

## Sección diferencial elástica en mundos brana Differential cross sections in brane worlds

O. Pedraza-Ortega <sup>a</sup>, V. E. Cerón-Angeles <sup>a,\*</sup>, L. A. López-Suarez <sup>a</sup>

<sup>a</sup>Área Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Pachuca, Hidalgo, México.

### Resumen

En este trabajo se calcula la sección diferencial elástica a bajas energías para electrones dispersos por átomos de He y Ne utilizando un potencial electromagnético 4D efectivo proveniente de la contribución de los modos masivos Kaluza-Klein del campo vectorial 5D en un escenario de brana gruesa. La contribución del modo cero del campo vectorial produce el potencial de Coulomb estándar, mientras que la contribución de los modos masivos de Kaluza-Klein proporciona correcciones al potencial de Coulomb. La escala de longitud del escenario se ajusta en el potencial para comparar con los datos experimentales conocidos y fijar límites para el parámetro  $M$  del modelo.

*Palabras Clave:* Dispersión, Mundos brana.

### Abstract

The elastic differential cross section is calculated at low energies of electrons by elements He and Ne using an effective 4D electromagnetic potential coming from the contribution of the massive Kaluza-Klein modes of the 5D vector field in a thick brane scenario. The zero mode of the vector field produces the standard Coulomb potential, while the contribution of the Kaluza-Klein massive modes provides corrections to the Coulomb potential. The length scale is adjusted in the potential to compare with known experimental data and to set bounds for the parameter of the model.

*Keywords:* Scattering, Brane worlds.

### 1. Introducción

La posibilidad de que nuestro espacio tenga más de tres dimensiones espaciales ha estado atrayendo un interés continuo durante muchos años. Recientemente, el énfasis se ha desplazado hacia los llamados escenarios de mundos brana (consultar el trabajo de Pérez-Lorenzana (2007) y citas contenidas, para una mayor referencia). En los escenarios de branas, la materia ordinaria está confinada a una 3-brana incrustada en un espacio-tiempo de dimensión superior, como lo muestran los trabajos de Rubakov and Shaposhnikov (1983); Arkani-Hamed et al. (1998); Antoniadis et al. (1998).

En el contexto de los modelos de mundos brana, existen modelos donde las branas son delgadas (ver los trabajos de Gogberashvili (2002); Randall and Sundrum (1999); Gogberashvili (1999) para una mayor referencia) o pueden ser gruesas (ver Dzhunushaliev et al. (2010)). En este trabajo, emplearemos una configuración de brana gruesa propuesto por Herrera-Aguilar

et al. (2010). En este escenario, la brana gruesa está modelada por una relación entre las curvaturas generadas por la constante cosmológica  $5D$  y  $4D$  sin la inclusión de campos escalares masivos en absoluto. Una característica interesante de los modelos de mundo de brana gruesa, es que no hay singularidades presentes en la posición de la brana.

En el marco de los modelos de mundos de brana, se ha visto que usualmente implican posibles consecuencias a bajas energías, las cuales deberían suprimirse o comprobarse con datos experimentales. Por tanto, el objetivo de este artículo es investigar algunas consecuencias de las teorías de dimensiones extras a bajas energía. Específicamente, estudiamos la dispersión de electrones por Helio y Neón en un escenario de brana gruesa. Para ello, primero mostramos el análisis descrito por Guo et al. (2013) para el tratamiento del campo electromagnético. Finalmente, comparamos nuestros resultados para la dispersión de electrones por átomos de Helio y Neón, con datos experimentales conocidos, lo cual permitirá establecer un límite en

\* Autor para correspondencia: vceron@uaeh.edu.mx

**Correo electrónico:** omarp@uaeh.edu.mx (Omar Pedraza Ortega, vceron@uaeh.edu.mx (Victoria E. Cerón Angeles), lalopez@uaeh.edu.mx (Luis A. López Suarez)).

la escala del escenario ( $M$ ).

El documento está organizado de la siguiente manera. En la sección 2, describimos brevemente la configuración del escenario de brana gruesa, en sección 3 se muestra como obtener el potencial estático de un campo electromagnético para un escenario de brana gruesa. En la sección 4 se realizará un análisis de la sección transversal diferencial elástica para la dispersión de electrones por átomos de diferentes especies, esto permitirá establecer límites en el parámetro del escenario, utilizando los resultados experimentales del proceso de dispersión de electrones por átomos. Finalmente, en 5 nos centramos en la discusión de nuestros resultados.

## 2. Escenario 5D

Este escenario surge de una forma completamente geométrica, siendo justamente la curvatura la que permite localizar al campo gravitacional y otros campos de materia en la 3-brana. Este modelo considera la siguiente acción 5D

$$S = \frac{1}{8\pi G_5} \int d^5x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda_5), \quad (1)$$

donde  $R$  es el escalar de curvatura 5D,  $\Lambda_5$  es la constante cosmológica del bulto y  $G_5$  es la constante de Newton en 5D, aquí utilizaremos la nomenclatura de Bethe and Jackiw (1968). La acción (1) provee una solución a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica 5D, la cual tiene la siguiente forma

$$ds^2 = e^{2A(y)} (-dt^2 + a^2(t) [dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2]) + dy^2, \quad (2)$$

aquí  $e^{2A(y)}$  es el factor de warp y  $a(t)$  es el factor de escala de la brana,  $x_1, x_2, x_3$  denotan las 3 dimensiones espaciales, mientras  $y$  denota la coordenada espacial extra.

El factor de warp y el factor de escala están dados por

$$A(y) = \ln \left[ \frac{H}{b} \cos(by) \right], \quad (3)$$

$$a(t) = e^{Ht}, \quad (4)$$

$H$  es el parámetro de Hubble, y  $3H^2 = \Lambda_4$ , con  $\Lambda_4$  la constante cosmológica en 4D obtenida por integración directa de la quinta dimensión,  $1/b$  parametriza el espesor de la brana y está relacionado con la constante cosmológica en cinco dimensiones como  $\Lambda_5 = 6b^2$ . La brana gruesa está localizada en  $y = 0$  y el rango de la dimensión extra es  $-\pi/2b < y < \pi/2b$ .

La métrica de este escenario requiere que ambas constantes cosmológicas  $\Lambda_4$  y  $\Lambda_5$  sean positivas y distintas de cero, en el caso en el que una de ellas tome el valor de cero puede producir soluciones que no son físicamente viables.

Para propósitos futuros, es conveniente realizar el cambio de variable  $dz = e^{-A(y)} dy$ . De esta forma se obtiene la expresión para la nueva variable  $z$

$$z(y) = \frac{2}{H} \operatorname{arctanh} \left[ \tan \left( \frac{by}{2} \right) \right]. \quad (5)$$

De esta expresión, es fácil ver que el rango de la coordenada extra es  $-\infty < z < \infty$ . Debido a esta transformación, el factor de warp puede escribirse como

$$A(z) = \ln \left[ \frac{H}{b} \operatorname{sech}(Hz) \right], \quad (6)$$

y la métrica adopta la siguiente forma

$$ds^2 = \frac{H}{b} \operatorname{sech}(Hz) \left[ -dt^2 + e^{2Ht} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + dz^2 \right]. \quad (7)$$

En este escenario, la masa de Planck efectiva 4D se expresa como

$$M_{\text{Pl}}^2 = \frac{\pi M_*^3 H^2}{2 b^3}, \quad (8)$$

donde  $M_*$  es la masa de Planck 5D. Considerando que  $H \approx 10^{-60} M_{\text{Pl}}$  y fijando  $M_* \approx 10^{-55} M_{\text{Pl}}$ , se obtiene el factor de acoplamiento gravitacional 4D correcto en la brana gruesa. Por otra parte, para generar la jerarquía de masa deseada, la relación relevante necesaria entre el parámetro de Hubble y la escala de compactificación debe satisfacer

$$\frac{H}{b} \approx 10^{-5}. \quad (9)$$

Por supuesto, esta reformulación del problema de la jerarquía, plantea interrogantes sobre la estabilidad de la separación de las branas.

## 3. Potencial electrostático efectivo cuatro dimensional

En esta sección mostremos el análisis para obtener las correcciones a la ley de Coulomb desarrollada por Herrera-Aguilar et al. (2010). Usualmente en electrodinámica 4D, el potencial creado por la interacción de Yukawa entre dos fermiones y el campo de electromagnético es dado por el Lagrangiano de interacción

$$L_I = -e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x). \quad (10)$$

Siguiendo esta misma idea, la interacción entre fermiones y el campo electromagnético en 5D puede ser descrito por

$$S_I = \int d^4x dz \sqrt{-g} (-e_5) \bar{\Psi}(x, z) \Gamma^M A_M(x, z) \Psi(x, z), \quad (11)$$

donde  $e_5$  es la constante de acoplamiento en 5D,  $M = \mu, z$ , aquí  $\mu$  toma los valores de 0, 1, 2, 3 y  $z$  es la coordenada extra.

Para continuar con el análisis de las correcciones al potencial de Coulomb, es importante conocer los modos de Kaluza-Klein (KK) para el campo electromagnético  $A_M$ .

Para este fin, consideremos la acción 5D

$$S_1 = -\frac{1}{4} \int d^5x \sqrt{-g} g^{MN} g^{RS} F_{MR} F_{NS}, \quad (12)$$

Donde  $F_{MN}$  es el tensor de campo electromagnético en 5D,  $\sqrt{-g}$  es el determinante de la métrica de fondo  $g^{MN}$  dado por (7).

Aplicando la norma  $A_z = 0$ , la acción (12) se reduce a

$$S_1 = -\frac{1}{4} \int d^5x \sqrt{-g} \left[ g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + 2e^{-A(z)} g^{\mu\nu} \partial_z A_\mu \partial_z A_\nu \right], \quad (13)$$

usando separación de variables

$$A_\mu(x, z) = \sum_n a_M^{(n)}(x) \rho_n(z) e^{-A(z)/2}, \quad (14)$$

así como la condición de normalización

$$\int dz \rho_n(z) \rho_m(z) = \delta_{mn}, \quad (15)$$

y la relación para  $\rho_n(z)$

$$\left[-\partial_z^2 + \frac{H^2}{4} - \frac{3H^2}{4} \operatorname{sech}^2(Hz)\right] \rho_n(z) = m_n^2 \rho_n(z). \quad (16)$$

reescribiendo la ecuación (13) en términos del tensor de campo electromagnético en 4D como

$$S_1 = \sum_n \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left[ -\frac{1}{4} \hat{g}^{\mu\alpha} \hat{g}^{\nu\beta} f_{\mu\nu}^{(n)} f_{\alpha\beta}^{(n)} - \frac{1}{2} m_n^2 \hat{g}^{\mu\nu} a_\mu^{(n)} a_\nu^{(n)} \right], \quad (17)$$

donde  $f_{\mu\nu}^{(n)} = \partial_\mu a_\nu^{(n)} - \partial_\nu a_\mu^{(n)}$  es el tensor de campo electromagnético en 4D,  $\hat{g}_{\mu\nu}$  es la métrica en la brana y  $m_n$  las masas de los modos.

Así, cuando  $m_n = 0$ , la solución para el modo cero tiene la siguiente forma

$$\rho_0(z) = \sqrt{\frac{H}{\pi}} \operatorname{sech}(Hz). \quad (18)$$

En el caso en que  $m_n > 0$ , los modos masivos pueden escribirse como

$$\rho_n(z) = C_+ P_{1/2}^{+i\beta}(\tanh(Hz)) + C_- P_{1/2}^{-i\beta}(\tanh(Hz)), \quad (19)$$

con  $P_{1/2}^{+i\beta}(z)$  y  $P_{1/2}^{-i\beta}(z)$  las funciones asociadas de Legendre de grado 1/2 y orden puramente imaginario  $i\beta = i\sqrt{m^2/H^2 - 1/4}$ . Las constantes  $C_+$  y  $C_-$  son

$$C_\pm(\beta) = \frac{|\Gamma(1 \mp i\beta)|}{\sqrt{2\pi}} = \frac{|\Gamma(1 + i\beta)|}{\sqrt{2\pi}}. \quad (20)$$

Cabe señalar que existe una separación de masas entre el modo cero y los modos excitados. El espectro continuo de los modos masivos de Kaluza-Klein empieza en  $m^2 = H^2/4$  y asintóticamente se convierten en ondas planas.

Para el campo fermiónico, únicamente consideraremos el modo cero para el fermión con quiralidad izquierda

$$L_0(z) = \left[ \frac{H\Gamma\left(\frac{b+2M}{2b}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{M}{b}\right)} \right] \operatorname{sech}^{\frac{M}{b}}(Hz), \quad (21)$$

aquí  $M$  es la masa del fermión 5D.

Introduciendo (18), (19) y (21) en (11) se tiene

$$\begin{aligned} S_I &= (-e_5) \sum_n \int \int d^4x e^{-A/2} \rho_n(z) L_0^2(z) \\ &\quad \times \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \bar{\psi}_0(x) \gamma^\mu a_\mu^{(n)}(x) \psi_0(x) \\ &= \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left\{ -e \bar{\psi}_0(x) \gamma^\mu a_\mu^{(0)}(x) \psi_0(x) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n \neq 0} \epsilon_n \bar{\psi}_0(x) \gamma^\mu a_\mu^{(n)}(x) \psi_0(x) \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

donde se ha redefinido la constante de acoplamiento electromagnético en 4D como

$$e = e_5 \int dz e^{-A/2} \rho_0(z) L_0^2(z) = e_5 \sqrt{\frac{b}{\pi}}, \quad (23)$$

y las constantes de acoplamiento  $4D \epsilon_n$  se definen como

$$\epsilon_n = e_5 \int dz e^{-A/2} \rho_n(z) L_0^2(z) = e \sqrt{\frac{\pi}{b}} \int dz e^{-A/2} \rho_n(z) L_0^2(z). \quad (24)$$

La  $\sum_n$  representa la suma o integral con respecto a  $n$ , dependiendo del carácter continuo o discreto de  $a_\mu^{(n)}(x)$  y  $\epsilon_n(z)$ . En el límite no relativista, el potencial de Coulomb entre dos fermiones cargados es determinado por el proceso de intercambio de fotones de KK, resultando

$$\begin{aligned} v(r) &= \frac{e^2}{r} + \int_{H/2}^\infty dm \frac{\epsilon_n^2}{r} e^{-mr} \\ &= \frac{e^2}{r} \left[ 1 + \frac{\pi}{b} \int_{H/2}^\infty dm e^{-mr} \left( \int dz e^{-A/2} \rho_n(z) L_0^2(z) \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (25)$$

donde el primer y segundo término de la ecuación anterior toma en cuenta la contribución del modo cero y de los modos masivos de KK respectivamente.

Sustituyendo (19) y (21) en (25) se tiene

$$\begin{aligned} v(r) &= \frac{e^2}{r} \left[ 1 + \frac{\pi}{H} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{2M+b}{2b}\right) \Gamma\left(\frac{4M-b}{4b}\right)}{\Gamma\left(\frac{M}{b}\right) \Gamma\left(\frac{4M+b}{4b}\right)} \right]^2 \right. \\ &\quad \left. \times \int_{H/2}^\infty dm e^{-mr} \left| \sum_{\pm} C_\pm(\beta) P_{1/2}^{\pm i\beta}(0) \right|^2 \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Donde hemos empleado la siguiente relación

$$\delta(z) = \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{H\Gamma\left(\frac{4M+b}{4b}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{4M-b}{4b}\right)} \operatorname{sech}^{\frac{4M-b}{2b}}(Hz), \quad 4M > b. \quad (27)$$

Tomando en cuenta (20), así como la siguiente expresión

$$P_\nu^\mu(0) = \frac{2^\mu \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\nu-\mu}{2}\right)}. \quad (28)$$

La ecuación (26), puede ser escrita como

$$\begin{aligned} v(r) &= \frac{e^2}{r} \left[ 1 + \frac{2\pi}{H} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{2M+b}{2b}\right) \Gamma\left(\frac{4M-b}{4b}\right)}{\Gamma\left(\frac{M}{b}\right) \Gamma\left(\frac{4M+b}{4b}\right)} \right]^2 \right. \\ &\quad \left. \times \int_{H/2}^\infty dm e^{-mr} \left| \frac{\Gamma(1+i\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{i\beta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{4} - \frac{i\beta}{2}\right)} \right|^2 \right] \end{aligned} \quad (29)$$

Para realizar esta integral, es conveniente realizar el cambio de variable de  $m$  a  $\beta$  y luego se hace un desarrollo del factor que multiplica a la exponencial en la integral alrededor de  $\beta = 0$ , debido a que las correcciones al potencial son más relevantes para el sector de modos ligeros. Así, tenemos que el potencial efectivo es

$$\begin{aligned} v(r) &= \frac{e^2}{r} \left[ 1 + 2\pi \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{2M+b}{2b}\right) \Gamma\left(\frac{4M-b}{4b}\right)}{\Gamma\left(\frac{M}{b}\right) \Gamma\left(\frac{4M+b}{4b}\right)} \right]^2 \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{\left| \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \right|^2} \frac{e^{-Hr/2}}{Hr} \left( 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{Hr}\right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

El primer término de (30) corresponde al potencial de interacción de Coulomb que proviene del intercambio del modo cero del fotón, mientras que el segundo término tiene forma de un potencial de Yukawa. De (30), se puede ver que la corrección correspondiente al potencial efectivo  $4D$  depende de los parámetros  $5D$  del campo fermiónico, específicamente de  $M$  y  $b$ .

#### 4. Dispersión de electrones por átomos de helio y neón

En esta sección estudiaremos la colisión de una partícula de carga  $ze$  y masa  $m$  con átomos de número atómico  $Z$  (el lector puede consultar Bethe and Jackiw (1968) para revisar la notación y algunos conceptos de dispersión de electrones por átomos). Cabe mencionar que una formulación exacta de este problema requiere el conocer el Hamiltoniano para los  $n$  cuerpos involucrados en este proceso, sin embargo, como primera aproximación en este análisis, consideramos que la interacción entre las partículas incidentes y los átomos pueden ser tratados por el potencial efectivo

$$V(\vec{r}) = ze \left[ Zev(\vec{r}) + e \int \rho(\vec{r}') v(|\vec{r} - \vec{r}'|) d^3\vec{r}' \right], \quad (31)$$

aquí  $\vec{r}$ , es el vector posición de la partícula incidente, mientras que  $v(\vec{r})$  es dado por (30) y  $\rho$  es la densidad efectiva de electrones atómicos. El primer término de (31) considera la interacción del núcleo del átomo con las partículas incidentes y el segundo término toma en cuenta la interacción entre las partículas incidentes y los electrones atómicos. Cabe mencionar que, en esta aproximación se ignoran efectos de simetría y de espín. Para átomos neutros la densidad de electrones satisface

$$\int \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} = Z. \quad (32)$$

Si las partículas incidentes son muy energéticas, la amplitud de dispersión puede ser evaluada fácilmente, usando la aproximación de Born

$$\begin{aligned} f(\theta) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) d^3\vec{r}, \quad (33) \\ &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{qr \cos \psi} V(\vec{r}) r^2 dr d\Omega, \end{aligned}$$

donde  $\vec{q} = \vec{k}_0 - \vec{k}$ , con  $\vec{k}_0$  y  $\vec{k}$  el momento inicial y final, respectivamente y  $d\Omega = \sin \psi d\psi d\phi$ . Para dispersiones elásticas,  $|\vec{k}| = |\vec{k}_0| = k$ , lo cual permite expresar a  $q = |\vec{q}| = 2k \sin(\theta/2)$ .

Usando la amplitud de dispersión  $f(\theta)$ , definimos la diferencial de la sección de dispersión

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2. \quad (34)$$

Así introduciendo la ecuación (31) en (34) y realizando el siguiente cambio de variable  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$  tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left| -\frac{me^2}{2\pi\hbar^2} \left[ zZ \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} v(\vec{r}) d^3\vec{r} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - z \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}} v(\vec{R}) d^3\vec{R} \int \rho(\vec{r}') e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'} \right] \right|^2 \\ &= \frac{m^2 e^4 z^2}{4\pi^2 \hbar^4} [Z - F(\vec{q})]^2 \left| \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} v(\vec{r}) d^3\vec{r} \right|^2 \quad (35) \end{aligned}$$

donde  $F(\vec{q})$  suele llamársele el factor de forma del átomo, el cual es definido como

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3\vec{r}. \quad (36)$$

Cuando el potencial posee simetría esférica, la integración de la parte angular se puede realizar fácilmente, obteniendo así

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4m^2 e^4 z^2}{\hbar^4} [Z - F(\vec{q})]^2 \left| \int_0^\infty \frac{\sin(qr)}{qr} v(r) r^2 dr \right|^2, \quad (37)$$

con  $q = |\vec{q}| = 2k \sin(\theta/2)$  y  $r = |\vec{r}|$ . Considerando la forma explícita de  $v$ , la diferencial de la sección de dispersión se reduce a

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{4m^2 e^4 z^2}{\hbar^4 q^2} [Z - F(\vec{q})]^2 \left[ \int_0^\infty \sin(qr) dr \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\Gamma\left(\frac{2M+b}{2b}\right) \Gamma\left(\frac{4M-b}{4b}\right)}{\Gamma\left(\frac{M}{b}\right) \Gamma\left(\frac{4M+b}{4b}\right)} \right)^2 \frac{1}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\right]^2} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{2\pi}{H} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{Hr}{2}} \sin(qr)}{r} dr \right]^2. \quad (38) \end{aligned}$$

Usamos las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sin(qr) dr &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\lambda r} \sin(qr) dr \\ &= \frac{1}{2i} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^\infty [e^{-(\lambda-iq)r} - e^{-(\lambda+iq)r}] dr \\ &= \frac{1}{2i} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\lambda - iq} - \frac{1}{\lambda + iq} \right] = \frac{1}{q}, \quad (39) \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-pr} \sin(qr)}{r} dr = \arctan\left(\frac{q}{p}\right), \quad p > 0. \quad (40)$$

el lector puede consultar de la Peña and Villavicencio (2003), para una revisión de (39). Así escribimos (38) como

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left( \frac{2me^2 z}{\hbar^2 q} \right)^2 [Z - F(\vec{q})]^2 \left[ 1 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\Gamma\left(\frac{2M+b}{2b}\right) \Gamma\left(\frac{4M-b}{4b}\right)}{\Gamma\left(\frac{M}{b}\right) \Gamma\left(\frac{4M+b}{4b}\right)} \right)^2 \frac{2\pi}{H} \arctan\left(\frac{2q}{H}\right) \right]^2. \quad (41) \end{aligned}$$

Usando el radio de Bohr ( $a_0 = \hbar^2/me^2$ ), se escribe la ecuación anterior como

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left( \frac{2zZ}{a_0 q} \right)^2 \left[ 1 - \frac{F(\vec{q})}{Z} \right]^2 \left[ 1 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\Gamma\left(\frac{2M+b}{2b}\right) \Gamma\left(\frac{4M-b}{4b}\right)}{\Gamma\left(\frac{M}{b}\right) \Gamma\left(\frac{4M+b}{4b}\right)} \right)^2 \frac{2\pi}{H} \arctan\left(\frac{2q}{H}\right) \right]^2. \quad (42) \end{aligned}$$

Para átomos neutros con muchos electrones, no se pueden obtener soluciones exactas para los factores de forma  $F(\vec{q})$ , por lo que se han utilizado una variedad de aproximaciones en la literatura. Entre estos enfoques, se propuso una aproximación analítica desarrollada por Salvat et al. (1987) para los factores

de forma utilizando el método estadístico Thomas-Fermi. Así, los factores de forma vienen dado por

$$F(q) = Z \sum_{i=1}^3 \frac{A_i \alpha_i^2}{\alpha_i^2 + a_0^2 q^2}, \quad (43)$$

donde los parámetros  $A_i$  y  $\alpha_i$  pueden consultarse en el trabajo desarrollado por Salvat et al. (1987) para valores de  $Z$  de 1 a 92. Los parámetros en (43) para los átomos de Helio y Neón se muestran en la Tabla 1. Entonces, la diferencial de la sección de dispersión para procesos elásticos se expresan como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{2zZ}{a_0 q^2} \right)^2 \left[ 1 - \sum_{i=1}^3 \frac{A_i \alpha_i^2}{\alpha_i^2 + a_0^2 q^2} \right]^2 \left[ 1 + \left( \frac{\Gamma\left(\frac{2M+b}{2b}\right) \Gamma\left(\frac{4M-b}{4b}\right)}{\Gamma\left(\frac{M}{b}\right) \Gamma\left(\frac{4M+b}{4b}\right)} \right)^2 \frac{2\pi}{H} \arctan\left(\frac{2q}{H}\right) \right]^2 \cdot (44)$$

Tabla 1: Parámetros del factor de forma para Helio y Neón.

Coefficiente	He	Ne
$A_1$	-0.2259	0.0188
$A_2$	1.2259	0.9812
$A_3$	0	0
$\alpha_1$	5.5272	34.999
$\alpha_2$	2.3992	2.5662
$\alpha_3$	0	0

Para los electrones incidentes, establecemos  $z = -1$  y para los átomos de Helio y Neón, tenemos  $Z = 2$  y  $Z = 10$ , respectivamente. Luego evaluamos numéricamente (44) y comparamos los resultados teóricos con los datos experimentales tomados del trabajo desarrollado por Jansen et al. (1976) para la diferencial de la sección de dispersión elástica de electrones por átomos de Helio y Neón. Esta comparación se hace explícita en las figuras 1, 2, 3 y 4.

Por lo tanto, en las figuras 1 y 2 la diferencial de la sección de dispersión elástica se analiza para electrones dispersados por Helio. Evaluamos la diferencial de la sección de dispersión elástica (44) para 2000 eV y 3000 eV, variando el parámetro  $M$  para ajustar los puntos experimentales. Para  $M \sim 10^{-45}$  eV, los valores teóricos coinciden con los datos experimentales, como lo muestra la curva de color rojo en las figuras 1 y 2, es decir, se obtiene una mejor concordancia entre los puntos teóricos y los datos experimentales. Mientras que para  $M \sim 10^{-44}$  eV no hay concordancia entre los valores teóricos y los datos experimentales (ver curva azul en las figuras 1 y 2).

En las figuras 3 y 4 se muestran discrepancias entre los resultados teóricos y experimentales para la diferencial de la sección de dispersión de electrones por átomos de Neón para ángulos pequeños para la línea punteada en color rojo, mientras que para la línea discontinua en color azul, la concordancia cualitativa no es buena.

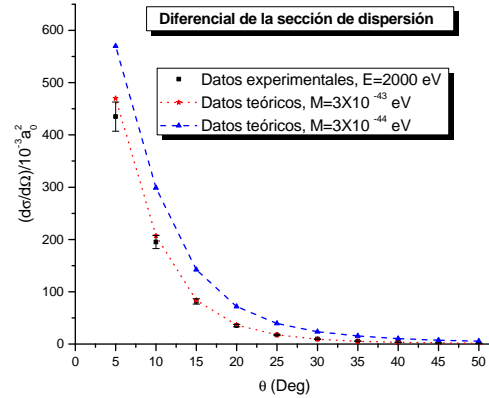


Figura 1: Comparación de la sección diferencial elástica teórica y experimental para electrones dispersados por Helio, para  $H = 10^{-60} M_{Pl}$  y  $b = 10^{-55} M_{Pl}$ .

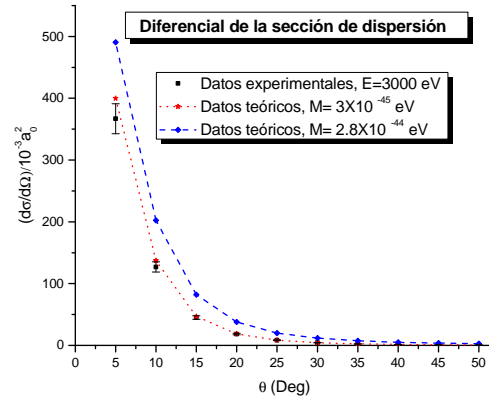


Figura 2: Comparación de la sección diferencial elástica teórica y experimental para electrones dispersados por Helio, para  $H = 10^{-60} M_{Pl}$  y  $b = 10^{-55} M_{Pl}$ .

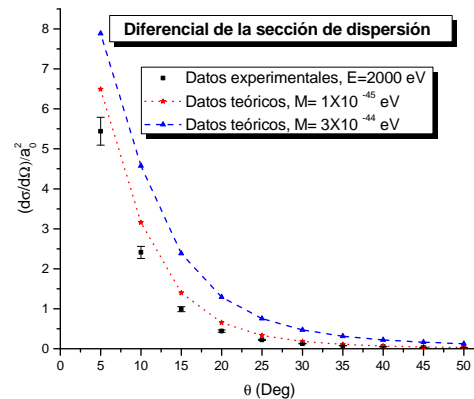


Figura 3: Comparación de la sección diferencial elástica teórica y experimental para electrones dispersados por Neón, para  $H = 10^{-60} M_{Pl}$  y  $b = 10^{-55} M_{Pl}$ .

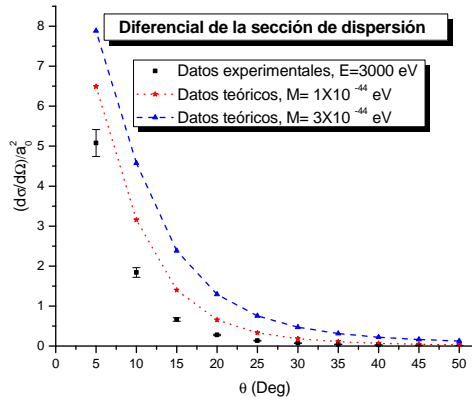


Figura 4: Comparación de la sección diferencial elástica teórica y experimental para electrones dispersados por Neón, para  $H = 10^{-60} M_{Pl}$  y  $b = 10^{-55} M_{Pl}$ .

## 5. Conclusiones

En este trabajo, hemos explorado las correcciones a la ley de Coulomb, provenientes de modos vectoriales masivos de Kaluza-Klein en un escenario de brana gruesa. Para ello, incluimos parte del análisis realizado por Herrera-Aguilar et al. (2010), para el potencial estático en el régimen de baja energía. Las correcciones correspondientes a la ley de Coulomb decaen exponencialmente y dependen de los parámetros  $5D$  del campo de fermiones, es decir de  $M$  y  $b$ .

Para este fin, hemos estudiado numéricamente este problema realizando una comparación entre la diferencial de la sección dispersión de electrones dispersos por diferentes átomos modificados por la incorporación de las correcciones a la ley de Coulomb en un escenario de brana gruesa y los datos experimentales para cada caso (ver figuras 1, 2, 3 y 4). Esta comparación proporciona el límite de  $M = 3 \times 10^{-45} eV$ .

Finalmente, vale la pena mencionar, que en el régimen de baja energía considerado en este trabajo, existen otras direcciones posibles que se pueden seguir, por lo que nos preguntamos si los mismos resultados o comportamientos son válidos para el caso gravitacional.

## Referencias

- Antoniadis, I., Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S., and Dvali, G. R. (1998). New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV. *Phys. Lett.*, B436:257–263.
- Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S., and Dvali, G. R. (1998). The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Phys. Lett.*, B429:263–272.
- Bethe, H. A. H. A. and Jackiw, R. W. (1968). *Intermediate quantum mechanics / Hans A. Bethe, Roman W. Jackiw*. Lecture notes and supplements in physics. Benjamin, New York, 2nd ed. edition.
- de la Peña, L. and Villavicencio, M. (2003). *Problemas y ejercicios de mecánica cuántica*. Colección Sección de obras de ciencia y tecnología. Fondo De Cultura Económica USA.
- Dzhunushaliev, V., Folomeev, V., and Minamitsuji, M. (2010). Thick brane solutions. *Rept. Prog. Phys.*, 73:066901.
- Gogberashvili, M. (1999). Four dimensionality in noncompact Kaluza-Klein model. *Mod. Phys. Lett.*, A14:2025–2032.
- Gogberashvili, M. (2002). Hierarchy problem in the shell universe model. *Int. J. Mod. Phys.*, D11:1635–1638.
- Guo, H., Herrera-Aguilar, A., Liu, Y.-X., Malagon-Morejon, D., and Mora-Luna, R. R. (2013). Localization of bulk matter fields, the hierarchy problem and corrections to Coulomb's law on a pure de Sitter thick braneworld. *Phys. Rev.*, D87(9):095011.
- Herrera-Aguilar, A., Malagon-Morejon, D., and Mora-Luna, R. R. (2010). Localization of gravity on a de Sitter thick braneworld without scalar fields. *JHEP*, 11:015.
- Jansen, R. H. J., de Heer, F. J., Luyken, H. J., van Wingerden, B., and Blaauw, H. J. (1976). Absolute differential cross sections for elastic scattering of electrons by helium, neon, argon and molecular nitrogen. *Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics*, 9(2):185.
- Pérez-Lorenzana, A. (2007). An introduction to the brane world. *Revista mexicana de física*, 53:85 – 102.
- Randall, L. and Sundrum, R. (1999). A large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys. Rev. Lett.*, 83:3370–3373.
- Rubakov, V. and Shaposhnikov, M. (1983). Do we live inside a domain wall? *Physics Letters B*, 125(2):136 – 138.
- Salvat, F., Martínez, J. D., Mayol, R., and Paredada, J. (1987). Analytical dirac-hartree-fock-slater screening function for atoms ( $z=1-92$ ). *Phys. Rev. A*, 36:467–474.