots, 4$, donde la constante $k_i > 0$ es un parámetro que va a depender de la densidad del aire ρ_a , el área de superficie de la hélice A_h , de su forma y de su ángulo de inclinación (paso) de las mismas. Además, ω_i es la velocidad angular del motor i ; este conjunto de fuerzas expresadas en \mathbf{R}_w se transforman en

$$F_\xi = \mathbf{Rot} F_b, \quad (5)$$

aquí $\mathbf{Rot} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz de transformación (rotación) y representa la rotación del cuadri-rotor (sistema coordenado \mathbf{R}_b).

$$\mathbf{Rot} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\psi) & \mathbf{Rot}_{12} & \mathbf{Rot}_{13} \\ \sin(\psi) \cos(\theta) & \mathbf{Rot}_{22} & \mathbf{Rot}_{23} \\ -\sin(\theta) & \sin(\phi) \cos(\theta) & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

siendo

$$\mathbf{Rot}_{12} = \sin(\phi) \sin(\theta) \cos(\psi) - \sin(\psi) \cos(\phi),$$

$$\mathbf{Rot}_{13} = \sin(\phi) \sin(\psi) + \sin(\theta) \cos(\phi) \cos(\psi),$$

$$\mathbf{Rot}_{22} = \sin(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) + \cos(\phi) \cos(\psi),$$

$$\mathbf{Rot}_{23} = \sin(\theta) \sin(\psi) \cos(\phi) - \sin(\phi) \cos(\psi).$$

Esta representación de la matriz de rotación es la más utilizada en aplicaciones aeronáuticas. Además, el vector de momentos generalizados sobre las variables de η está definido como

$$\tau \triangleq \begin{pmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{pmatrix};$$

siendo

$$\tau_\phi = ((f_1 + f_2) - (f_3 + f_4)) l_c,$$

$$\tau_\theta = ((f_2 + f_3) - (f_1 + f_4)) l_c,$$

$$\tau_\psi = \sum_{i=1}^4 \tau_{M_i},$$

donde l_c es la distancia entre los ejes de los motores y el centro de gravedad del vehículo localizado en el origen de \mathbf{R}_b y τ_{M_i} es el par producido por el motor M_i .

Dado que el Lagrangiano no contiene ningún término que combine ξ y η en (2), la ecuación de Euler-Lagrange (3) se puede separar en dos subsistemas, uno para la dinámica de traslación ξ y el otro para la dinámica rotacional η . La ecuación de Euler-Lagrange para el movimiento de traslación es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{tras}}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial L_{tras}}{\partial \xi} = F_\xi,$$

y se tiene

$$m \ddot{\xi} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} = F_\xi, \quad (7)$$

considerando la ecuación (5), donde F_b y \mathbf{Rot} están definidas en (4) y (6) respectivamente. Finalmente se tienen las ecuaciones que gobiernan las dinámicas traslacionales:

$$m \ddot{x}(t) = u (\sin \phi \sin \psi + \sin \theta \cos \phi \cos \psi),$$

$$m \ddot{y}(t) = u (\sin \theta \sin \psi \cos \phi - \sin \phi \cos \psi), \quad (8)$$

$$m \ddot{z}(t) = u (\cos \theta \cos \phi) - mg.$$

De la misma manera, para las dinámicas rotaciones, ahora se considera la ecuación Euler-Lagrange para este movimiento:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{rot}}{\partial \dot{\eta}} \right) - \frac{\partial L_{rot}}{\partial \eta} = \tau,$$

por consiguiente

$$\tau = \frac{d}{dt} (\dot{\eta}^T M(\eta) \dot{\eta}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T M(\eta) \dot{\eta}),$$

$$\tau = M(\eta)\ddot{\eta} + \dot{M}(\eta)\dot{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T M(\eta)\dot{\eta}). \quad (9)$$

Definiendo la matriz de Coriolis como

$$C(\eta, \dot{\eta}) = \dot{M}(\eta)\dot{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T M(\eta)\dot{\eta}) \quad (10)$$

y reemplazando la matriz de Coriolis $C(\eta, \dot{\eta})$ en (9) se obtienen las dinámicas rotacionales que gobernan al cuadri-rotor:

$$M(\eta)\ddot{\eta} + C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} = \tau, \quad (11)$$

donde

$$M(\eta) = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xx} \sin(\theta) \\ 0 & I_{yy} \cos^2(\phi) + I_{zz} \sin^2(\phi) & Mn_1 \\ -I_{xx} \sin(\theta) & Mn_2 & Mn_3 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

con

$$\begin{aligned} Mn_1 &= \cos(\theta) \cos(\phi) \sin(\phi) (I_{yy} - I_{zz}), \\ Mn_2 &= \cos(\theta) \cos(\phi) \sin(\phi) (I_{yy} - I_{zz}), \\ Mn_3 &= I_{xx} \sin^2(\theta) + I_{yy} \cos^2(\theta) \sin^2(\phi) + I_{zz} \cos^2(\theta) \cos^2(\phi). \end{aligned}$$

Además, resolviendo (10) se tiene que

$$C(\eta, \dot{\eta}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

donde

$$\begin{aligned} c_{11} &= 0, \\ c_{12} &= -I_{xx} \dot{\psi} \cos(\theta) + I_{yy} (\dot{\theta} \sin(\phi) \cos(\phi) + \dot{\psi} \cos(\theta) \sin^2(\phi) - \dot{\psi} \cos(\theta) \cos^2(\phi)) - I_{zz} (\dot{\psi} \cos(\theta) \sin^2(\phi) - \dot{\psi} \cos(\theta) \cos^2(\phi) + \dot{\theta} \sin \phi \cos \phi), \\ c_{13} &= I_{yy} \dot{\psi} \cos^2(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi) - I_{zz} \dot{\psi} \cos^2(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi), \\ c_{21} &= I_{xx} \dot{\psi} \cos(\theta) + I_{yy} (-\dot{\theta} \sin(\phi) \cos(\phi) + \dot{\psi} \cos(\theta) \cos^2(\phi) - \dot{\psi} \cos(\theta) \sin^2(\phi) + I_{zz} (\dot{\psi} \cos(\theta) \sin^2(\phi) - \dot{\psi} \cos(\theta) \cos^2(\phi) + \dot{\theta} \sin(\phi) \cos(\phi))), \\ c_{22} &= -I_{yy} \dot{\phi} \sin(\phi) \cos(\phi) + I_{zz} \dot{\phi} \sin(\phi) \cos(\phi), \\ c_{23} &= -I_{xx} \dot{\psi} \sin(\theta) \cos(\theta) + I_{yy} \dot{\psi} \sin(\theta) \cos(\theta) \sin^2(\phi) + I_{zz} \dot{\psi} \sin(\theta) \cos(\theta) \cos^2(\phi), \\ c_{31} &= -I_{xx} \dot{\theta} \cos(\theta) + I_{yy} \dot{\psi} \cos^2(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi) - I_{zz} \dot{\psi} \cos^2(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi), \\ c_{32} &= I_{xx} \dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\theta) - I_{yy} (\dot{\theta} \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi) + \dot{\phi} \cos(\theta) \sin^2(\phi) - \dot{\phi} \cos(\theta) \cos^2(\phi) + \dot{\psi} \sin(\theta) \cos(\theta) \sin^2(\phi) + I_{zz} (\dot{\phi} \cos(\theta) \sin^2(\phi) - \dot{\phi} \cos(\theta) \cos^2(\phi) - \dot{\psi} \sin(\theta) \cos(\theta) \cos^2(\phi) + \dot{\theta} \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi))), \\ c_{33} &= I_{xx} \dot{\theta} \sin(\theta) \cos(\theta) + I_{yy} (-\dot{\theta} \sin(\theta) \cos(\theta) \sin^2(\phi) + \dot{\phi} \cos^2(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi)) - I_{zz} (\dot{\theta} \sin(\theta) \cos(\theta) \cos^2(\phi) + \dot{\phi} \cos^2(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi)). \end{aligned}$$

3.2. Modelo no lineal de orden doce simplificado

Las dinámicas traslacionales y rotacionales que gobernan los movimientos del cuadri-rotor están determinadas por las ecuaciones (8) y (11), respectivamente. Éstas ecuaciones estructuran un modelo matemático no lineal de orden doce. Sin embargo, es posible simplificar este modelo si solo se consideran movimientos traslacionales.

Es claro que si se realiza una medición detallada y precisa de la estructura física del cuadri-rotor y se consideran variaciones o

cambios rotacionales casi nulos, se puede tener una buena aproximación de la matriz de inercias (12) y de la matriz de Coriolis (13), por lo cual se puede proponer una primera ley de control “auxiliar” de la forma

$$\tau = M(\eta)\ddot{\tau} + C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta}, \quad (14)$$

donde

$$\ddot{\tau} = \begin{pmatrix} \ddot{\tau}_\phi \\ \ddot{\tau}_\theta \\ \ddot{\tau}_\psi \end{pmatrix}.$$

Así, aplicando la ley de control (14) a la ecuación (11), se obtiene el modelo simplificado de dinámicas rotacionales siguiente

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}(t) &= \ddot{\tau}_\phi, \\ \ddot{\theta}(t) &= \ddot{\tau}_\theta, \\ \ddot{\psi}(t) &= \ddot{\tau}_\psi, \end{aligned} \quad (15)$$

donde cada elemento representa el momento angular sobre cada uno de los ejes respectivos x , y y z . Mientras que, las dinámicas traslacionales siguen estando gobernadas por (8).

3.3. Modelo matemático lineal reducido

Considerando las dinámicas dadas por las ecuaciones (8) y (15), bajo movimientos rotaciones casi nulos, el modelo matemático del cuadri-rotor puede ser descrito solo por las dinámicas traslacionales dadas por

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= 0, \\ m\ddot{y}(t) &= 0, \\ m\ddot{z}(t) &= u - mg. \end{aligned} \quad (16)$$

Es necesario mencionar que la aportación de este trabajo consta de la puesta en operación de la plataforma experimental para implementar leyes de control, así como de la presentación de un modelo matemático para la sintetización de leyes de control. Para el caso particular de este manuscrito, solo se considera la manipulación del cuadri-rotor para alcanzar una altura deseada. Esto con la finalidad de mostrar un comportamiento similar entre el modelo matemático, el simulador de vuelo y la plataforma experimental. Sin embargo, en trabajos futuros se contempla implementar leyes de control más complejas donde se toman en cuenta tanto movimientos traslacional como movimientos rotacional, controlando entonces no sólo la altura, sino cualquier movimiento en el plano tridimensional lo que implica el control del alabeo, cabeceo y guiñado.

4. Resultados de Simulación y Experimentales

Para determinar una correlación entre el modelo matemático propuesto anteriormente y la plataforma experimental puesta en operación, en esta sección se muestran la implementación de la ley de control PD en: a) Simulink-Matlab empleando el modelo matemático no lineal simplificado dado por (8) y (15); b) el simulador de vuelo proporcionado por el fabricante; y c) el cuadri-rotor Matrice 100 real. Para lo cual, se considera la clásica ley de control PD

$$u = k_p e(t) + k_d \dot{e}(t), \quad (17)$$

donde $e(t)$ es el error que existe entre la referencia (altura deseada) y la medición de la altura z obtenida de los sensores integrados al VANT. Las ganancias k_p y k_d se sintonizan empleando la metodología propuesta en Ammari (2017), las cuales pertenecen a un controlador PID, aquí la ganancia de la acción integral se considera igual a cero.

Para programar este controlador en Android Studio, se implementa sobre el SDK que proporciona el fabricante; durante la compilación, es necesaria que el dispositivo Android este conectado a la PC donde se desarrolla el programa, ya que como resultado se crea una aplicación compatible con el cuadri-rotor. Una vez cargada la aplicación al dispositivo Android, este se conecta vía USB al control remoto del cuadri-rotor, lo que conlleva a que se abra automáticamente la aplicación donde esta cargado el programa con el controlador PD. El VANT recibe las señales de control y se mueve verticalmente, esto retroalimenta al programa con el barómetro que tiene incluido y dependiendo de la altura se obtiene una señal de error con respecto a la referencia deseada. Es importante mencionar que la resolución para medir la altura es de 10 cm, tanto en el simulador de vuelo como en la plataforma física.

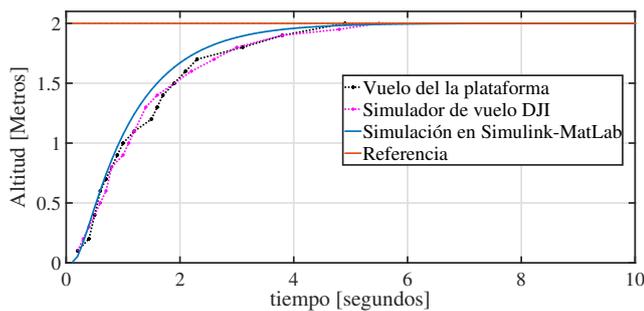


Figura 9: Gráfica de altura del VANT usando Simulink-Matlab, simulador de vuelo y plataforma experimental.

En la Figura 9, la línea continua cian (—) describe la simulación en Simulink-Matlab del modelo matemático definido por las ecuaciones (8) y (15). La línea punteada magenta (· · ·) muestra la respuesta del simulador de vuelo proporcionado por el fabricante. Mientras que, la línea punteada negra (· - ·), es la respuesta del cuadri-rotor Matrice 100. En los tres casos, se muestra el sistema en lazo cerrado con la ley de control (17) y se propone como referencia una altura de 2 metros en la posición sobre el eje z ; línea continua naranja (—). Como se mencionó anteriormente, la resolución de barómetro es de 10 cm y la altura registrada en la transición se representan con las líneas punteadas. En la Figura 10 se muestra el vuelo vertical real del cuadri-rotor Matrice 100 para corroborar experimentalmente que las fuerzas aerodinámicas rotacionales son casi nulas. Es claro que las respuestas de los tres procesos son muy semejantes (Simulink-Matlab, Simulador de vuelo del fabricante y Plataforma experimental) con una diferencia poco significativa, por lo que se puede considerar que el modelo matemático obtenido, refleja de manera muy cercana las dinámicas del VANT.

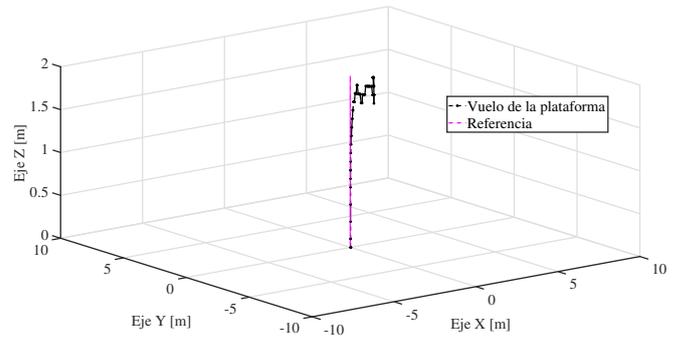


Figura 10: Gráfica de vuelo real comparado con la referencia.

5. Conclusiones

En este manuscrito la puesta en operación y la obtención de un modelo matemático de un VANT conocido como Matrice 100 de DJI son presentados. La correspondencia entre el modelo matemático propuesto y la plataforma física fue comprobada mediante el empleo de técnicas de control clásicas vía simulaciones y pruebas experimentales. Así, el modelo matemático obtenido, podrá ser utilizado para sintetizar controladores más complejos que coadyuven a mejorar la manipulación del VANT. Mientras que, la puesta en operación y la adecuada comprensión y manipulación del software del simulador de vuelo DJI, permitirán tener lista la plataforma experimental para aplicar leyes de control más avanzadas, así como tener un entorno seguro para realizar pruebas virtuales para después ser implementadas de forma real.

Referencias

- Ammari, S., 2017. Simulation et commande d'un drone (quadrirotor) en utilisant simulink.
- Babu, V. M., Das, K., Kumar, S., 2017. Designing of self tuning pid controller for ar drone quadrotor. In: 2017 18th international conference on advanced robotics (ICAR). IEEE, pp. 167–172.
- Burri, M., Oleynikova, H., Achtelik, M. W., Siegwart, R., 2015. Real-time visual-inertial mapping, re-localization and planning onboard mavs in unknown environments. In: 2015 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). IEEE, pp. 1872–1878.
- DJI, 2019a. Descripción general de la plataforma de lo que es el SDK para la plataforma DJI Matrice 100. https://developer.dji.com/mobile-sdk/documentation/introduction/mobil_sdk_introduction.html.
- DJI, 2019b. Descripción general de la plataforma del simulador de vuelo de dji. <https://www.dji.com/mx.simulador/info>.
- DJI, 2019c. Descripción general del control de vuelo de la plataforma matrice 100 de dji. <https://developer.dji.com/mobile-sdk/documentation/introduction/flightController-nccepts.html>.
- Gandolfo, D. C., Salinas, L. R., Brandão, A., Toibero, J. M., 2016. Stable path-following control for a quadrotor helicopter considering energy consumption. IEEE Transactions on Control Systems Technology 25 (4), 1423–1430.
- Jia, Z., Yu, J., Mei, Y., Chen, Y., Shen, Y., Ai, X., 2017. Integral backstepping sliding mode control for quadrotor helicopter under external uncertain disturbances. Aerospace Science and Technology 68, 299–307.
- Kiyashko, M. A., Sholmov, A. K., Efremov, A. A., 2017. Quadrotor mathematical and information model analysis. In: 2017 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus). IEEE, pp. 901–904.
- Liu, Z., Yuan, C., Zhang, Y., Luo, J., 2016. A learning-based fault tolerant tracking control of an unmanned quadrotor helicopter. Journal of Intelligent & Robotic Systems 84 (1-4), 145–162.
- Ma, D., Xia, Y., Li, T., Chang, K., 2016. Active disturbance rejection and predictive control strategy for a quadrotor helicopter. IET Control Theory & Applications 10 (17), 2213–2222.

- Mellinger, D., Lindsey, Q., Shomin, M., Kumar, V., 2011. Design, modeling, estimation and control for aerial grasping and manipulation. In: 2011 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. IEEE, pp. 2668–2673.
- Navabi, M., Mirzaei, H., 2017. Robust optimal adaptive trajectory tracking control of quadrotor helicopter. *Latin American Journal of solids and structures* 14 (6), 1040–1063.
- Popovic, M., Hitz, G., Nieto, J., Sa, I., Siegwart, R., Galceran, E., 2016. Online informative path planning for active classification using uavs. arXiv preprint arXiv:1609.08446.
- Sa, I., Corke, P., 2014. Vertical infrastructure inspection using a quadcopter and shared autonomy control. In: *Field and service robotics*. Springer, pp. 219–232.
- Salazar, S., Romero, H., Lozano, R., Castillo, P., 2008. Modeling and real-time stabilization of an aircraft having eight rotors. In: *Unmanned Aircraft Systems*. Springer, pp. 455–470.
- Santana, L. V., Brandão, A. S., Sarcinelli-Filho, M., 2016. Navigation and cooperative control using the ar. drone quadrotor. *Journal of Intelligent & Robotic Systems* 84 (1-4), 327–350.
- Santiaguillo-Salinas, J., Rosaldo-Serrano, M., Aranda-Bricaire, E., 2017. Observer-based time-varying backstepping control for parrot's ar. drone 2.0. *IFAC-PapersOnLine* 50 (1), 10305–10310.
- Shakev, N. G., Ahmed, S. A., Topalov, A. V., Popov, V. L., Shiev, K. B., 2018. Autonomous flight control and precise gestural positioning of a small quadrotor. In: *Learning Systems: From Theory to Practice*. Springer, pp. 179–197.
- Tian, B., Lu, H., Zuo, Z., Zong, Q., Zhang, Y., 2018. Multivariable finite-time output feedback trajectory tracking control of quadrotor helicopters. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 28 (1), 281–295.
- Tipler, P. A., Mosca, G., 2007. *Physics for scientists and engineers*. Macmillan.
- Zhang, C., Kovacs, J. M., 2012. The application of small unmanned aerial systems for precision agriculture: a review. *Precision agriculture* 13 (6), 693–712.