DESDE 2013
https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/icbi/issue/archive
Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI
ISSN: 2007-6363

Publicación Semestral Pädi (2022) 1–2

Erratum: Funciones que preservan la b–métrica extendida y otras métricas relacionadas
Erratum: Extended b–metric–preserving functions and other related metrics

R. Martínez-Cruz [a,*], E. Hernández-Piña [a]

[a] *Facultad de Ciencias Básicas Ingeniería y Tecnología, Universidad Autónoma de Tlaxcala, 90401, Apizaco, Tlaxcala, México.*

Resumen

En este trabajo, proporcionamos un contraejemplo para subsanar un error cometido en el artículo: Funciones que preservan la b–métrica extendida y otras métricas relacionadas. En particular, las contensiones siguientes no se satisfacen: $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{UD}$, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ y $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{BE}$ ver (Martínez, 2022)[Proposición 4.4, Corolario 4.6 y Observación 5.6]. Fecha de publicación 05/01/2022, Vol 9, No. 18 (2022), págs 47-55 y DOI: https://doi.org/10.29057/icbi.v9i18.7128.

Palabras Clave: Ultramétrica, ultramétrica débil, b–métrica extendida.

Abstract

In this work, we provide a counterexample to correct an error made in the article: Functions that preserve the extended b–metric and other related metrics. In particular, the following contentions are not satisfied: $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{UD}$ and hence $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ and $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{BE}$ see (Martínez, 2022)[Proposition 4.4, Corollary 4.6 and Observation 5.6]. Publication date 05/01/2022, Vol 9, No. 18 (2022), pp. 47-55 and DOI: https://doi.org/10.29057/icbi.v9i18.7128.

Keywords: Ultrametric, weak ultrametric, extended b–metric.

1. Introducción

En el artículo (Martínez, 2022) dimos a conocer dos familias, a saber, la colección de funciones que preservan la ultramétrica débil $\mathcal{UD}$ y el conjunto de funciones que preservan la b–métrica extendida $\mathcal{BE}$. Investigamos sus relaciones entre ellas y otras ya conocidas. Ahí, se verificó que, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{UD}$, por ende $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ y $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{BE}$ ver (Martínez, 2022)[Proposición 4.4, Corolario 4.6 y Observación 5.6]. Sin embargo, después de un análisis cuidadoso, encontramos que, estas contensiones son incorrectas. A continuación proporcionamos las correcciones que hemos implementado.

a) La discusión anterior (Martínez, 2022)[Proposición 4.4] la demostración es erronea, ya que, para mostrar que la función f está en el conjunto $\mathcal{UD}$, debimos haber pedido que (X, d) sea cualquier espacio ultramétrico débil y luego verificar que $f \circ d$ es una ultramétrica débil. Sin embargo en la prueba, empezamos considerando un espacio ultramétrico (X, d), pero aún haciendo esos cambios, la contensión no es cierta. Para subsanar esto, consideremos el siguiente contraejemplo. Con esto dejamos por hecho que, las colecciones $\mathcal{U}$ y $\mathcal{UD}$ son distintas.

Contraejemplo 1.1. (i) $\mathcal{U} \nsubseteq \mathcal{DU}$. Sea $X = \mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales. Definamos la siguiente función $d : X \times X \to [0, \infty)$ como sigue

$$d(n,m) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = m \\ \text{min\{n,m\}}, & \text{si } 0 < |n-m| < 2 \\ \text{max\{n,m\}}, & \text{de otra forma.} \end{cases} \tag{1}$$

Nótese que, para cualesquiera $x, y, z \in X$

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \leq 2max\{d(x,z), d(z,y)\}.$$

De aquí que, para $x = n$, $y = m$ y $z = o$, obtenemos por simples calculos que, $d(n,m) = m+2$, $d(n,o) = o+2$ y $d(o,m) = m+2$. Así, la desigualdad siguiente se satisface,

$$2max\{d(n,o), d(o,m) \geq 2max\{o+2, m+2\} = 2(m+2) > d(n,m).$$

Por lo tanto, d es una ultramétrica débil sobre X.

Ahora, consideremos la siguiente función lineal a trozos $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ como sigue

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ n!(1 + n(x-n)), & \text{si } n \leq x < n+1, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2}$$

*Autor para correspondencia: reinaldo.martinez.c@uatx.mx
Correo electrónico: reinaldo.martinez.c@uatx.mx (Reinaldo Martínez-Cruz), hernandezpinaemmanuel@gmail.com (Emmanuel Hernández-Piña).

Historial del manuscrito: publicado el 31/10/2022.

Es claro que f es estrictamente creciente, $f(0) = 0$ y así obtenemos que, $f \in \mathcal{U}$ ver (Pongsriiam and Termwuttipong, 2014)[Teorema 9]. Además

$$f(n) = n! \quad para \quad \text{cada} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Afirmamos que $f \notin \mathcal{UD}$. En efecto, pongamos $\rho = f \circ d$, y supongamos lo contrario, entonces para cualquier espacio ultramétrico débil (X, d), se tiene que, $f \circ d$ es una ultramétrica débil, así existe $C \geq 1$ tal que

$$\rho(x, y) \leq Cmax\{\rho(x, z), \rho(z, y)\} \quad \text{para} \quad \text{toda} \quad x, y, z \in X. \tag{4}$$

Consideremos la desigualdad (4) con $x = n$, $y = n + 2$, y $z = n + 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Por (1) y (3) obtenemos las igualdades $\rho(x, y) = n + 2$, $\rho(x, z) = n$, y $\rho(z, y) = n + 1$. Ahora por la desigualdad (4) se sigue que

$$(n + 2)! \leq C\{n!, (n + 1)!\} = C(n + 1)!.$$

Es decir, la desigualdad $(n+2) \leq C$ se satisface para cada $n \in \mathbb{N}$, lo cual es falso. Como consecuencia, $f \notin \mathcal{UD}$.

(ii) $\mathcal{DU} \not\subseteq \mathcal{U}$. Consideremos la función $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{si } x > 1. \end{cases} \tag{5}$$

Es claro que f no es creciente, $f(0) = 0$ y así, $f \notin \mathcal{U}$ ver (Pongsriiam and Termwuttipong, 2014)[Teorema 9].

Consideremos varios casos para los $x, y \in [0, \infty)$:

(Case 1). Si $x + y \leq 1$, entonces

$$f(x + y) = x + y = f(x) + f(y) \leq 2(f(x) + f(y)),$$

(Case 2). Si $x \leq 1 < y$, entonces

$$f(x + y) = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + x = f(y) + f(x) \leq 2(f(x) + f(y)).$$

Similarmente, si $y \leq 1 < x$, entonces

$$f(x + y) = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + y = f(x) + f(y) \leq 2(f(x) + f(y)).$$

(Case 3). Si $1 < x \leq y$, entonces

$$f(x + y) = \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = f(x) + f(y) \leq 2(f(x) + f(y)).$$

Sea $(a, b, c) \in \triangle$. Por los casos dados arriba, si $b + c \leq 1$, entonces

$$f(a) = a \leq b + c = f(b + c) \leq 2(f(b) + f(c)).$$

Similarmente, si $a + c \leq 1$ y $a + b \leq 1$, entonces

$$f(b) = b \leq a + c = f(a + c) \leq 2(f(a) + f(c))$$

y

$$f(c) = c \leq a + b = f(a + b) \leq 2(f(a) + f(b)).$$

Los otros casos son similares. Pongamos $s = 2$. Hemos obtenido una constante $s \geq 1$ tal que $(f(a), f(b), f(c)) \in \triangle_s$ para cualquier $(a, b, c) \in \triangle$, así $f \in \mathcal{B}$ ver (Khemaratchatakumthorn and Pongsriiam, 2019)[Corolario 3.2]. Pero, $\mathcal{B} = \mathcal{UD}$ ver (Martínez, 2022)[Teorema 4.5]. De aquí, obtenemos que $f \in \mathcal{DU}$.

b) El Corolario 4.6 ver (Martínez, 2022) debe ser reemplazado por lo siguiente: $\mathcal{B} \neq \mathcal{U}$.

c) La Observación 5.6 ver (Martínez, 2022) debe ser sustituido por: $\mathcal{U} \neq \mathcal{BE}$.

Agradecimientos

Los autores damos las gracias a los árbitros por la revisión exhaustiva y las sugerencias a nuestro trabajo.

Referencias

Khemaratchatakumthorn, T. and Pongsriiam, P. (2019). Further remarks on b–metrics, metric-preserving functions, and other related metrics. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 14(2):473–480.

Martínez, Cruz Reinaldo y Hernández, P. E. (2022). Funciones que preservan la b–métrica extendida y otras métricas relacionadas. *Padi Boletín Científico De Ciencias Básicas de Ingeniería Del ICBI, Publicación Semestral*, 9:47–55.

Pongsriiam, P. and Termwuttipong, I. (2014). Remarks on ultrametrics y metric-preserving functions. *Abstract and Applied Analysis*, 2014:1–9.