DESDE 2013
https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/icbi/issue/archive
Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI
ISSN: 2007-6363

Publicación Semestral Pädi Vol. 9 No. 18 (2022) 47–55

Funciones que preservan la b–métrica extendida y otras métricas relacionadas
Extended b–metric–preserving functions and other related metrics

R. Martínez-Cruz [a,*], E. Hernández-Piña [a]

[a] *Facultad de Ciencias Básicas Ingeniería y Tecnología, Universidad Autónoma de Tlaxcala, 90401, Apizaco, Tlaxcala, México.*

Resumen

En este trabajo, basado sobre los conceptos de ultramétrica y b–métrica extendida, introducimos dos nuevas familias de funciones, aquellas que preservan la ultramétrica débil ($\mathcal{UD}$) y las que preservan la b–métrica extendida ($\mathcal{BE}$). Se investigan algunas de sus propiedades y se demuestra que, el conjunto de funciones que preservan la ultramétrica ($\mathcal{U}$) está contenida en la colección $\mathcal{UD}$ y esta, a su vez, en el espacio $\mathcal{BE}$.

Palabras Clave: Ultramétrica, ultramétrica débil, b–métrica extendida.

Abstract

In this work, based on the concepts of ultrametric and extended b–metric, we introduce two new family of functions, those that preserve the weak ultrametric ($\mathcal{UD}$) and those that preserve the extended b–metric ($\mathcal{BE}$). Some of its properties are investigated and it is shown that the set of functions that preserve the ultrametric ($\mathcal{U}$) is contained in the collection $\mathcal{UD}$ and this in turn in the space $\mathcal{BE}$.

Keywords: Ultrametric, weak ultrametric, extended b–metric.

1. Introducción

El concepto de funciones que preservan la métrica aparece por primera vez en el artículo (Wilson, 1935) y a partir de ese momento es investigado por muchos autores; ver por ejemplo, (Borsik and Dobous, 1988; Corazza, 1999; Pongsriiam and Termwuttipong, 2014). Aquí no es la excepción, *grosso modo*, la idea central en esta temática es la que establece el problema siguiente:

Pregunta. ¿Bajo qué condiciones, $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ satisface que, para cualquier espacio métrico (X, d), se tiene que $f \circ d$ es una métrica?

En la actualidad, existen otros tipos importantes de distancias que aún no han sido exploradas o desarrolladas en relación con las funciones que preservan las métricas, a saber, ultramétricas, w–distancias, y τ–distancias. Estas distancias tienen muchas aplicaciones en matemáticas; ver por ejemplo, aplicaciones de w–distancias y τ–distancias en (Włodarczyk and Plebaniak, 2013; Suzuki, 2008).

Luego, una inquietud natural, motivada por la pregunta anterior, es:

Pregunta general. ¿Bajo qué condiciones, $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ satisface que, para cualquier b–métrica, w–distancia, o τ–distancia d en X, se cumple que, $f \circ d$ es una b–métrica, w–distancia o τ–distancia en X?

El objetivo de este trabajo es analizar el problema general, centrados particularmente en el caso de las ultramétricas, ultramétricas débiles y b–métricas extendidas. El trabajo está inspirado, en su mayoría, en las obras (Khemaratchatakumthorn and Pongsriiam, 2018) y (Khemaratchatakumthorn and Pongsriiam, 2019). Ellos investigan algunas relaciones entre las métricas, ultramétricas y b–métricas, y proporcionan una descripción completa entre estas familias.

Nosotros, en este trabajo, presentamos algunos resultados originales: la Nota 2.2 es muy importante, ya que (Khemaratchatakumthorn and Pongsriiam, 2018, Lema 13) comentan que, la demostración, se sigue del hecho que, todo espacio métrico es b–métrico, aquí incluimos su prueba. La Nota 2.6 y Lema 3.2, fáciles de demostrar, sus pruebas son obtenidas como un ejercicio que nos planteamos en su momento. Sobre las funciones que preservan la ultramétrica, ultramétricas débiles, se encuentra: la Nota 4.2, Definición 4.3 inciso (b), símbolo $\mathcal{UD}$, Propo-

[*] Autor para correspondencia: reinaldo.martinez.c@uatx.mx
Correo electrónico: reinaldo.martinez.c@uatx.mx (Reinaldo Martínez Cruz), hernandezpinaemmanuel@gmail.com (Emmanuel Hernández Piña).

Fecha de recepción: 30/03/2021 Fecha de aceptación: 18/05/2021 Fecha de publicación: 05/01/2022
https://doi.org/10.29057/icbi.v9i18.7128

sición 4.4, Corolario 4.6 y Corolario 4.8. Respecto a *b*–métricas extendidas: Observación 5.2, Observación 5.3, símbolo $\mathcal{BE}$, Definición 5.4, Teorema 5.5, Observación 5.6 y Teorema 5.7.

Deseamos que este trabajo motive o estimule la curiosidad para ampliar la información acerca de este tópico y contribuya al desarrollo de esta área.

Para llevar a cabo esta investigación, hemos contemplado cinco secciones como indicamos a continuación. En la sección de preliminares proporcionamos los conceptos, notas y resultados importantes que serán de utilidad en el desarrollo de esta tarea. En la sección de definiciones y propiedades básicas, incluimos el estado actual de las funciones que preservan la métrica, *b*–métrica, *b*–métrica–métrica y métrica–*b*–métrica. En la sección de ultramétricas y ultramétricas débiles buscamos alguna conexión entre ellas y con las *b*–métricas. En la sección de espacios *b*–métricos y *b*–métricos extendidos generalizamos algunas propiedades de las familias de funciones que preservan la *b*–métrica al espacio de funciones que preservan la *b*–métrica extendida.

Finalmente, comentamos que la noción de *b*–métrica aparece por primera vez en el artículo (Bakhtin, 1989) y, a partir de ahí, muchos autores lo referencian, ver por ejemplo (Czerwik, 1993; Khemaratchatakumthorn and Pongsriiam, 2019).

2. Preliminares

Empezamos esta sección recordando las definiciones de métrica y *b*–métrica.

Definición 2.1. Sea X un conjunto cualquiera no vacío.

A) Una métrica en X es una función $d : X \times X \to [0, \infty)$ que satisface las siguientes propiedades: para cada $x, y, z \in X$ se tiene que

(M1) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetría),

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (desigualdad triangular).

B) Una *b*–métrica en X, es una función d que satisface (M1), (M2) y, la desigualdad triangular se sustituye por la desigualdad $s-$triangular:

(B3) existe $s \geq 1$ tal que $d(x, y) \leq s(d(x, z) + d(z, y))$.

C) El par (X, d) es llamado espacio métrico si d es una métrica en X, y dicho par es un espacio *b*–métrico cuando d es una *b*–métrica en X.

Observemos que si (X, d) no es un espacio *b*–métrico, entonces para cada $s \geq 1$, existen puntos $x, y, z \in X$ tales que $d(x, y) > s(d(x, z) + d(z, y))$. En particular, para $s = 1$ obtenemos que, existen $x, y, z \in X$ tales que $d(x, y) > d(x, z) + d(z, y)$. En otras palabras, (X, d) no es un espacio métrico. Hemos verificado:

Nota 2.2. Si (X, d) es un espacio métrico, entonces es también un espacio *b*–métrico.

Para concluir esta sección, recordaremos algunas nociones que serán empleadas en el resto del trabajo, entre otras, la de función que preserva la métrica. Para el lector interesado en profundizar en esta temática, le recomendamos el capítulo: *Funciones que preservan la métrica*, que puede consultar en (Martínez et al., 2011).

Definición 2.3. Sea $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función. Se dice que:

(a) f *preserva la métrica* si para cualquier espacio métrico (X, d), se tiene que $f \circ d$ es una métrica en X. Además, f *preserva la métrica fuertemente*, si para cualquier métrica d, se tiene que, $f \circ d$ es equivalente a d.

(b) f es *flexible* si y sólo si $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

(c) f es *subaditiva* si para cualesquiera $x, y \in [0, \infty)$ se cumple que $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

(d) f es *casi-subaditiva* si existe $s \geq 1$ tal que se cumple $f(x + y) \leq s(f(x) + f(y))$ para toda $x, y \in [0, \infty)$.

(e) f es *convexa* si $f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y)$ para cualesquiera $x, y \in [0, \infty)$ y $t \in [0, 1]$.

(f) f es *cóncava* si $(1 - t)f(x) + tf(y) \leq f((1 - t)x + ty)$ para cualesquiera $x, y \in [0, \infty)$ y $t \in [0, 1]$.

(g) f es *creciente* en un intervalo $I \subsetneq [0, \infty)$ si para cada $x, y \in I$ con $x < y$, tenemos que $f(x) \leq f(y)$.

(Dobous, 1998), hace el siguiente comentario: es fácil ver que, toda función que preserva la métrica es flexible. Incluimos la prueba.

Nota 2.4. Si $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es una función que preserva la métrica, entonces f es flexible.

Demostración. Supongamos que, para cada espacio métrico (X, d), tenemos que, $f \circ d$ es una métrica. En particular, se cumple que, $x = y$ si y sólo si $0 = (f \circ d)(x, y) = f(d(x, y))$. De aquí se desprende que, $f(0) = 0$. □

Nuevamente, se debe a (Dobous, 1998), parte de la demostración de la siguiente Nota.

Nota 2.5. Si $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es concava y flexible, entonces f es subaditiva y creciente.

Demostración. Para establecer el resultado, sean $x, y \in [0, \infty)$. Consideremos dos casos.

Caso 1. Si $x = y$, entonces de la concavidad y flexibilidad de f se sigue que

$$\tfrac{1}{2}f(x + y) = \tfrac{1}{2}f(0) + \tfrac{1}{2}f(x + y) \leq f(\tfrac{1}{2}(x + y)) = f(x),$$

es decir, $f(x + y) \leq 2f(x) = f(x) + f(y)$.

Caso 2. Si $x < y$, entonces existe $t \in [0, 1]$ tal que $x = (1-t)y$ y, por consiguiente, $y = t(x + y) + (1 - t)x$. Una vez más, la concavidad y la flexibilidad de f implican que

$$(1 - t)f(y) = tf(0) + (1 - t)f(y) \leq f((1 - t)y) = f(x),$$

y

$$tf(x + y) + (1 - t)f(x) \leq f(t(x + y) + (1 - t)x) = f(y).$$

De estas desigualdades se sigue que

$$tf(x + y) + (1 - t)(f(x) + f(y)) \leq f(x) + f(y),$$

lo cual es equivalente a $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

Ambos casos implican que f es subaditiva.

Veamos ahora que f es creciente. Supongamos que existen $a, b \in [0, \infty)$ tales que $a < b$ y $f(a) > f(b)$. Pongamos

$$t = \frac{f(b)}{f(a)}, \quad y = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)} \text{ y } a = x.$$

Como f es concava, se sigue que

$$(1-t)f(y) + tf(x) \leq f((1-t)y + tx)$$

o, equivalentemente,

$$(1-t)f(y) + f(b) \leq f\left(\frac{f(a)-f(b)}{f(a)}y + \frac{f(b)}{f(a)}a\right) = f(b).$$

De aquí $f(y) \leq 0$. Pero $f(y) \geq 0$, así que $f(y) = 0$, lo cual nos da una contradicción al hecho de que $y > 0$ y f es flexible. $\square$

Por otra parte, si f no es *casi-subaditiva*, entonces para cada $s \geq 1$, existen $x, y \in [0, \infty)$ tales que $f(x+y) > s(f(x) + f(y))$. En particular, para $s = 1$, obtenemos que, existen $x, y \in [0, \infty)$ tales que $f(x+y) > f(x) + f(y)$. En otras palabras, f no es *subaditiva*. Hemos demostrado

Nota 2.6. Si $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es *subaditiva*, entonces f es *casi-subaditiva*.

Algunos resultados relacionados con funciones que preservan la métrica son los siguientes:

Lema 2.7. *Si f es una función que preserva la métrica, entonces f es subaditiva.*

Demostración. La prueba puede ser consultada, por ejemplo, en (Corazza, 1999, Proposición 2.1) $\square$

Una consecuencia inmediata de la Nota 2.6 y el Lema 2.7 es el siguiente hecho.

Lema 2.8. *Si f es una función que preserva la métrica, entonces f es casi-subaditiva.*

Lema 2.9. *Si $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es cóncava y flexible, entonces f preserva la métrica.*

Demostración. Supongamos que f es cóncava y flexible. Por la Nota 2.5, tenemos que f es subaditiva y creciente. Sea (X, d) un espacio métrico. Verificaremos que $f \circ d$ es una métrica. Sean $x, y, z \in X$. Entonces

(1) Por ser f flexible, tenemos que, $(f \circ d)(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$.

(2) $(f \circ d)(x, y) = f(d(x, y)) = f(d(y, x)) = (f \circ d)(y, x)$

(3) Pongamos $a = d(x, y)$, $b = d(x, z)$ y $c = d(z, y)$. Se sigue por la desigualdad triangular que, $a \leq b + c$. Ahora, por ser f creciente y subaditiva, se concluye que, $f(a) \leq f(b) + f(c)$. $\square$

3. Definiciones y propiedades básicas

Para comenzar proporcionamos las nociones básicas que serán el objeto de estudio del presente trabajo. Recomendamos al lector la cita (Khemaratchatakumthorn and Pongsriiam, 2018).

Definición 3.1. Sea $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Se dice que

i) f preserva la b–métrica si para cada espacio b–métrico (X, d), tenemos que $f \circ d$ es una b–métrica sobre X;

ii) f preserva la métrica–b–métrica si para cada espacio métrico (X, d), tenemos que $f \circ d$ es una b–métrica sobre X;

iii) f preserva la b–métrica–métrica si para cada espacio b–métrico (X, d), tenemos que $f \circ d$ es una métrica.

Al igual que en el Lema 2.8, obtenemos algo similar para funciones que preservan la b–métrica y cuya prueba no se encuentra en la literatura.

Lema 3.2. *Si f es una función que preserva la b–métrica, entonces f es cuasi-subaditiva.*

Demostración. Sean $x, y \in [0, \infty)$ y $d(x, y) = |y - x|$. Entonces

$$\begin{aligned} f(x+y) &= (f \circ d)(0, x+y) \\ &\leq s((f \circ d)(0, x) + (f \circ d)(x, x+y)) \\ &= s(f(x) + f(y)). \end{aligned}$$ $\square$

Denotamos por $\mathcal{M}$ el conjunto de funciones que preservan la métrica, por $\mathcal{B}$ la colección de funciones que preservan la b–métrica, por $\mathcal{MB}$ el espacio de funciones que preservan la métrica–b–métrica, y por $\mathcal{BM}$ la familia de funciones que preservan la b–métrica–métrica.

Una primera inquietud o interrogante que podríamos hacernos es la siguiente.

Pregunta. ¿Existe alguna relación entre estas clases?

La proposición siguiente da una respuesta a la pregunta anterior, y su demostración se debe a (Khemaratchatakumthorn and Pongsriiam, 2018, ver Teorema 15 y Ejemplo 16), agregamos aquí la prueba con el fin de hacer completa la exposición del tema.

Proposición 3.3. *Las siguientes relaciones se satisfacen: $\mathcal{BM} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{MB}$, $\mathcal{M} \nsubseteq \mathcal{BM}$ y $\mathcal{B} \nsubseteq \mathcal{M}$.*

Demostración. Veamos que $\mathcal{BM} \subseteq \mathcal{M}$. Sea $f \in \mathcal{BM}$. Vamos a verificar que $f \in \mathcal{M}$ o, equivalentemente, para cada espacio métrico (X, d), se debe cumplir que $f \circ d$ es una métrica.

Sean $x, y, z \in X$. Por la Nota 2.2, tenemos que (X, d) es un espacio b–métrico. Como $f \in \mathcal{BM}$, entonces f preserva la b–métrica–métrica. Así, de acuerdo con la Definición 3.1 inciso iii), $f \circ d$ es una métrica. Luego, $f \in \mathcal{M}$.

Ahora mostramos que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}$. Sea $f \in \mathcal{M}$, entonces para cada espacio métrico (X, d), se tiene que $f \circ d$ es una métrica. Por la Nota 2.2, (X, d) es un espacio b–métrico. Es suficiente demostrar que existe $s \geq 1$ tal que

$$(f \circ d)(x, y) \leq s((f \circ d)(x, z) + (f \circ d)(z, y)) \quad \text{para cualesquiera } x, y, z \in X.$$

Procedamos por contradicción. Para cada $s \geq 1$, existen puntos $x, y, z \in X$ tales que

$$(f \circ d)(x, y) > s((f \circ d)(x, z) + (f \circ d)(z, y)).$$

En particular, para $s = 1$ obtenemos que

$$(f \circ d)(x, y) > (f \circ d)(x, z) + (f \circ d)(z, y).$$

Pero, esta última desigualdad estricta contradice la desigualdad triangular de $f \circ d$. Luego, $f \in \mathcal{B}$.

Finalmente, se muestra que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{MB}$. Sea $f \in \mathcal{B}$. Verificarémos que $f \in \mathcal{MB}$ o equivalentemente, para cada espacio métrico (X, d), se debe satisfacer que, $f \circ d$ es una b–métrica sobre X. Sean $x, y, z \in X$. Por la Nota 2.2, (X, d) es un espacio b–métrico. Dado que $f \in \mathcal{B}$, de acuerdo con la Definición 3.1 inciso i), $f \circ d$ es una b–métrica sobre X. Luego, $f \in \mathcal{MB}$. $\square$

A partir de la Proposición 3.3, tenemos una imagen casi completa de las relaciones de subconjuntos entre $\mathcal{BM}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{MB}$, excepto que no sabemos si $\mathcal{MB} \subseteq \mathcal{B}$. (Khemaratchatakumthorn and Pongsriiam, 2019) demuestran que $\mathcal{MB} = \mathcal{B}$. Antes de compartir su demostración, iniciamos con algunas nociones y resultados auxiliares.

Definición 3.4. Una tripleta triangular es una terna (a, b, c) con $a, b, c \geq 0$ tales que $a \leq b + c$, $b \leq a + c$ y $c \leq a + b$. Se denota por $\triangle$ el conjunto de las tripletas triangulares.

En la siguiente definición, introducimos un tipo especial de tripletas triangulares que nos serán de utilidad para caracterizar funciones que preservan las b–métricas.

Definición 3.5. Sean $s \geq 1$ y $a, b, c \geq 0$. Una tripleta (a, b, c) será llamada tripleta s–triangular si $a \leq s(b + c)$, $b \leq s(c + a)$ y $c \leq s(a + b)$. El conjunto de tripletas s–triangulares se denota por $\triangle_s$.

En la cita Khemaratchatakumthorn-2018, se establece una caracterización de las funciones que preservan la métrica–b–métrica en términos de tripletas s–triangulares. Veamos como es esto

Teorema 3.6. *Suponga que f es flexible. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes*

1) $f \in \mathcal{MB}$.

2) *Existe $s \geq 1$ tal que $(f(a), f(b), f(c)) \in \triangle_s$ para cada $(a, b, c) \in \triangle$.*

Demostración. 1) → 2). Sea $f \in \mathcal{MB}$ y sea d la métrica Euclidiana sobre $\mathbb{R}^2$. Tenemos que $f \circ d$ es una b–métrica. Así, existe $s \geq 1$ tal que

$$f(d(x, y)) \leq s(f(d(x, z)) + f(d(z, y))) \text{ para cualquier } x, y, x \in \mathbb{R}^2.$$

Sea $(a, b.c) \in \triangle$. Por un argumento de la geometría Euclidiana, existen puntos $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $a = d(u, v)$, $b = d(u, w)$ y $c = d(v, w)$. Entonces

$$f(a) = f(d(u, v)) \leq s(f(d(u, w)) + f(d(w, v))) = s(f(b) + f(c)).$$

Similarmente $f(b) \leq s(f(a) + f(c))$ y $f(c) \leq s(f(a) + f(b))$. Por lo que $(f(a), f(b), f(c)) \in \triangle_s$.

2) → 1). Supongamos que existe $s \geq 1$ tal que la tripleta $(f(a), f(b), f(c))$ es un elemento de $\triangle_s$ para cada $(a, b, c) \in \triangle$. Sea (X, d) un espacio métrico. Como f es flexible, tenemos que $(f \circ d)(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$. Por otra parte, se sigue que $(f \circ d)(x, y) = (f \circ d)(y, x)$ para cada $x, y \in X$. Finalmente, si para $x, y, z \in X$ se fijan $a = d(x, y)$, $b = d(x, z)$ y $c = d(z, y)$, entonces por hipótesis resulta que, $(d(x, y), d(x, z), d(z, y)) \in \triangle$ y $(f(d(x, y)), f(d(x, z)), f(d(z, y))) \in \triangle_s$. Esto es,

$$(f \circ d)(x, y) \leq s((f \circ d)(x, z) + (f \circ d)(z, y)) \quad \text{para cualesquiera } x, y, z \in X.$$

De aquí que, $f \in \mathcal{MB}$. La prueba esta completa. □

Nuevamente en la cita(Khemaratchatakumthorn and Pongsriiam, 2018, ver Teorema 20), se demuestra el siguiente resultado. Procedemos a demostrarlo de una manera distinta.

Teorema 3.7. *Sea $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Si $f \in \mathcal{MB}$, entonces f es flexible y casi-subaditiva.*

Demostración. Supongamos que $f \in \mathcal{MB}$. Para demostrar que f es flexible, sea $x \in [0, \infty)$ tal que $f(x) = 0$. Se elige $X = \{A, B, C\} \subseteq \mathbb{R}^2$ con $A = (-\frac{x}{2}, 0)$, $B = (\frac{x}{2}, 0)$ y $C = (0, \frac{\sqrt{3}x}{2})$. Sean d_2 la métrica euclidiana de $\mathbb{R}^2$ y $d = d_2 |_X$ la restricción de d_2 sobre X. Entonces

$$d(A, B) = d(A, C) = d(B, C) = x.$$

Por hipótesis $f \in \mathcal{MB}$, entonces se tiene que $f \circ d$ es una b–métrica sobre X. En particular, se satisface la propiedad (M1),

$$0 = f(x) = f(d(A, B)) = (f \circ d)(A, B) \text{ si, y sólo si, } A = B.$$

O sea $(-\frac{x}{2}, 0) = (\frac{x}{2}, 0)$. Luego, $x = 0$.

Por otra parte, si f no es casi-subaditiva, entonces por el Lema 3.2, se tiene que f no preserva la b–métrica. Así, existe un espacio b–métrico tal que $f \circ d$ no es una b–métrica. Pero, $f \in \mathcal{MB}$ implica que, para cada espacio métrico y, por lo tanto, b–métrico de acuerdo con la Nota 2.2, tenemos que, $f \circ d$ es una b–métrica, y esto nos da una contradicción. Así, f tiene que ser casi-subaditiva. □

Una vez reunidas las herramientas necesarias, pasamos a difundir la prueba que $\mathcal{MB} = \mathcal{B}$.

Teorema 3.8. *Una función $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ preserva la métrica–b–métrica si, y sólo si, f preserva la b–métrica.*

Demostración. Vimos en la Proposición 3.3 que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{MB}$, resta ver que $\mathcal{MB} \subseteq \mathcal{B}$. Sea $f \in \mathcal{MB}$ y (X, d) un espacio b–métrico. Ahora, demostraremos que $f \circ d$ es una b–métrica. Por el Teorema 3.7, f es flexible y casi-subaditiva. Así, $(f \circ d)(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$ y $f(d(x, y)) = f(d(y, x))$ para cualesquiera $x, y \in X$.

Por otra parte, Como f es casi-subaditiva, existe $t \geq 1$ tal que, para cualquier $a, b \in [0, \infty)$,

$$f(a + b) \leq t(f(a) + f(b)). \tag{1}$$

Además, dado que d es una b–métrica, existe s_1 tal que

$$d(x, y) \leq s_1(d(x, z) + d(z, y)) \text{ para cualesquiera } x, y, z \in X.$$

Por la propiedad Arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $s_1 < n$, de aquí que, para cada $x, y, z \in X$

$$d(x, y) \leq n(d(x, z) + d(z, y)). \tag{2}$$

Por hipótesis $f \in \mathcal{MB}$, así por el Teorema 3.6, existe $s_2 \geq 1$ tal que, para cualquier $(a, b, c) \in \triangle$, se tiene que,

$$(f(a), f(b), f(c)) \in \triangle_{s_2}. \tag{3}$$

Pongamos $s = 2s_2nt^n$, y para $x, y, z \in X$, sean $a = d(x, y)$, $b = d(x, z)$ y $c = d(z, y)$. Por la desigualdad (2), $a \leq n(b + c)$. Así, $(a, nb + nc, nb + nc) \in \triangle$. Ahora, por la expresión (3),

$$(f(a), f(nb + nc), f(nb + nc)) \in \triangle_{s_2}.$$

Obtenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} f(d(x, y)) = f(a) &\leq s_2(f(nb + nc) + f(nb + nc)) \\ &= 2s_2 f(n(b + c)). \end{aligned} \tag{4}$$

En lo que sigue demostraremos que, para todo $x \in [0,\infty)$ y $m \in \mathbb{N}$,

$$f(mx) \leq mt^{m-1} f(x). \tag{5}$$

Sea $x \in [0,\infty)$. Aplicaremos el principio de inducción matemática sobre m para demostrar la desigualdad (5). Para $m = 1$, se obtiene que $f(x) \leq f(x)$. Sea $m > 1$, y supongamos que la desigualdad (5) se satisface para m, esto es, $f(mx) \leq mt^{m-1} f(x)$. Como $1 \leq t$, entonces

$$mt^{m-1} + 1 \leq (m+1)t^{m-1}.$$

Por la desigualdad (1) y la hipótesis inductiva, obtenemos que

$$\begin{aligned} f((m+1)x) &= f(mx + x) \\ &\leq t(f(mx) + f(x)) \\ &\leq t(mt^{m-1} f(x) + f(x)) \\ &= t(mt^{m-1} + 1) f(x) \\ &\leq t(m+1)t^{m-1} f(x) \\ &= (m+1)t^m f(x). \end{aligned}$$

Finalmente, por (4), (5) y (1), obtenemos

$$\begin{aligned} f(d(x,y)) &\leq 2s_2 f(n(b+c)) \\ &\leq 2s_2 nt^{n-1} f(b+c) \\ &\leq 2s_2 nt^{n-1} t(f(b) + f(c)) \\ &= 2s_2 nt^n (f(b) + f(c)) \\ &= s(f(b) + f(c)) \\ &= s(f(d(x,z)) + f(d(z,y))). \end{aligned}$$

□

(Khemaratchatakumthorn and Pongsriiam, 2019) utilizan los Teorema 3.6 y 3.8, para obtener el siguiente corolario.

Corolario 3.9. *Sea $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ flexible. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) $f \in \mathcal{B}$.

(ii) $f \in \mathcal{MB}$.

(ii) *Existe $s \geq 1$ tal que $(f(a), f(b), f(c)) \in \triangle_s$ para cada $(a,b,c) \in \triangle$.*

(Dobous, 1998) aplica el principio de inducción matemática, para obtener el siguiente lema.

Lema 3.10. *Sea $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función subaditiva. Entonces para todo entero positivo n y cada $x \in [0,\infty)$, se tiene que $f(nx) \leq nf(x)$ y $2^{-n} f(x) \leq f(2^{-n}x)$.*

Demostración. Sea $x \in [0,\infty)$ y supongamos que f es subaditiva. Para $n = 1$, tenemos que $f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) \leq 2f(\frac{x}{2})$. Supongamos que se cumple para $n = k$. Se demuestra que la desigualdad se satisface para $n = k+1$.

$$\begin{aligned} 2^{-(k+1)} f(x) &= 2^{-(k+1)} f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) \\ &\leq 2^{-(k+1)} 2 f\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2^{-k} f\left(\frac{x}{2}\right) \\ &\leq f\left(2^{-k} \frac{x}{2}\right) \\ &= f\left(2^{-(k+1)} x\right). \end{aligned}$$

La otra desigualdad se demuestra de manera similar. □

(Borsik and Dobous, 1988), demuestran el siguiente hecho.

Lema 3.11. *Sea $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función que preserva la métrica y $h > 0$. Si f es convexa en el intervalo $[0,h]$, entonces f es lineal en $[0,h]$.*

Demostración. Como f preserva la métrica, entonces por la Nota 2.4, f es flexible. Además, por ser convexa en el intervalo $[0,h]$, se tiene que, para cada $a, b \in (0,h]$ con $a \leq b$,

$$f(a) = f\Big(\frac{a}{b} b + \Big(1 - \frac{a}{b}\Big)0\Big) \leq \frac{a}{b} f(b) + \Big(1 - \frac{a}{b}\Big) f(0) = \frac{a}{b} f(b).$$

De aquí que,

$$a \leq b \ \text{ implica que } \ \frac{f(a)}{a} \leq \frac{f(b)}{b}. \tag{6}$$

Mostrarémos que

$$f(x) = \frac{f(h)}{h} x \ \text{ para cada } \ x \in [0,h].$$

Sea $x \in (0,h]$. Por la propiedad Arquimediana, $2^{-n}h \leq x$. Entonces de acuerdo a (6) y el Lema 3.10, $f(2^{-n}h) = 2^{-n} f(h)$. Por lo que

$$\frac{f(h)}{h} = \frac{2^{-n} f(h)}{2^{-n}h} = \frac{f(2^{-n}(h))}{2^{-n}h} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(h)}{h}.$$

De aquí que $f(x) = \dfrac{f(h)}{h} x$ □

El siguiente Teorema se debe a (Khemaratchatakumthorn and Pongsriiam, 2018), y nos es de utilidad, ya que nos permite adaptar un resultado y su demostración para espacios b–métricos extendidos vea Teorema 5.7.

Teorema 3.12. *Sea $\alpha > 0$ y defina $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ por $f(x) = x^\alpha$. Entonces las siguientes afirmaciones son válidas.*

(i) *Si $0 < \alpha \leq 1$, entonces f es una función que preserva la métrica.*

(ii) *Si $\alpha > 1$, entonces f es una función que preserva la b–métrica, pero no preserva la métrica.*

Demostración. Si $0 < \alpha \leq 1$, es fácil ver que f es flexible y concava. Así, por Lema 2.9, f preserva la métrica.

Suponemos que $\alpha > 1$ y definimos $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \frac{(1+x)^\alpha}{1+x^\alpha}.$$

Tenemos que

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}(1-x^{\alpha-1})}{(1+x^\alpha)^2}.$$

Por lo que

$$\frac{dg(x)}{dx} \geq 0 \ \text{ si, y sólo si, } \ x \leq 1.$$

Así g es creciente en el intervalo $[0,1]$ y decreciente en $[1,\infty)$. De aquí que, para cada $x \in [0,\infty)$,

$$g(x) \leq g(1) = 2^{\alpha-1}. \tag{7}$$

Para mostrar que f es una función que preserva la b–métrica, sea d una b–métrica sobre el espacio X, y $s \geq 1$ una constante tal que $d(x,y) \leq s(d(x,z)+d(z,y))$ para cada $x,y,z \in X$. Verificaremos únicamente que, $f \circ d$ satisface la propiedad (B3) de b–métrica, ya que las otras propiedades son inmediatas. Sean $a,b,c \in X$. Si $a = c$, entonces

$$\begin{aligned}(f \circ d)(a,b) &= f(d(a,b))\\ &= (d(a,b))^{\alpha}\\ &\leq s^{\alpha}(d(a,c)+d(c,b))^{\alpha}\\ &= s^{\alpha}(d(c,b))^{\alpha}\\ &= s^{\alpha} f(d(c,b))\\ &= s^{\alpha}(0+f(d(c,b)))\\ &= s^{\alpha}(f(0)+f(d(c,b)))\\ &= s^{\alpha}(f(d(a,c))+f(d(c,b)))\\ &= s^{\alpha}((f \circ d)(a,c)+(f \circ d)(c,b)).\end{aligned}$$

Si $a \neq c$, entonces $d(a,c) > 0$. Así, por la desigualdad (7), obtenemos que,

$$g\left(\frac{d(c,b)}{d(a,c)}\right) \leq 2^{\alpha-1},$$

lo cual es equivalente a,

$$\frac{f\left(\frac{d(c,b)}{d(a,c)}+1\right)}{1+f\left(\frac{d(c,b)}{d(a,c)}\right)} \leq 2^{\alpha-1}$$

y a su vez a,

$$f\left(\frac{d(c,b)}{d(a,c)}+1\right) \leq 2^{\alpha-1}\left(1+f\left(\frac{d(c,b)}{d(a,c)}\right)\right).$$

Es decir, $[d(a,c)+d(c,b)]^{\alpha} \leq 2^{\alpha-1}[(d(a,c))^{\alpha}+(d(c,b))^{\alpha}]$. De aquí que,

$$\begin{aligned}(f \circ d)(a,b) &= f(d(a,b))\\ &= (d(a,b))^{\alpha}\\ &\leq s^{\alpha}(d(a,c)+d(c,b))^{\alpha}\\ &\leq s^{\alpha}2^{\alpha-1}((d(a,c))^{\alpha}+(d(c,b))^{\alpha})\\ &= s^{\alpha}2^{\alpha-1}(f(d(a,c))+f(d(c,b)))\\ &= s^{\alpha}2^{\alpha-1}((f \circ d)(a,c)+(f \circ d)(c,b)).\end{aligned}$$

Por lo que, f es una función que preserva la b–métrica. Dado que

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0 \ \text{ para cada } \ x > 0,$$

se sigue que f es convexa en el intervalo $[0,1]$. Pero, f no es lineal en $[0,1]$, obtenemos por el Lema 3.11 que f no es una función que preserva la métrica. Esto completa la prueba. □

Para finalizar con esta sección, proporcionamos los ejemplos dados por(Khemaratchatakumthorn and Pongsriiam, 2018), para evidenciar que, las contenciones $\mathcal{BM} \subseteq \mathcal{M}$ y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$ dadas en la Proposición 3.3 son propias.

Ejemplo 3.13. (i) $\mathcal{M} \nsubseteq \mathcal{BM}$. Sea $f(x) = x$ para cada $x \in [0,\infty)$. Se sigue que, f es flexible, subaditiva y creciente; así por el Lema 2.9, $f \in \mathcal{M}$. Pongamos

$$d(x,y) = |x-y|^2 \ \text{ y } \ \rho(x,y) = |x-y| \ \text{ para cada } \ x,y \in \mathbb{R}.$$

Sea $g(x) = x^2$ para cada $x \in [0,\infty)$. Dado que $d = g \circ \rho$, por el Teorema 3.12 obtenemos que, d es una b–métrica. Pero, $f \circ d = d$ no es una métrica sobre $\mathbb{R}$. Por lo que $f \notin \mathcal{BM}$.

(ii) $\mathcal{B} \nsubseteq \mathcal{M}$. Sea $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ definida por $f(x) = x^2$. Entonces por el Teorema 3.12, $f \in \mathcal{B}$, pero $f \notin \mathcal{M}$.

4. Ultramétrica y ultramétrica débil

Existen otros conceptos de los que conviene hacer una aclaración: algunas métricas tienen nombres diferentes, pero en realidad son iguales. Por ejemplo, la b–métrica también se conoce como casi métrica. Investigadores utilizan la inframétrica (o la ultramétrica débil) y parece ser diferente al de b–métrica ver (Czerwik, 1993). La definición de inframétrica y de ultramétrica es la siguiente.

Definición 4.1. Sea X un conjunto no vacío. Una inframétrica (o ultramétrica débil) en X es una función $d : X \times X \to [0,\infty)$ que satisface las siguientes tres condiciones: para cada $x,y,z \in X$ se tiene que

(I1) $d(x,y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$,
(I2) $d(x,y) = d(y,x)$ (simetría),
(I3) existe $C \geq 1$ tal que $d(x,y) \leq C \max\{d(x,z), d(z,y)\}$.

Una ultramétrica en X es una función d que satisface (I1), (I2) y la desigualdad ultramétrica

(U3) $d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\}$, para $x,y,z \in X$.

El par (X,d) es llamado espacio ultramétrico débil si d es una ultramétrica débil en X y dicho par es un espacio ultramétrico cuando d es una ultramétrica en X.

En la siguiente observación proporcionamos una relación entre la ultramétrica y ultramétrica débil. Comentamos que, aunque la prueba es fácil, esta no se encuentra en la Bibliografía.

Nota 4.2. Todo espacio ultramétrico (X,d) es un espacio ultramétrico débil.

Demostración. Supongamos que para cada $C \geq 1$, existen puntos $x,y,z \in X$ tales que

$$d(x,y) > C \max\{d(x,z), d(z,y)\}.$$

En particular, $C = 1$ implica que existen puntos $x,y,z \in X$ tales que

$$d(x,y) > \max\{d(x,z), d(z,y)\}.$$

O sea, (X,d) no es ultramétrico. □

La definición siguiente inciso (a) nos impulsó a definir la del inciso (b), así como la notación $\mathcal{UD}$.

Definición 4.3. Sea $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$. Se dice que:

(a) f preserva la ultramétrica si para cada espacio ultramétrico (X,d), tenemos que $f \circ d$ es una ultramétrica;

(b) f preserva la ultramétrica débil si para cada espacio ultramétrica débil (X,d), tenemos que $f \circ d$ es una ultramétrica débil.

Denotamos por $\mathcal{U}$ la familia de funciones que preservan la ultramétrica y por $\mathcal{UD}$ la colección de funciones que preservan la ultramétrica débil.

Pregunta. ¿Existe alguna relación entre estas clases?

En la proposición siguiente damos respuesta a la pregunta, y conectamos por primera vez, las colecciones $\mathcal{U}$ con $\mathcal{UD}$.

Proposición 4.4. *Tenemos que* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{UD}$.

Demostración. Sean $f \in \mathcal{U}$, entonces para cada espacio ultramétrico (X, d), tenemos que $f \circ d$ es una ultramétrica en X. La Nota 4.2 implica que, (X, d) es un espacio ultramétrico débil. Supongamos que $f \circ d$ no es una ultramétrica débil en X, entonces para cada $C \geq 1$ existen puntos $x, y, z \in X$ tales que

$$(f \circ d)(x, y) > C \max\{(f \circ d)(x, z), (f \circ d)(z, y)\}.$$

En particular, para $C = 1$ existen $x, y, z \in X$ tales que

$$(f \circ d)(x, y) > \max\{(f \circ d)(x, z), (f \circ d)(z, y)\}.$$

O sea, $f \circ d$ no es una ultramétrica, lo cual nos da una contradicción. □

En la referencia (Khemaratchatakumthorn and Pongsriiam, 2019) se demuestra que $\mathcal{B} = \mathcal{UD}$.

Teorema 4.5. *Supongamos que X es un conjunto no vacío y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una función. Entonces d es una b–métrica si, y sólo si, d es una ultramétrica débil.*

Demostración. Supongamos que d es una b–métrica. Entonces existe $s \geq 1$ tal que

$$d(x, y) \leq s(d(x, z) + d(z, y)) \quad \text{para cada} \quad x, y, z \in X.$$

Basta verificar la propiedad I3), ya que las otras propiedades coinciden. Sean $x, y, z \in X$, entonces

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq s(d(x, z) + d(z, y)) \\ &\leq s\{\max\{d(x, z), d(z, y)\} + \max\{d(x, z), d(z, y)\}\} \\ &= 2s \max\{d(x, z), d(z, y)\}, \end{aligned}$$

Pongamos $C = 2s$, tenemos que $C \geq 1$ y

$$d(x, y) \leq C \max\{d(x, z), d(z, y)\} \quad \text{para cualesquiera} \quad x, y, z \in X.$$

Así, d es una ultramétrica débil.

Ahora, supongamos que d es una ultramétrica débil, entonces existe $C \geq 1$ tal que

$$d(x, y) \leq C \max\{d(x, z), d(z, y)\} \quad \text{para cualesquiera} \quad x, y, z \in X.$$

Como $\max\{d(x, z), d(z, y)\} \leq d(x, z) + d(z, y)$, entonces se sigue que $C \max\{d(x, z), d(z, y)\} \leq C(d(x, z) + d(z, y))$. Esto demuestra que d es una b–métrica. □

Por la Proposición 4.4 y el Teorema 4.5, obtenemos el siguiente corolario. Este resultado es un aporte, ya que relaciona por primera las familias de funciones que preservan la ultramétrica y b–métricas.

Corolario 4.6. *Tenemos que* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$.

A continuación hacemos un resumen del estado actual que llevamos hasta el momento.

Observación 4.7. i). En la Proposición 3.3, vimos que $\mathcal{BM} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{MB}$, y a partir del Ejemplo 3.13 concluimos que las contenciones $\mathcal{BM} \subseteq \mathcal{M}$ y $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}$ son propias.

ii). El Teorema 3.8 y Corolario 4.6, implican que, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{MB}$. Así, $\mathcal{MB} = \mathcal{B} \cup \mathcal{M} \cup \mathcal{BM} \cup \mathcal{U}$.

En la Nota 2.4, se demostró que, si $f \in \mathcal{M}$, entonces f es flexible. Extendemos este hecho para el caso de cualquier función $f \in \mathcal{B} \cup \mathcal{M} \cup \mathcal{BM} \cup \mathcal{U}$.

Corolario 4.8. *Sea $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Si f está en $\mathcal{M}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{B}$ o $\mathcal{BM}$, entonces f es flexible.*

Demostración. La Observación 4.7 inciso ii), nos dice que,

$$\mathcal{MB} = \mathcal{B} \cup \mathcal{M} \cup \mathcal{BM} \cup \mathcal{U}.$$

Así, si f pertenece a cualquier colección $\mathcal{M}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{B}$ o $\mathcal{BM}$, entonces $f \in \mathcal{MB}$. Luego, el resultado se sigue del Teorema 3.7. □

5. Espacios b-métricos y b-métricos extendidos

En esta sección se muestra como algunas propiedades que se han descrito anteriormente, son válidas en un nuevo tipo de espacio métrico generalizado, a saber el espacio b–métrico extendido. Invitamos al lector la lectura proporcionada en (Kamran et al., 2017).

Definición 5.1. Sea X un conjunto no vacío y $\theta : X \times X \to [1, \infty)$ una función. Se dice que $d_\theta : X \times X \to [0, \infty)$ es una b–métrica extendida si para todo $x, y, z \in X$ se satisface:

($d_\theta 1$) $d_\theta(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$;

($d_\theta 2$) $d_\theta(x, y) = d_\theta(y, x)$;

($d_\theta 3$) $d_\theta(x, z) \leq \theta(x, z)[d_\theta(x, y) + d_\theta(y, z)]$.

El par (X, d_θ) es llamado espacio b–métrico extendido.

Observación 5.2. Todo espacio b–métrico (X, d) es un espacio b–métrico extendido.

Demostración. Supongamos que (X, d) es un espacio b–métrico. Verificarémos únicamente la propiedad ($d_\theta 3$), ya que las otras dos propiedades coinciden. Sean $x, y, z \in X$. Como d es una b–métrica sobre X, existe una constante $s \geq 1$ tal que $d(x, z) \leq s(d(x, y) + d(y, z))$. Pongamos $\theta(x, z) = s$ y $d_\theta(x, z) = d(x, z)$. Tenemos que ($d_\theta 3$) se satisface. □

Una consecuencia inmediata de la Nota 2.2 y la Observación 5.2 es lo siguiente

Observación 5.3. Todo espacio métrico (X, d) es un espacio b–métrico extendido.

La definición que presentamos en seguida, está motivada en la colección $\mathcal{B}$, así como la notación $\mathcal{BE}$.

Definición 5.4. Una función $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ preserva la b–métrica extendida si para cada espacio b–métrico extendido (X, d_θ), existe $\hat{\theta} : X \times X \to [1, \infty)$ tal que $(f \circ d_\theta)_{\hat{\theta}}$ es una b–métrica extendida en X.

Denotamos por $\mathcal{BE}$ el espacio de funciones que preservan la b–métrica extendida. Una pregunta inmediata es:

Pregunta. ¿Existe alguna relación entre las clases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{BE}$?

Damos respuesta a esta pregunta, con la demostración del teorema siguiente, y de este modo conectamos por primera vez estas colecciones.

Teorema 5.5. *La siguiente contención se satisface:* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{BE}$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{B}$. Por el Teorema 3.8, $f \in \mathcal{MB}$. Ahora por el Teorema 3.7, f es flexible y casi-subaditiva. Además, $f \in \mathcal{B}$ implica que, para cada espacio b–métrico (X, d), tenemos que $f \circ d$ es una b–métrica. Por la Observación 5.2, (X, d) es un espacio b–métrico extendido.

Como f es casi-subaditiva, existe $s \geq 1$ tal que

$$f(x + y) \leq s(f(x) + f(y)) \text{ para cada } x, y \in [0, \infty).$$

Sea $\theta : X \times X \to [1, \infty)$ definida por $\theta(x, z) = s$ para cualesquiera $x, z \in X$. Veamos que $f \circ d = (f \circ d)_\theta$ es una b–métrica extendida. Sean $x, y, z \in X$. Como ya es usual, f flexible implica que $(f \circ d)_\theta(x, z) = 0$ si, y sólo si, $x = y$. Además, resulta que $(f \circ d)_\theta(x, z) = (f \circ d)_\theta(z, x)$.

Falta verificar la propiedad $(d_\theta 3)$. Ya que f es casi-subaditiva, se sigue que

$$\begin{aligned}(f \circ d)_\theta(0, x + y) &= f(x + y)\\ &\leq s(f(x) + f(y))\\ &\leq \theta(x, z)(f(x) + f(y))\\ &= \theta(x, z)(f(d(0, x)) + f(d(x + y, x)))\\ &= \theta(x, z)((f \circ d)_\theta(0, x) + (f \circ d)_\theta(x + y, x)).\end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

Con la observación siguiente dejamos por hecho la investigación anunciada en el resumen.

Observación 5.6. Por el Corolario 4.6 y el Teorema 5.5, obtenemos que

$$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{BE}.$$

El siguiente resultado es un aporte a la literatura de espacios b–métricos extendidos.

Teorema 5.7. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha > 1$ y sea $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definida por $f(x) = x^\alpha$. Entonces f es una función que preserva la b–métrica y la b–métrica extendida.*

Demostración. Por el Teorema 3.12 inciso (ii), f preserva la b–métrica. Así, para cada espacio b–métrico (X, d), tenemos que $f \circ d_\theta$ es una b–métrica en X. Además, por la Observación 5.2, (X, d) es un espacio b–métrico extendido.

Mostramos ahora que f preserva la b–métrica extendida.

Sea $\theta : X \times X \to [1, \infty)$ y (X, d_θ) un espacio b–métrico extendido. Definimos $\hat{\theta} : X \times X \to [1, \infty)$ por $\hat{\theta}(x, z) = 2^{\alpha-1}\theta(x, z)^\alpha$ para todo $x, z \in X$. Verificamos que $(f \circ d_\theta)_{\hat{\theta}} = f \circ d_\theta$ es una b–métrica extendida en X.

Sean $x, y, z \in X$. Como f es flexible, $(f \circ d_\theta)_{\hat{\theta}}(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$. Además,

$$(f \circ d_\theta)_\theta(x, y) = (f \circ d_\theta)_{\hat{\theta}}(y, x).$$

Esto muestra que $(d_{\hat{\theta}}1)$ y $(d_{\hat{\theta}}2)$ se satisfacen. Mostramos ahora que $(f \circ d_\theta)_{\hat{\theta}}$ satisface $(d_{\hat{\theta}}3)$. Si $x = y$, entonces

$$\begin{aligned}(f \circ d_\theta)_{\hat{\theta}}(x, z) &= f(d_\theta(x, z))\\ &= (d_\theta(x, z))^\alpha\\ &\leq \theta(x, z)^\alpha(d_\theta(x, y) + d_\theta(y, z))^\alpha\\ &= \theta(x, z)^\alpha(d_\theta(y, z))^\alpha\\ &= \theta(x, z)^\alpha f(d_\theta(y, z))\\ &= \theta(x, z)^\alpha(0 + f(d_\theta(y, z)))\\ &= \theta(x, z)^\alpha(f(0) + f(d_\theta(y, z)))\\ &= \theta(x, z)^\alpha(f(d_\theta(x, y)) + f(d_\theta(y, z)))\\ &= \theta(x, z)^\alpha((f \circ d_\theta)(x, y) + (f \circ d_\theta)(y, z))\\ &\leq 2^{\alpha-1}\theta(x, z)^\alpha((f \circ d_\theta)(x, y) + (f \circ d_\theta)(y, z))\\ &= \hat{\theta}(x, z)((f \circ d_\theta)_{\hat{\theta}}(x, y) + (f \circ d_\theta)_{\hat{\theta}}(y, z)).\end{aligned}$$

Si $x \neq y$, entonces $d_\theta(x, y) > 0$. Luego, si $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ se define por

$$g(t) = \frac{(1 + t)^\alpha}{1 + t^\alpha},$$

del Teorema 3.12 sabemos que $g(t) \leq 2^{\alpha-1}$ para todo $t \geq 0$. Así, obtenemos que,

$$g\left(\frac{d_\theta(y, z)}{d_\theta(x, y)}\right) \leq 2^{\alpha-1},$$

lo cual es equivalente a,

$$\frac{f\left(\frac{d_\theta(y,z)}{d_\theta(x,y)} + 1\right)}{1 + f\left(\frac{d_\theta(y,z)}{d_\theta(x,y)}\right)} \leq 2^{\alpha-1},$$

y esto a su vez por,

$$f\left(\frac{d_\theta(y, z)}{d_\theta(x, y)} + 1\right) \leq 2^{\alpha-1}\left(1 + f\left(\frac{d_\theta(y, z)}{d_\theta(x, y)}\right)\right).$$

Es decir, $(d_\theta(x, y) + d_\theta(y, z))^\alpha \leq 2^{\alpha-1}(d_\theta(x, y)^\alpha + d_\theta(y, z)^\alpha)$. De aquí que,

$$\begin{aligned}(f \circ d_\theta)_{\hat{\theta}}(x, z) &= f(d_\theta(x, z))\\ &= (d_\theta(x, z))^\alpha\\ &\leq \theta(x, z)^\alpha(d_\theta(x, y) + d_\theta(y, z))^\alpha\\ &\leq 2^{\alpha-1}\theta(x, z)^\alpha(d_\theta(x, y)^\alpha + d_\theta(x, z)^\alpha)\\ &= 2^{\alpha-1}\theta(x, z)^\alpha(f(d_\theta(x, y)) + f(d_\theta(y, z)))\\ &= 2^{\alpha-1}\theta(x, z)^\alpha((f \circ d_\theta)(x, y) + (f \circ d_\theta)(y, z))\\ &= \hat{\theta}(x, z)((f \circ d_\theta)_{\hat{\theta}}(x, y) + (f \circ d_\theta)_{\hat{\theta}}(y, z)).\end{aligned}$$

Ambos casos muestran que f preserva la b–métrica extendida. Esto completa la prueba. □

6. Conclusiones

A continuación mencionamos lo que a nuestro juicio son los aportes fundamentales de este trabajo:

(i) Todo espacio métrico (X, d) es un espacio b–métrico (ver la Nota 2.2). Este hecho lo utilizan (Khemaratchatakumthorn and Pongsriiam, 2018, Lema 13).

(ii) Si $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es *subaditiva*, entonces f es *casi-subaditiva* (ver la Nota 2.6).

Como consecuencia inmediata de la Nota 2.6 y el Lema 2.7 obtuvimos:

(iii) Si f es una función que preserva la métrica, entonces f es casi-subaditiva (ver el Lema 2.8).

Respecto a espacios b–métricos:

(a) Motivados por el Lema 2.8, demostramos: Si f es una función que preserva la b–métrica, entonces f es casi-subaditiva (ver el Lema 3.2). Este resultado es importante, y se refleja en la demostración de los Teoremas 3.7 y 3.8.

Respecto a los espacios ultramétricos y ultramétricos débiles enlistamos:

(1) Todo espacio ultramétrico (X, d) es ultramétrico débil, (ver la Nota 4.2). Ademas, la Definición 4.3 inciso (b), el símbolo $(\mathcal{UD})$ y la Proposición 4.4.

(2) Aunque el Teorema 4.5 no es de nuetra autoría, este junto con la Proposición 4.4 implican que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ (ver Corolario 4.6), y además sin menospreciar el Corolario 4.8.

Respecto a los espacios b–métricos y b–métricos extendidos obtuvimos lo siguiente:

(i) Todo espacio b–métrico (X, d) es un espacio b–métrico extendido (ver la Observación 5.2).

La Nota 2.2 y la Observación 5.2 implican que

(ii) Todo espacio métrico (X, d) es un espacio b–métrico extendido (ver la Observación 5.3).

(iii) La Definición 5.4, la notación $\mathcal{BE}$ y la Observación 5.3.

(iv) La contención $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{BE}$ (ver el Teorema 5.5).

(v) Obtuvimos las contenciones $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{UD} \subseteq \mathcal{BE}$ (vea la Observación 5.6).

(vi) El Teorema 5.7, así como su demostración es una adaptación a los espacios b–métricos extendidos.

Por supuesto, quedan algunas preguntas por responder.

Problema. (a) ¿La contención $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{BE}$ es propia?, es decir, ¿es posible proporcionar algún ejemplo para el cual $\mathcal{BE} \subseteq \mathcal{B}$ no se satisface?

(b) ¿Es posible extender el concepto de espacio ultramétrico?, y en caso afirmativo, ¿cuáles son las propiedades de tales espacios?

Agradecimientos

Los autores damos las gracias a los árbitros por la revisión exhaustiva y las sugerencias a nuestro trabajo.

Referencias

Bakhtin, I. A. (1989). The contraction mapping principle in almost metric space. *Functional Analysis*, 30:26–37.

Borsik, J. and Dobous, J. (1988). On metric preserving functions. *Real Analysis Exchange*, 13(1):285–293.

Corazza, P. (1999). Introduction to metric-preserving functions. *The American Mathematical Monthly*, 106(4):309–323.

Czerwik, S. (1993). Contraction mappings in b–metric spaces. *Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis*, 1(1):5–11.

Dobous, J. (1998). *Metric Preserving Functions*. Online Lecture Notes available at http://web,science.upjs.sk/jozefdobos/wp-content/uploads/2012/03/mpf1.pdf.

Kamran, T., Samreen, M., and UL Ain, Q. (2017). A generalization of b–metric space and some fixed point theorems. *Mathematics*, 5(2):1–7.

Khemaratchatakumthorn, T. and Pongsriiam, P. (2018). Remarks on b–metric and metric-preserving functions. *Mathematica Slovaca*, 68(5):1009–1016.

Khemaratchatakumthorn, T. and Pongsriiam, P. (2019). Further remarks on b–metrics, metric-preserving functions, and other related metrics. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 14(2):473–480.

Martínez, R., Pérez, J. E., and Galicia, A. (2011). Funciones que preservan la métrica. In Angoa, J., Arrazola, J., and Escobedo, R., editors, *Topología y Sistemas Dinámicos*, volume IV, chapter 6. Dirección de Fomento Editorial, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México.

Pongsriiam, P. and Termwuttipong, I. (2014). Remarks on ultrametrics y metric-preserving functions. *Abstract and Applied Analysis*, 2014:1–9.

Suzuki, T. (2008). w–distances and τ–distances. *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, 13(1):15–27.

Wilson, W. A. (1935). On certain types of continuous transformations of metric spaces. *American Journal of Mathematics*, 57(1):62–68.

Włodarczyk, K. and Plebaniak, R. (2013). Contractions of Banach, Tarafdar, Meir-Keeler, Ciric-Jachymski-Matkowski and Suzuki types and fixed points in uniform spaces with generalized pseudodistances. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 404(2):338–350.