DESDE 2013
https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/icbi/issue/archive
Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI
ISSN: 2007-6363

Publicación Semestral Pädi Vol. 10 No. Especial (2022) 14–21

Propiedades relativas de separación
Relative separation properties

Jesús Díaz-Reyes [a], Jesús F. Tenorio [b,*]

[a] Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas, Universidad Autónoma de Chiapas, Blvd. Belisario Domínguez, Km 1081, Sin Número, 29050, Terán Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.
[b] Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Carretera a Acatlima, Km 2.5, 69000, Huajuapan de León, Oaxaca, México.

Resumen

La teoría de propiedades topológicas relativas es una rama importante de investigación en topología pues, entre otras aplicaciones, ayuda a saber cómo está localizado un espacio Y en un superespacio X. Además, una propiedad topológica relativa generaliza la propiedad topológica global de la cual proviene, en el sentido de que si Y es igual a X, la propiedad relativa y la global coinciden. En el presente artículo, hacemos un estudio minucioso de varias versiones relativas que se desprenden de los axiomas de separación T_1, T_2, T_3 y T_4. Específicamente, de los conceptos definidos, proporcionamos ejemplos que garantizan su independencia, establecemos caracterizaciones de ellos y damos condiciones bajo las cuales hay coincidencias.

Palabras Clave: Propiedades topológicas relativas, regularidad relativa, normalidad relativa.

Abstract

Relative topological properties theory is an important branch of research in general topology because, among other applications, it helps to know how is a space Y located in a superspace X. Besides, a relative topological property generalize the global topological property from which it comes, in the sense that if Y is equal to X, the relative property and the global property coincide. In the present paper, we make a thorough study of several version that emerge from the separations axioms T_1, T_2, T_3 and T_4. Specifically, of the concepts defined, we provide examples that guarantee its independence, we establish characterizations of them and we give conditions under which there are coincidences.

Keywords: Relative topological properties, relative regularity, relative normality.

1. Introducción

El presente trabajo está enmarcado en el área de la matemática denominada Topología. Desde sus inicios, a principios del siglo xx, la Topología ha tenido un gran desarrollo y actualmente tiene presencia en diversas ramas de la matemática, así como en otras áreas de conocimiento. La definición formal de topología sobre un conjunto es la siguiente.

Definición 1.1. Sea X un conjunto no vacío. Decimos que una familia τ, formada por subconjuntos de X, es una *topología sobre* X si satisface:

(1) $\emptyset, X \in \tau$.
(2) Si $A_1, A_2 \in \tau$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \tau$.
(3) Si $\mathcal{A} \subset \tau$, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.

Al par (X, τ) le llamamos *espacio topológico* y a los elementos de τ les llamamos *conjuntos abiertos de* X.

Recordemos que entre las topologías con las que se puede dotar un conjunto no vacío X, están aquellas que cumplen ciertas propiedades, entre otras, las que se utilizan para determinar cuándo es posible separar, mediante subconjuntos abiertos, ciertos subconjuntos ajenos de X. Dichas propiedades actualmente se les llama axiomas de separación, los cuales son la motivación del presente artículo. A continuación se enuncian con los que se trabajará a lo largo del escrito.

Definición 1.2. Se dice que un espacio topológico X es:

(a) T_1 si para cada par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$, existen subconjuntos abiertos U, V en X tales que $x_1 \in U \setminus V$ y $x_2 \in V \setminus U$.
(b) T_2 o *Hausdorff* si para cada par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$, existen subconjuntos abiertos U, V en X tales que $x_1 \in U$, $x_2 \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

*Autor para correspondencia: jtenorio@mixteco.utm.mx.
Correo electrónico: jdeisauzs@gmail.com (Jesús Díaz-Reyes), jtenorio@mixteco.utm.mx (Jesús Fernando Tenorio-Arvide).

Fecha de recepción: 29/09/2021 Fecha de aceptación: 09/12/2021 Fecha de publicación: 22/04/2022
https://doi.org/10.29057/icbi.v10iEspecial.8038

(c) T_3 o *regular* si X es T_1 y para cada $x \in X$ y cada subconjunto cerrado F en X tal que $x \notin F$, existen subconjuntos abiertos U, V en X tales que $x \in U$, $F \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

(d) T_4 o *normal* si X es T_1 y para cada par de subconjuntos cerrados y ajenos A, B en X, existen subconjuntos abiertos U, V en X tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Recomendamos al lector las obras (Engelking, 1989), (Casarrubias Segura and Tamariz Mascarúa, 2012), (Christenson and Voxman, 1998), (Dugundji, 1976), (Munkres, 2000) para la consulta de los términos no definidos en el presente trabajo.

Ahora bien, la teoría de propiedades topológicas relativas fue iniciada en 1989 por A.V. Arhangel'skii y H. M. M. Genedi en (Arhangel'skii and Genedi, 1989). En particular, en dicho artículo fueron definidos varios tipos de propiedades relativas referentes a los axiomas de separación, así como a la compacidad y a algunas variantes de la compacidad. Una exposición sumaria de este tema puede encontrarse en (Arhangel'skii, 1996).

Una propiedad topológica relativa se establece para un espacio topológico X y un subespacio $Y \subseteq X$, y es aquella que generaliza una propiedad global del espacio en el siguiente sentido: cuando Y coincide con X, entonces la propiedad relativa debe ser la misma que la global. Por ejemplo, una propiedad relativa de la propiedad de Hausdorff es la siguiente: dado un espacio topológico X y un subespacio Y de X, se dice que Y es *Hausdorff en* X si para cualquier par de puntos diferentes $y_1, y_2 \in Y$, existen subconjuntos abiertos U y V en X tales que $y_1 \in U$, $y_2 \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Note que, efectivamente, si $Y = X$, estamos hablando de la propiedad *absoluta* de Hausdorff. Por otra parte, si en la definición anterior se considera $y_1 \in Y$ y $y_2 \in X$, entonces obtenemos otra versión relativa de la propiedad de Hausdorff, la cual se conoce como Y fuertemente Hausdorff en X (vea Definición 2.1). De este modo, observamos que para alguna propiedad topológica $\mathcal{P}$, pueden existir $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_k$ propiedades relativas de $\mathcal{P}$, y en cualquier caso, se debe cumplir que cuando $Y = X$, entonces, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \cdots = \mathcal{P}_k$.

Entre otras propiedades relativas provenientes de propiedades absolutas que se han estudiado y han aportado grandes avances en topología, están las que se derivan de los axiomas clásicos de separación. El presente trabajo se dedica al análisis de propiedades relativas determinadas por los axiomas de separación T_1, T_2, T_3 y T_4, a las que en conjunto hemos llamado *propiedades relativas de separación*. Específicamente, con las nociones establecidas proporcionamos los ejemplos necesarios que garantizan su independencia, presentamos caracterizaciones de esas nociones y damos condiciones bajo las cuales hay coincidencias. Si bien en la literatura podemos encontrar resultados dispersos de esta índole, el análisis que presentamos, a través de aportes originales, complementará el estudio de las relaciones entre los axiomas relativos de separación mencionados.

El escrito está dividido en cuatro secciones, después de la Introducción, cada una corresponde al análisis de las nociones de separación relativas en el siguiente orden: las del tipo T_1 y T_2, las del tipo regularidad y las del tipo normalidad. En cada sección, presentamos en diagramas las relaciones que guardan las definiciones correspondientes, con la finalidad de aclarar ideas y de que sirvan como guía en el análisis presentado. En estos diagramas, las flechas indican que hay inclusión de clases.

En cuanto a la notación, utilizamos principalmente la empleada en (Engelking, 1989). Entre otras, denotamos la cerradura en X de cualquier subconjunto $A \subseteq X$ por $\overline{A}$, mientras que $\overline{A}^Y$ es la cerradura de A relativa a un subespacio Y de X.

2. Propiedades relativas T_1 y Hausdorff

En esta sección presentamos lo concerniente a las propiedades topológicas relativas del tipo T_1 y Hausdorff. En la Definición 2.1, la versión relativa del axioma T_1 fue formulada por los autores; mientras que las versiones relativas del axioma T_2 fueron tomadas de (Arhangel'skii, 1996, p.89).

Definición 2.1. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se dice que:

(a) Y es T_1 *en* X, si para cada par de puntos distintos $y_1 \in Y$ y $y_2 \in X$, existe un subconjunto abierto U en X tal que $y_2 \in U$ y $y_1 \notin U$.

(b) Y es *Hausdorff en* X, si para cualquier par de puntos diferentes $y_1, y_2 \in Y$, existen subconjuntos abiertos U, V en X tales que $y_1 \in U$, $y_2 \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

(c) Y es *fuertemente Hausdorff en* X, si cualquier par de puntos diferentes $y_1 \in Y$ y $y_2 \in X$, existen subconjuntos abiertos U, V en X tales que $y_1 \in U$, $y_2 \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Observación 2.2. Note que en la Definición 2.1-(a), X no es necesariamente T_1. Más aún, dados $y_1 \in Y$ y $y_2 \in X$, no necesariamente existe un conjunto abierto V en X tal que $y_1 \in V$ y $y_2 \notin V$.

Es inmediato que, cuando $Y = X$ en la Definición 2.1, el inciso (a) es el axioma T_1 y los incisos (b) y (c) coinciden con la propiedad de Hausdorff. Además, si X es T_1, entonces para cualquier subespacio Y de X, Y es T_1 en X; y si X es Hausdorff, entonces para cualquier subespacio Y de X, Y es Hausdorff en X y fuertemente Hausdorff en X.

En el Diagrama 1 establecemos las relaciones que guardan las nociones en la Definición 2.1, las cuales se obtienen de forma directa. A su vez, en el Ejemplo 2.3, garantizamos que ninguna de las flechas es reversible.

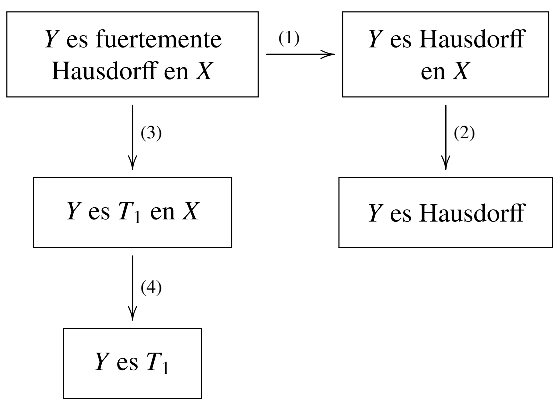

Diagrama 1.

Ejemplo 2.3. Consideremos los siguientes casos para el espacio X y su subespacio Y.

(a) Si $X = \{a, b\}$ tiene la topología indiscreta y $Y = \{a\}$, entonces Y es Hausdorff en X y Y no es fuertemente Hausdorff en X. Por lo tanto la flecha (1) no es reversible.

(b) Cuando $X = \{a, b, c\}$ es tomado con la topología $\tau_X = \{X, \emptyset, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c\}\}$ y $Y = \{a, b\}$, observemos que Y es un espacio Hausdorff y Y no es Hausdorff en X. Por lo tanto, la flecha (2) no es reversible. Por otra parte, Y es T_1 en X ya que para el punto $a \in Y$, el conjunto abierto $U = \{b, c\}$ cumple que $a \notin U$ y $c \in U$. Ahora, para el punto $b \in Y$, el conjunto abierto $V = \{a, c\}$ cumple que $a \notin U$ y $c \in U$. Por lo tanto, la flecha (3) no es reversible.

(c) Tomando $X = \{a, b, c\}$ con la topología indiscreta y $Y = \{a\}$, se tiene que Y es un espacio T_1 y Y no es T_1 en X. Por lo tanto, la flecha (4) no es reversible.

Por otra parte, recordemos que la propiedad T_1 queda caracterizada por la condición de pedir que para cada $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es cerrado en X. Igualmente, es posible caracterizar la propiedad relativa del axioma de separación T_1 en términos de lo que en (Arhangel'skii, 1996, p.88) se toma como la propia definición.

Proposición 2.4. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se tiene que Y es T_1 en X si y sólo si para cada $y \in Y$, el conjunto $\{y\}$ es cerrado en X.

Demostración. Supongamos que Y es T_1 en X y consideremos $y \in Y$ arbitrario. Luego, para cualquier $y_2 \in X \setminus \{y\}$, existe un subconjunto abierto U en X tal que $y_2 \in U$ y $y \notin U$. Note que $U \subseteq X \setminus \{y\}$. Así, $X \setminus \{y\}$ es un conjunto abierto en X. De donde, $\{y\}$ es un subconjunto cerrado en X.

Recíprocamente, mostremos que Y es T_1 en X. Sean $y_1 \in Y$ y $y_2 \in X$ con $y_1 \neq y_2$. Dado que $y_2 \in X \setminus \{y_1\}$, por hipótesis, existe un subconjunto abierto U en X tal que $y_2 \in U \subseteq X \setminus \{y_1\}$. Por tanto, $y_2 \in U$ y $y_1 \notin U$. □

De igual forma, recordemos que la propiedad de Hausdorff equivale a que todo punto es la intersección de la cerradura de sus vecindades. Denotamos por $\mathcal{B}(x)$ la colección de todas las vecindades de x en el espacio X. La propiedad de fuertemente Hausdorff se logra caracterizar de la siguiente manera.

Teorema 2.5. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se tiene que Y es fuertemente Hausdorff en X si y sólo si cada $y \in Y$ cumple que $\{y\} = \bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{B}(y)\}$.

Demostración. Supongamos que Y es fuertemente Hausdorff en X y fijamos un punto $y \in Y$. Por definición de vecindad, se tiene que $\{y\} \subseteq \bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{B}(y)\}$. Ahora, supongamos que existe $x \in \bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{B}(y)\}$ tal que $x \neq y$. Por hipótesis, existen subconjuntos abiertos U y V en X tales que $y \in U$, $x \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Como $U \in \mathcal{B}(y)$ y $U \cap V = \emptyset$, obtenemos que $x \notin \overline{U}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\{y\} = \bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{B}(y)\}$.

Recíprocamente, tomemos puntos diferentes $y \in Y$ y $x \in X$. Como $\{y\} = \bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{B}(y)\}$, existe $U \in \mathcal{B}(y)$ tal que $x \notin \overline{U}$, luego x está en el abierto $X \setminus \overline{U}$. Como U es vecindad de y, existe un abierto V en X tal que $y \in V \subset U$. Es claro que $V \cap (X \setminus \overline{U}) = \emptyset$. Por lo tanto, Y es fuertemente Hausdorff en X. □

Los autores plantean lo siguiente.

Pregunta 2.6. ¿Existe una caracterización del concepto Y es Hausdorff en X que sea similar a la del Teorema 2.5?

A continuación vemos que bajo ciertas hipótesis algunas de las flechas en el Diagrama 1 son reversibles. Comenzamos con la flecha (4).

Proposición 2.7. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio cerrado en X. Se tiene que Y es un espacio T_1 si y sólo si Y es T_1 en X.

Demostración. Supongamos que Y es un espacio T_1. Para mostrar que Y es T_1 en X, emplearemos la Proposición 2.4. Tomemos $y \in Y$. Como Y es un espacio T_1, se sigue que $\{y\}$ es un subconjunto cerrado en Y, puesto que Y es cerrado en X, se tiene que $\{y\}$ es un subconjunto cerrado en X, esto muestra que Y es T_1 en X. El recíproco es la flecha (4) del Diagrama 1. □

Teorema 2.8. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio denso en X. Se tiene que Y es un espacio Hausdorff si y sólo si Y es Hausdorff en X.

Demostración. Supongamos que Y es un espacio Hausdorff. Para mostrar que Y es Hausdorff en X, tomemos dos puntos diferentes $y_1, y_2 \in Y$. Existen dos conjuntos abiertos en Y y ajenos U' y V' tales que $y_1 \in U'$ y $y_2 \in V'$. Sean U y V conjuntos abiertos en X tales que $U' = U \cap Y$ y $V' = V \cap Y$. Veamos que $U \cap V = \emptyset$. Para esto, supongamos lo contrario. Luego, como Y es denso en X, se tiene que $(U \cap V) \cap Y \neq \emptyset$. Sin embargo, en vista de que $U' \cap V' = \emptyset$, obtenemos que $U \cap V \subseteq X \setminus Y$, lo cual es una contradicción. Así, $U \cap V = \emptyset$. Observe que $y_1 \in U$ y $y_2 \in V$. Por lo tanto, Y es Hausdorff en X. El recíproco es la flecha (2) del Diagrama 1. □

Teorema 2.9. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X tales que para cada $y \in Y$, existe un subconjunto abierto U en X tal que $y \in U$ y $\overline{U} \subseteq Y$. Se tiene que Y es Hausdorff en X si y sólo si Y es fuertemente Hausdorff en X.

Demostración. Supongamos que Y es Hausdorff en X. Sean $y_1 \in Y$ y $y_2 \in X$ con $y_1 \neq y_2$. Si $y_2 \in Y$, la prueba termina. Por consiguiente, supongamos que $y_2 \notin Y$. Por hipótesis, existe un subconjunto abierto U de X tal que $y_1 \in U$ y $\overline{U} \subseteq Y$. Dado que $y_2 \notin \overline{U}$, existe un subconjunto abierto V en X tal que $y_2 \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, Y es fuertemente Hausdorff en X. El recíproco es la flecha (1) del Diagrama 1. □

Pregunta 2.10. ¿Existen condiciones bajo las cuáles la flecha (3) es reversible?

3. Propiedades relativas de regularidad

A partir de este momento, salvo que se especifique lo contrario, consideramos que X es un espacio T_1. Como su nombre lo indica, en esta sección analizamos propiedades relativas del axioma de regularidad. Por tal motivo, a continuación, presentamos versiones relativas del axioma de regularidad, de las cuales, regular, superregular y fuertemente regular en X se encuentran en (Arhangel'skii, 1996, p. 89). El concepto de internamente regular en X es tomado de (Arhangel'skii and Tartir, 1996).

Definición 3.1. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se dice que:

(a) Y es *superregular en* X, si para cada $y \in Y$ y para cada subconjunto cerrado F en X tal que $y \notin F$, existen subconjuntos abiertos U y V en X, tales que $y \in U$, $F \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

(b) Y es *internamente regular en* X, si para cada $y \in Y$ y cada subconjunto F de Y cerrado en X tal que $y \notin F$, existen subconjuntos abiertos U y V en X tales que $y \in U$, $F \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

(c) Y es *regular en* X, si para cada $y \in Y$ y para cada subconjunto cerrado F en X tal que $y \notin F$, existen subconjuntos abiertos U y V en X tales que $y \in U$, $F \cap Y \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

(d) Y es *fuertemente regular en* X, si para cada $x \in X$ y cada subconjunto cerrado F en X tales que $x \notin F$, existen subconjuntos abiertos U y V en X tales que $x \in U$, $F \cap Y \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Es evidente que si $Y = X$ en la Definición 3.1, cada inciso coincide con el axioma de regularidad. Además, si X es regular, entonces para cualquier subespacio Y de X, Y cumple cualquier propiedad relativa de regularidad en X.

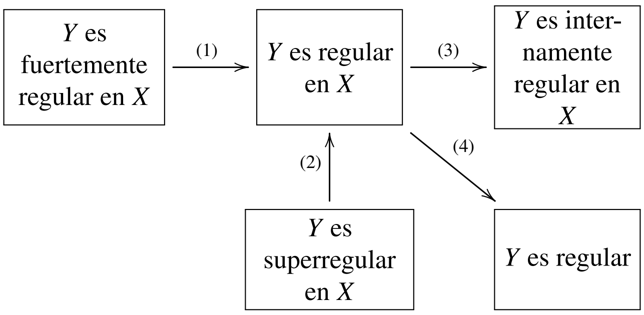

Diagrama 2.

Las flechas en el Diagrama 2 son totalmente inmediatas de las definiciones correspondientes. Con los Ejemplos 3.2, 3.3 y 3.4, mostramos que ninguna de éstas es reversible.

Ejemplo 3.2. Mostremos que las flechas (1) y (2) no son reversibles. Para este fin, sean X' un conjunto infinito y p, q dos puntos diferentes que no pertenecen a X'. Definimos $X = X' \cup \{p, q\}$ con la topología siguiente: Los puntos de X' son aislados y las vecindades básicas de x, para $x \in \{p, q\}$, son de la forma $\{x\} \cup (X' \setminus G)$, donde G es un subconjunto finito de X'. Es claro que X es un espacio T_1. Ahora, consideremos el subespacio $Y = X' \cup \{p\}$.
Afirmamos que Y es regular en X. Para ello, sean $y \in Y$ y $F \subseteq X$ un subconjunto cerrado en X tales que $y \notin F$. Entonces $y \in X'$ o $y = p$. Si $y \in X'$, es trivial encontrar los conjuntos abiertos deseados. Si $y = p$, entonces existe un subconjunto finito A de X' con la propiedad que $(\{p\} \cup X' \setminus A) \cap F = \emptyset$. Luego, $F \subseteq A \cup \{q\}$, por lo que $U = \{p\} \cup (X' \setminus A)$ y $V = A$ son subconjuntos abiertos en X, ajenos y tales que $y \in U$ y $F \cap Y \subseteq V$. Por lo tanto Y es regular en X.
Puesto que los conjuntos $\{p\}$ y $\{q\}$ no tienen vecindades ajenas en X, se concluye que Y no es fuertemente regular en X y Y no es superregular en X.

Ejemplo 3.3. La flecha (4) no es reversible. Para demostrar esto, consideramos la siguiente construcción debida a Arhangel'skii. Sean $X = \mathbb{R}$, $N = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ y $Y = N \cup \{0\}$. La topología τ_N para X es aquella que resulta de añadir el conjunto $\mathbb{R} \setminus N$ a la topología usual de $\mathbb{R}$. En τ_N, N es un conjunto cerrado en X, y por ende Y es un subespacio discreto de X. Así, en particular, resulta que Y es un espacio regular. En (Arhangel'skii, 1996, Ejemplo 1), Arhangel'skii muestra que Y no es regular en X. De donde, se obtiene que la flecha (4) no es reversible.

Ejemplo 3.4. La flecha (3) no es reversible. En efecto, sea X como en el Ejemplo 3.3. Extendemos la topología de X al conjunto $Z = X \cup \{p\}$ (con $p \notin X$), definiendo las vecindades para el punto p como $\{p\} \cup V$, donde V es un conjunto abierto en X tal que $N \setminus F \subseteq V$, para algún conjunto finito F. Note que $0 \notin \overline{N}$ y $\overline{N} = N \cup \{p\}$. Dado que $\overline{N} \cap X = N$ y que es imposible separar a N y 0 por conjuntos abiertos y ajenos en Z, entonces X no es regular en Z. Por otra parte, veamos que X es internamente regular en Z. En efecto, el caso no trivial es cuando se desea separar, por conjuntos abiertos en Z, el punto 0 de algún conjunto $A \subseteq X$ cerrado en Z con $A \cap N \neq \emptyset$. Sin embargo, no es difícil verificar, que en tal caso $A \cap N$ es un conjunto finito. Por lo tanto, se tiene que X es internamente regular en Z.

Recordemos la caracterización: X es regular si y sólo si para cada $x \in X$ y cada subconjunto abierto U en X tal que $x \in U$, existe un subconjunto abierto V en X tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Caracterizaciones análogas, en términos de la cerradura de conjuntos abiertos, también pueden obtenerse para las nociones relativas de regularidad de la Definición 3.1. En la literatura se encuentran las caracterizaciones de superregular en X, regular en X y de fuertemente regular en X, como a continuación lo mencionamos.

Proposición 3.5. (Díaz-Reyes et al., 2019, Lema 3.1) Sea X un espacio topológico. Para cualquier subespacio Y de X, se tiene que Y es superregular en X si y sólo si para cada $y \in Y$ y para cada subconjunto abierto U en X tal que $y \in U$, existe un subconjunto abierto V en X tal que $y \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Proposición 3.6. (Grabner et al., 2005, Lema 1) Sea X un espacio topológico. Para cualquier subespacio Y de X, se tiene que Y es regular (fuertemente regular) en X si y sólo si para todo $x \in Y$ ($x \in X$) y para todo subconjunto abierto U en X tal que $x \in U$, existe subconjunto abierto $V \subseteq U$ tal que $x \in V$ y $\overline{V} \cap Y \subseteq U$.

Por otro lado, en el siguiente resultado, los autores demuestran la caracterización de la noción internamente regular en X.

Teorema 3.7. Sea X un espacio topológico. Para cualquier subespacio Y de X, se tiene que Y es internamente regular en X si y sólo si para todo $y \in Y$ y para todo subconjunto abierto U en X con $y \in U$ y $X \setminus U \subseteq Y$, existe un conjunto abierto V en X tal que $y \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Demostración. Supongamos que Y es internamente regular en X. Sean $y \in Y$ y U un subconjunto abierto en X con $y \in U$ y $X \setminus U \subseteq Y$. Dado que $y \notin X \setminus U$ y $X \setminus U \subseteq Y$ es un conjunto cerrado en X, se sigue por hipótesis que existen subconjuntos abiertos W_1 y W_2 en X tales que $y \in W_1$, $X \setminus U \subseteq W_2$ y $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. De donde, $y \in W_1 \subseteq \overline{W_1} \subseteq X \setminus W_2 \subseteq U$.

Recíprocamente, veamos que Y es internamente regular en X. Sean $y \in Y$ y F un subconjunto de Y cerrado en X que no tiene a y. Dado que $y \in X \setminus F$, $X \setminus F$ es abierto en X y $X \setminus (X \setminus F) \subseteq Y$, se sigue por hipótesis que existe un subconjunto abierto V en X tal que $y \in V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus F$. De donde, V y $X \setminus \overline{V}$ son los subconjuntos abiertos deseados que separan a y y a F. Así, Y es internamente regular en X. □

Ahora, veamos condiciones necesarias para que algunas de las flechas en el Diagrama 2 sean reversibles.

Proposición 3.8. Sea X un espacio topológico y Y un subconjunto cerrado en X. Se tiene que Y es internamente regular en X si y sólo si Y es regular en X.

Demostración. Supongamos que Y es internamente regular en X. Sea $y \in Y$ y F cualquier subconjunto cerrado en X tal que $x \notin F$. Dado que Y es cerrado en X se tiene que $F \cap Y$ es un subconjunto de Y cerrado en X. De aquí, el punto $y \in Y$ y conjunto $F \cap Y$ pueden ser separados por conjuntos ajenos y abiertos en X, esto es, Y es regular en X. El recíproco es la flecha (3) del Diagrama 2. □

Proposición 3.9. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio denso en X. Se tiene que Y es un espacio regular si y sólo si Y es regular en X.

Demostración. Supongamos que Y es un espacio regular. Para mostrar que Y es regular en X, tomemos $y \in Y$ y F un subconjunto cerrado en X tal que $y \notin F$. Por hipótesis, existen conjuntos abiertos U' y V' en Y tales que $y \in U'$, $F \cap Y \subseteq V'$ y $U' \cap V' = \emptyset$. Sean U y V conjuntos abiertos en X tales que $U' = U \cap Y$ y $V' = V \cap Y$. Veamos que $U \cap V = \emptyset$. Para esto, supongamos lo contrario. Luego, como Y es denso en X, se tiene que $(U \cap V) \cap Y \neq \emptyset$. Sin embargo, en vista de que $U' \cap V' = \emptyset$, obtenemos que $U \cap V \subseteq X \setminus Y$, lo cual es una contradicción. Así, $U \cap V = \emptyset$. Observe que $y \in U$ y $F \cap Y \subseteq V$. Por lo tanto, Y es regular en X. El recíproco es la flecha (4) del Diagrama 2. □

Los autores desconocen una respuesta a lo siguiente.

Pregunta 3.10. ¿Existen condiciones bajo las cuales si Y es regular en X, entonces Y es superregular en X? Ídem para obtener Y es fuertemente regular en X.

4. Propiedades relativas de normalidad

En esta última sección toca el turno de analizar algunos aspectos concernientes al axioma de normalidad. A continuación veamos algunas versiones relativas de este axioma, de las cuales fuertemente normal, normalidad relativa y cercanamente normal, se tomaron de (Arhangel'skii, 1996, p. 89); internamente normal, se obtuvo de (Arhangel'skii, 2002, p. 28) y supernormal, se seleccionó de (Díaz-Reyes et al., 2019, Definición 2).

Definición 4.1. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se dice que:

(a) Y es *fuertemente normal en* X, si para cada par de subconjuntos ajenos A y B tales que sean cerrados en Y, existen subconjuntos U y V abiertos en X tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

(b) Y es *normal en* X, si para cada par de subconjuntos cerrados ajenos A y B en X, existen subconjuntos U y V abiertos en X tales que $A \cap Y \subseteq U$, $B \cap Y \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

(c) Y es *cercanamente normal en* X, si para cada par de subconjuntos cerrados ajenos A y B en X, existen subconjuntos U y V abiertos en Y tales que $A \cap Y \subseteq U$, $B \cap Y \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

(d) Y es *internamente normal en* X, si para cada par de subconjuntos cerrados ajenos A y B en X contenidos en Y, existen subconjuntos U y V abiertos en X tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

(e) Y es *supernormal en* X, si para cada dos subconjuntos cerrados ajenos A y B en X con $A \subseteq Y$, existen subconjuntos U y V abiertos en X tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

De manera inmediata se tiene que si en la Definición 4.1 $Y = X$, todos los incisos coinciden con el axioma de normalidad. Además, si X es un espacio normal, entonces para todo subespacio Y de X se cumple que: Y es normal en X, Y es cercanamente normal en X, Y es internamente normal en X y Y es supernormal en X.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Y es fuertemente normal en X}} \arrow[r, "(1)"] \arrow[d, "(2)"] & \boxed{\text{Y es normal en X}} \arrow[r, "(5)"] \arrow[d, "(4)"] & \boxed{\text{Y es internamente normal en X}} \\
\boxed{\text{Y es normal}} \arrow[r, "(3)"] & \boxed{\text{Y es cercanamente normal en X}} & \boxed{\text{Y es supernormal en X}} \arrow[u, "(6)"]
\end{tikzcd}$$

Diagrama 3.

En el Diagrama 3 encontramos las relaciones de las versiones relativas de normalidad, la dirección de las fechas se verifica inmediatamente. En cuanto a los ejemplos que muestran que las flechas no son reversibles, en la bibliografía se encuentran algunos y los citamos a continuación:

(a) En (Arhangel'skii, 1996, Ejemplo 2) se muestra que la flecha (3) no es reversible.

(b) En (Arhangel'skii, 2002, Ejemplo 3.5) se muestra que la flecha (5) no es reversible.

(c) En (Díaz-Reyes et al., 2019, Ejemplo 4) se garantiza que la flecha (6) no es reversible.

Por otra parte, recordemos que si $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, $L_1 = \{(x, y) \in L : y = 0\}$ y $L_2 = L \setminus L_1$, el *plano de Niemytzki* es conjunto L con la topología siguiente: los puntos de L_2 son considerados con la topología usual de $\mathbb{R}^2$ y para un punto $(x, 0) \in L_1$ sus vecindades son de la forma $\{(x, 0)\} \cup B$, donde B es un una bola abierta en $\mathbb{R}^2$ tangente a L_1 en $\{(x, 0)\}$.

Ejemplo 4.2. La flecha (4) no es reversible. Considere el plano de Niemytzki L. Dado que L_1 es un subespacio discreto de L, se tiene que L_1 es un espacio normal. Luego, por la flecha (3) del Diagrama 3, L_1 es cercanamente normal en L. Sea

$$C = \{(r, q) \in L_2 : r, q \in \mathbb{Q}\}.$$

Es inmediato que C es un subconjunto denso en L.

Afirmación: L_1 no es internamente normal en L.

Para la demostración de esta afirmación, procedemos por contradicción. Supongamos que L_1 es internamente normal en L. Luego, para todo $A \subseteq L_1$, existen subconjuntos abiertos U_A, V_A en L tales que $A \subseteq U_A$, $L_1 \setminus A \subseteq V_A$ y $U_A \cap V_A = \emptyset$. Denotamos por $\mathbb{P}(L_1)$ y por $\mathbb{P}(C)$ el conjunto potencia de L_1 y de C, respectivamente. Definimos la función $\Phi : \mathbb{P}(L_1) \to \mathbb{P}(C)$ de la siguiente manera: a cada $A \subseteq L_1$, le asignamos el conjunto

$C_A = C \cap U_A$. Veamos que Φ es una función inyectiva. Tomamos $A, B \subseteq L_1$ con $A \neq B$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $A \setminus B \neq \emptyset$. Note que $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, lo cual implica que $U_A \cap V_B \neq \emptyset$. Dado que C es denso, $(U_A \cap V_B) \cap C \neq \emptyset$. Como $(U_A \cap V_B) \cap C \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B$, se sigue que $C_A \setminus C_B \neq \emptyset$, es decir, $C_A \neq C_B$. Por lo tanto, la función Φ es inyectiva. De donde, $|\mathbb{P}(L_1)| \leq |\mathbb{P}(C)|$. Por otro lado, notemos que $|\mathbb{P}(L_1)| = 2^{|L_1|} = 2^{\mathfrak{c}}$, donde $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$. De igual manera, se tiene que $|\mathbb{P}(C)| = 2^{|C|} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. De lo anterior, se concluye que $2^{\mathfrak{c}} \leq \mathfrak{c}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, se tiene probada la afirmación.

Finalmente, como L_1 no es internamente normal en L, obtenemos de la flecha (5) del Diagrama 3 que L_1 no es normal en L.

En esta misma línea, hacemos los siguientes aportes.

Ejemplo 4.3. La flecha (1) no es reversible. Considere el plano de Niemytzki. Es bien conocido que L es un espacio completamente regular que no es normal. Como todo espacio completamente regular se puede encajar en un espacio Hausdorff y compacto (Engelking, 1989, Teorema 3.2.6), y todo espacio Hausdorff y compacto es normal, se concluye que L se puede encajar en un espacio normal L^*. Por lo tanto, L es normal en L^* y L es cercanamente normal en L^*. Puesto que L es normal en L^* y L no es fuertemente normal en L^*, pues L no es un espacio normal, se tiene que la flecha (1) no es reversible.

Ejemplo 4.4. La flecha (2) no es reversible. Considere el espacio topológico X definido en el Ejemplo 3.2 y sea $Y = \{p, q\}$. Note que Y es un subespacio discreto de X y por lo tanto Y es un espacio normal. Por otra parte, $\{p\}$ y $\{q\}$ son conjuntos cerrados en Y, que es sencillo distinguir, no pueden ser separados por conjuntos abiertos ajenos en X. Por lo tanto, Y no es fuertemente normal en X.

Ahora, recordemos que un espacio X es normal si para cada subconjunto cerrado F en X y cada subconjunto abierto U en X que contenga a F, existe un subconjunto abierto V en X tal que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Las siguientes caracterizaciones de la normalidad fuerte en X y de la supernormalidad en X son conocidas.

Teorema 4.5. (Sarsak and Hdeib, 2010, Teorema 2.3) Sea X un espacio topológico. Para cualquier subespacio Y de X, se tiene que Y es fuertemente normal en X si y sólo si para cada subconjunto F cerrado en Y y para cada subconjunto abierto U en Y tal que $F \subseteq U$, existe un subconjunto abierto V en X tal que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U \cup (X \setminus Y)$.

Proposición 4.6. (Díaz-Reyes et al., 2019, Lema 3.2) Sea X un espacio topológico. Para cualquier subespacio Y de X se tiene que Y es supernormal en X si y sólo si para cada $A \subseteq Y$ cerrado en X y cualquier subconjunto abierto U en X tal que $A \subseteq U$, existe un subconjunto abierto V en X de tal forma que $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subset U$.

A su vez, en el mismo sentido de los resultados previos, los autores caracterizan las nociones normal en X, cercanamente normal en X e internamente normal en X.

Teorema 4.7. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se tiene:

(a) Y es normal en X si y sólo si para todo subconjunto cerrado F en X y cualquier subconjunto abierto U en X que contenga a F, existe un conjunto abierto V en X tal que $F \cap Y \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U \cup (X \setminus Y)$.

(b) Y es cercanamente normal en X si y sólo si para todo subconjunto cerrado en F en X y cualquier subconjunto abierto U en X que contenga a F, existe un subconjunto abierto V en Y tal que $F \cap Y \subseteq V \subseteq \overline{V}^Y \subseteq Y \setminus U$.

(c) Y es internamente normal en X si y sólo si para todo subconjunto $F \subseteq Y$ cerrado en X y para cada subconjunto abierto U en X que contenga a F y $X \setminus U \subseteq Y$, existe un subconjunto abierto V en X tal que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Demostración. (a) Supongamos que Y es normal en X. Sea F un subconjunto cerrado en X y U un subconjunto abierto en X tal que $F \subseteq U$. Como $F \cap (X \setminus U) = \emptyset$, se sigue por hipótesis que existen subconjuntos abiertos W_1, W_2 en X tales que $F \cap Y \subseteq W_1$, $(X \setminus U) \cap Y \subseteq W_2$ y $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Se tiene que $F \cap Y \subseteq W_1 \subseteq \overline{W_1} \subseteq X \setminus W_2 \subseteq X \setminus [(X \setminus U) \cap Y] = U \cup (X \setminus Y)$.

Recíprocamente, mostremos que Y es normal en X. Sean A y B subconjuntos cerrados y ajenos en X. Dado que $A \subseteq X \setminus B$, por hipótesis, existe un subconjunto abierto V en X tal que $A \cap Y \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq (X \setminus B) \cup (X \setminus Y)$. De aquí, $A \cap Y \subseteq V$, $B \cap Y = X \setminus [(X \setminus B) \cup (X \setminus Y)] \subseteq X \setminus \overline{V}$ y $V \cap (X \setminus \overline{V}) = \emptyset$. Por lo tanto, Y es normal en X.

(b) Supongamos que Y es cercanamente normal en X. Sea F un subconjunto cerrado en X y U un subconjunto abierto en X tal que $F \subseteq U$. Como $F \cap (X \setminus U) = \emptyset$, se sigue por hipótesis que existen subconjuntos abiertos W_1, W_2 en Y tales que $F \cap Y \subseteq W_1$, $(X \setminus U) \cap Y \subseteq W_2$ y $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Se tiene que $F \cap Y \subseteq W_1 \subseteq \overline{W_1}^Y \subseteq Y \setminus W_2 \subseteq Y \setminus (X \setminus U) = Y \setminus U$.

Recíprocamente, probemos que Y es cercanamente normal en X. Para ello, sean A y B subconjuntos cerrados y ajenos en X. Dado que $A \subseteq X \setminus B$, por hipótesis, existe un subconjunto abierto V en Y tal que $A \cap Y \subseteq V \subseteq \overline{V}^Y \subseteq Y \setminus (X \setminus B)$. De lo anterior, no es difícil verificar que $A \cap Y \subseteq V$, $B \cap Y \subseteq Y \setminus [Y \setminus (X \setminus B)] \subseteq Y \setminus \overline{V}^Y$, $V \cap X \setminus \overline{V} = \emptyset$ y, además, que V y $Y \setminus \overline{V}^Y$ son conjuntos abiertos ajenos en Y.

(c) La demostración de esta equivalencia es similar a la del Teorema 3.7. □

Respecto a tener condiciones bajo las cuales se garantiza que las flechas en el Diagrama 3 son reversibles, se han demostrado los siguientes resultados.

Proposición 4.8. (Arhangel'skii, 1996, Proposiciones 4 y 7) Sean X un espacio topológico y Y un subespacio denso en X. Se cumple lo siguiente:

(a) Y es cercanamente normal en X si y sólo si Y es normal en X.

(b) Y es un espacio normal si y sólo si Y es fuertemente normal en X.

Proposición 4.9. (Arhangel'skii, 1996, Proposición 8) Sean X un espacio topológico y Y un subespacio cerrado en X. Se tiene que Y es normal en X si y sólo si Y es fuertemente normal en X.

De igual forma, los autores demuestran lo siguiente.

Teorema 4.10. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio cerrado en X. Se tiene que:

(a) Y es cercanamente normal en X si y sólo si Y es un espacio normal.
(b) Y es internamente normal en X si y sólo si Y es normal en X.

Demostración. (a) Supongamos que Y es cercanamente normal en X. Para demostrar que Y es un espacio normal, consideramos A y B subconjuntos cerrados en Y con $A \cap B = \emptyset$. Como Y es cerrado en X, A y B son cerrados y ajenos en X. De donde existen subconjuntos abiertos U y V en Y tales que $A \cap Y \subseteq U$, $B \cap Y \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Note que $A \cap Y = A$ y $B \cap Y = B$, lo que garantiza que Y es un espacio normal en X. El recíproco es la flecha (3) del Diagrama 3.

(b) Vamos a demostrar que Y es normal en X. Sean A, B subconjuntos cerrados en X tales que $A \cap B = \emptyset$. Como Y es cerrado en X, $A \cap Y$ y $B \cap Y$ son subconjuntos cerrados y ajenos en X contenidos en Y. Luego, dado que Y es internamente normal en X, existen subconjuntos abiertos U y V en X tales que $A \cap Y \subseteq U$, $B \cap Y \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto Y es normal en X. El recíproco es la flecha (5) del Diagrama 3. □

Teorema 4.11. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio cerrado en X tales que para cada subconjunto cerrado A en X contenido en Y, existe un subconjunto abierto U en X con $A \subseteq U \subseteq Y$. Se tiene que Y es internamente normal en X si y sólo si Y es supernormal en X.

Demostración. Supongamos que Y es internamente normal en X. Sean A y B subconjuntos cerrados en X tales que $A \subseteq Y$ y $A \cap B = \emptyset$. Como Y es cerrado en X, $B \cap Y$ y A son subconjuntos cerrados y ajenos en X contenidos en Y. Luego, dado que Y es internamente normal en X, existen subconjuntos abiertos U' y V' en X tales que $A \subseteq U'$, $B \cap Y \subseteq V'$ y $U' \cap V' = \emptyset$. Por hipótesis, existe un subconjunto abierto U'' tal que $A \subseteq U'' \subseteq Y$. Definamos $U = U' \cap U''$ y $V = V' \cup (X \setminus Y)$. Por la forma en como se han tomado los conjuntos, se tiene que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y U, V son subconjuntos abiertos en X. Además, de la igualdad

$$U \cap V = U \cap [V' \cup (X \setminus Y)] = (U \cap V') \cup [U \cap (X \setminus Y)]$$

se desprende que $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto Y es supernormal en X. El recíproco se deriva de las definiciones correspondientes. □

A manera de conclusión presentamos lo siguiente. Por un lado, en el Diagrama 4 recordamos las relaciones bien conocidas entre los axiomas clásicos de separación. De hecho, en la mayoría de los libros de topología es posible encontrar ejemplos que muestran que los recíprocos de las flechas no siempre se cumplen.

$$\boxed{X \text{ es normal}} \xrightarrow{(1)} \boxed{X \text{ es regular}} \xrightarrow{(2)} \boxed{X \text{ es Hausdorff}} \xrightarrow{(3)} \boxed{X \text{ es } T_1}$$

Diagrama 4.

Por otro lado, en vista de lo anterior, resulta natural preguntarse si también existen relaciones entre las propiedades relativas de separación que hemos definido a lo largo del escrito. A continuación, en el Diagrama 5 presentamos un avance parcial de estas cuestiones.

$$\boxed{Y \text{ es normal en } X} \xrightarrow{(1)} \boxed{Y \text{ es regular en } X} \xrightarrow{(2)} \boxed{Y \text{ es Hausdorff en } X}$$

Diagrama 5.

Proposición 4.12. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se tiene:

(a) Si Y es normal en X, entonces Y es regular en X.
(b) Si Y es regular en X, entonces Y es Hausdorff en X.

Demostración. (a) Supongamos que Y es normal en X. Tomemos $y \in Y$ y un subconjunto F cerrado en X tales que $y \notin F$. Para los conjuntos $\{y\}$ y F, cerrados en X y ajenos, existen subconjuntos U y V abiertos en X tales que $y \in \{y\} \cap Y \subseteq U$, $F \cap Y \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. De donde, Y es regular en X.

(b) Supongamos que Y es regular en X. Sean $y_1, y_2 \in Y$ con $y_1 \neq y_2$. Dado que $y_1 \notin \{y_2\}$, existen subconjuntos U y V abiertos en X tales que $y_1 \in U$, $y_2 \in \{y_2\} \cap Y \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. De esta forma, obtenemos que Y es Hausdorff en X. □

A su vez, para mostrar que ninguna flecha en el Diagrama 5 es reversible, existen ejemplos triviales como vemos a continuación. Si se desea ver que la flecha (1) no es reversible, es suficiente considerar un espacio topológico X que sea regular y no normal. Así, no es complicado verificar que si se elige $Y = X$, entonces Y es regular en X y Y no es normal en X. De esta misma manera, se puede proceder para comprobar que la flecha (2) no es reversible. Sin embargo, en el presente trabajo proporcionamos ejemplos no triviales que muestran que ninguna flecha en el Diagrama 5 es reversible.

Ejemplo 4.13. La flecha (1) del Diagrama 5 no es reversible. Consideremos el plano de Niemytzki. En el Ejemplo 4.2, se muestra que L_1 no es normal en L. Como es sabido, L es un espacio regular, se sigue que L_1 es regular en L.

Ejemplo 4.14. La flecha (2) del Diagrama 5 no es reversible. Considere Y y X como en el Ejemplo 3.3. Hemos indicado que Y no es regular en X. En cambio, notemos que X es un espacio Hausdorff, por lo que en particular Y es Hausdorff en X.

Como el lector puede observar, el Diagrama 5 es sólo uno de tantos que se pueden generar con las nociones que hemos definido. Por ejemplo, se puede pensar qué pasa si ahora se inicia con otra propiedad relativa, digamos Y fuertemente normal en X, o bien con Y internamente normal en X, Y cercanamente normal en X o con Y supernormal en X. Incluso, se podría pensar si existen relaciones entre axiomas de diferente naturaleza. Cada una de estas ideas puede generar un nuevo diagrama, que a su vez, requerirá sus contraejemplos. Pero es un buen ejercicio que los autores dejan al lector interesado en esta temática.

Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por su cuidadosa lectura y observaciones, lo que en conjunto ayudó a mejorar significativamente el trabajo. El primer autor agradece al CONACYT por el apoyo brindado mediante "Estancias posdoctorales por México. Convocatoria 2021. Modalidad 1: Estancia Posdoctoral Académica", realizada en la Universidad Autónoma de Chiapas en el periodo octubre 2021-septiembre 2022.

Referencias

Arhangel'skii, A. V. (1996). Relative topological properties and relative topological spaces. *Topology Appl.*, 70:87–99.

Arhangel'skii, A. V. (2002). Relative normality and dense subspaces. *Topology Appl.*, 123:27–36.

Arhangel'skii, A. V. and Genedi, H. M. M. (1989). Beginnings of the theory of relative topological properties. *General Topology Spaces and Mappings (MGU, Moscow) (en ruso)*, 70:3–48.

Arhangel'skii, A. V. and Tartir, J. (1996). A characterization of compactness by a relative separation property. *Question and Answers in General Topology*, 14:49–52.

Casarrubias Segura, F. and Tamariz Mascarúa, A. (2012). *Elementos de Topología General*. Sociedad Matemática Mexicana, México.

Christenson, C. O. and Voxman, W. L. (1998). *Aspects of Topology*. BCS Associates, Moscow, Idaho, USA.

Dugundji, J. (1976). *Topology*. Allyn and Bacon Inc, United States of America.

Díaz-Reyes, J., Martínez-Ruiz, I., and Ramírez-Páramo, A. (2019). Relative topological properties of hyperspaces. *Mathematica Slovaca*, 69:675–684.

Engelking, R. (1989). *General topology*. Heldermann Verlag Berlin, University of Michigan.

Grabner, E., Grabner, G., Miyazaki, K., and Tartir, J. (2005). Relative star normal type. *Topology Appl.*, 153:874–885.

Munkres, J. (2000). *Topology, Second edition*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Sarsak, M. S. and Hdeib, H. Z. (2010). Relative strongly normal and relative normal subspaces. *International Mathematical Forum*, 5:579–586.