

## Retardos en la entrada: un reto para el ingeniero en control Input delays: a challenge for the control engineer

Sabine Mondié <sup>a,\*</sup>, Leopoldo Vite <sup>a</sup>

<sup>a</sup>Departamento de Control Automático, CINVESTAV-IPN, 07360, CDMX, México.

### Resumen

Se explica mediante ejemplos de la vida cotidiana el interés de diseñar leyes de control que compensen los retardos en la entrada de los sistemas. Se exponen los principios básicos de dos enfoques: el de predicción exacta y el de predicción basada en observadores. Se presenta una comparación cualitativa de los dos métodos así como un ejemplo ilustrativo.

**Palabras Clave:** Sistemas con retardos en la entrada, Predictores, Observadores.

### Abstract

Some daily life examples show the interest in designing control laws aiming at the compensation of input delay. The main ideas of exact prediction and observer-based prediction are introduced. A qualitative comparison and an illustrative example are presented.

**Keywords:** Input delay systems, Prediction, Observers.

### 1. Introducción

La teoría del control se basa en el famoso principio de retroalimentación. Este consiste en medir la salida de un sistema, compararla con el objetivo deseado, y calcular una acción correctiva que se aplica al sistema. Para un buen funcionamiento del mecanismo de retroalimentación, además de un buen conocimiento del proceso y una medición exacta de las variables de interés, resulta crucial contar con información actualizada de las variables, así como aplicar de manera expedita las acciones de control calculadas. Sin embargo, en sistemas tecnológicos, biológicos e industriales aparecen retardos en la entrada y/o salida que generalmente provocan deterioro de los sistemas, por esto los retardos son un reto para los ingenieros en control.

En este artículo se argumenta la relevancia del estudio de este fenómeno presentando diversos ejemplos en la sección 2 y se plantea formalmente el problema en la sección 3. Se explican dos de los principales esquemas de control propuestos para resolver este reto en la sección 4: el método de asignación de espectro finito que emplea una predicción exacta y el enfoque de predictores y sub predictores basado en el diseño de observadores. En las secciones 5 y 6, se comparan cualitativamente los dos enfoques y se presenta un ejemplo ilustrativo.

### 2. Motivación: ejemplos de retardos en la entrada

De niño seguramente ha intentado balancear un palo de escoba, una regla, como se muestra en la Figura 1.

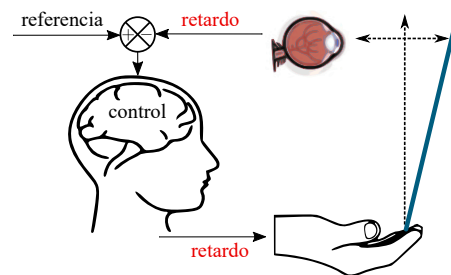


Figura 1: Balanceo manual de una varilla.

Intente el experimento con un lápiz, una pluma o un palillo: ¡imposible! ¿Por qué?

La respuesta reside en el tiempo de reacción de aproximadamente 0.25 segundos, llamado retardo, que tardamos en reaccionar para corregir el desplazamiento de la vertical.

Podemos observar retardos en nuestra vida cotidiana, por ejemplo, al regular la temperatura del agua de la regadera: tal como se ilustra en la Figura 2 donde se requieren comúnmente varios ajustes de la perilla para alcanzar la temperatura de agua

\* Autor para correspondencia: smondie@ctrl.cinvestav.mx

Correo electrónico: smondie@ctrl.cinvestav.mx (Sabine Mondié-Cuzange), lvite@ctrl.cinvestav.mx (Leopoldo Vite-Hernández).

idónea. Esto se debe a la distancia entre la perilla y el chorro de agua, así como al tiempo que toma nuestro cerebro en registrar la temperatura del agua en nuestra piel y en enviar a nuestra mano la orden de accionar la perilla.



caliente.png

Figura 2: Ajuste de temperatura manualmente.

Un ejemplo crítico se presenta en el manejo de un vehículo, donde el tiempo de reacción para frenar ante un obstáculo, puede originar un accidente si es demasiado largo. Asimismo, en los sistemas automatizados de convoyes de vehículos, tal como se ilustra en la Figura 3, el retardo que existe en la medición de la distancia al vehículo anterior y el tiempo de cálculo de leyes de control, debe ser tomado en cuenta para alcanzar velocidades y distancias de seguridad entre vehículos.

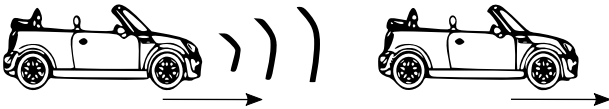


Figura 3: Convoy de vehículos viajando sobre el mismo carril.

En las epidemias como la del COVID-19, sabemos lo importante que es contar con información actualizada de casos positivos y de decesos para poder establecer políticas eficaces de distanciamiento social y de gestión de capacidad hospitalaria.

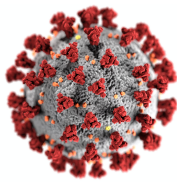


Figura 4: Coronavirus COVID-19.

Sin embargo, los tiempos requeridos para hacer las pruebas virológicas, por un lado, y luego para registrar los casos en bases de datos centralizadas son fuente de retardos críticos. Asimismo, es imposible aplicar de manera inmediata entre la población las políticas de contención de la epidemia como cuarentenas y obligación de usar cubrebocas (Castaños and Mondié, 2021). Los procesos de vacunación demandan tiempos aún más largos debido a la complejidad de la adquisición y distribución de estas.

Los procesos industriales también suelen estar afectados por retardos, por ejemplo, las tareas de transporte, procesamiento y medición de producto o de señales en los sistemas hidráulicos,

neumáticos, térmicos, entre otros, requieren de largos lapsos de tiempo para su ejecución, tal es el caso de los sistemas de fluido térmico, ver Figura 5.

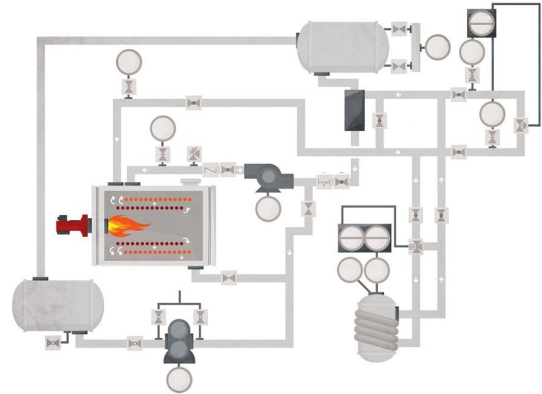


Figura 5: Sistema de fluido térmico.

En los ejemplos anteriores, el retardo es causa de deterioro de la respuesta de los sistemas. Es importante mencionar que también puede ser fuente de mejora. Este es el caso de leyes de tipo retardado. Este enfoque consiste en la introducción deliberada de acciones retardadas cuyas propiedades de filtraje, coadyuvan al buen desempeño del sistema en lazo cerrado (Villafuerte et al., 2012).

### 3. Planteamiento matemático del problema

Con el fin de simplificar la exposición y de visibilizar los elementos importantes de los métodos estudiados, consideraremos el caso sencillo de sistemas lineales con retardo en la entrada con estado medible. Muchos de los ejemplos expuestos en la sección anterior pueden ser representados de manera simplificada mediante esta clase de modelos. Los sistemas considerados son de la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau). \quad (1)$$

Aquí  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado del sistema y  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es la ley de control. Este sistema tiene un retardo en la entrada igual a  $\tau \geq 0$ . Las matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  representan la dinámica del sistema y se supone que satisfacen condiciones de controlabilidad espectral, es decir que el par  $(A, Be^{A\tau})$  es controlable (Manitius, 1976).

En el caso de sistemas de tipo (1), el reto del ingeniero en control consiste en, bajo la suposición de que se conoce una ley de control satisfactoria para el sistema libre de retardos ( $\tau = 0$ ),

$$u(t) = Kx(t), \quad (2)$$

donde  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es la matriz de ganancias, determinar una ley de control que permita mantener un desempeño adecuado a pesar de la presencia del retardo  $\tau$ .

### 4. Métodos para la compensación del retardo

En su trabajo pionero, Smith (1959) introdujo el esquema de control que lleva su nombre. La construcción, elaborada en el dominio de la frecuencia para el caso de plantas SISO (1

entrada y 1 salida), parte del diseño de un controlador en ausencia del retardo en la entrada. Se demostró que, en el caso de plantas inestables, la estabilidad del sistema en lazo cerrado se pierde cuando hay perturbaciones. La propuesta de Smith tiene dos contribuciones muy importantes: 1) tener como punto de partida una ley de control diseñada para el sistema libre de retardos, problema para el cual existen muchos algoritmos y 2) poner en evidencia la presencia de una predicción del estado en el esquema de control.

A continuación, se presentan dos métodos inspirados en la propuesta de Smith para la compensación de retardos en la entrada. Ambos emplean una predicción del estado un tiempo  $\tau$  adelante introducida en el control diseñado para el sistema con retardo nulo, tarea de menor grado de dificultad. El primero, llamado asignación de espectro finito (Manitius and Olbrot, 1979), se basa en una predicción exacta mientras que el segundo (Najafi et al., 2013), recurre a una predicción aproximada obtenida mediante un tipo de observador.

#### 4.1. Asignación de espectro finito

El desarrollo de Manitius and Olbrot (1979) parte de una ley de control  $u(t) = Kx(t)$  diseñada para el sistema (1) cuando  $\tau = 0$ . Las múltiples técnicas de diseño disponibles para el caso de sistemas lineales libre de retardo, garantiza que la matriz en lazo cerrado ( $A + BK$ ) es Hurwitz (es decir que todas las raíces de  $\det(sI_{n \times n} - (A + BK))$  tienen parte real negativa), así como un desempeño satisfactorio. Se propone para el sistema con retardo (1) una ley de control de tipo

$$u(t) = Kx(t + \tau), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Si tuviéramos acceso a  $x(t + \tau)$  en el tiempo  $t$ , el control retardado sería  $u(t - \tau) = Kx(t - \tau + \tau) = Kx(t)$  y el sistema en lazo cerrado se reduciría a:

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t), \quad t \geq \tau. \quad (4)$$

El espectro de la matriz resultante es el del sistema libre de retardos en lazo cerrado, el cual es finito (en el sentido de que el número de raíces es finito, al contrario de los sistemas con retardos que tienen un número infinito de raíces). Cabe mencionar que Artstein (1982) obtuvo resultados comparables por medio de un enfoque de transformación matemática.

Note que la expresión (4) es válida solo a partir del tiempo  $\tau$ , ya que en el intervalo  $[0, \tau]$ , debido precisamente al retardo  $\tau$ , el sistema evoluciona de acuerdo a la ecuación

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BK\psi(t - \tau), \quad t \in [0, \tau]$$

donde  $\psi$  es la condición inicial del control en el intervalo  $[-\tau, 0]$ .

Claramente, conocer en el tiempo  $t$  el estado exacto en el tiempo futuro  $t + \tau$ , es irrealista ya que implicaría tener la capacidad de adivinar el futuro. Sin embargo, si tenemos un conocimiento exacto de la planta ( $A, B$ ) y del retardo  $\tau$  y si el sistema no sufre perturbaciones, podemos realizar una predicción exacta gracias a la conocida expresión de la solución del sistema (1), llamada formula de Cauchy (Kailath, 1980),

$$x(\phi) = e^{A(\phi - \phi_0)}x(\phi_0) + \int_{\phi_0}^{\phi} e^{A(\phi - \delta)}Bu(\delta - \tau)d\delta, \quad \phi \geq 0.$$

la cual permite calcular el estado en un tiempo  $\phi \geq \phi_0$  a partir del conocimiento del estado en el tiempo  $\phi_0$ .

Si elegimos  $\phi = t + \tau$  y  $\phi_0 = t$ , la ecuación anterior se reduce a

$$x(t + \tau) = e^{A\tau}x(t) + \int_t^{t+\tau} e^{A(t+\tau-\delta)}Bu(\delta - \tau)d\delta,$$

y el cambio de variable  $\theta = \delta - \tau$ , implica

$$x(t + \tau) = e^{A\tau}x(t) + \int_{t-\tau}^t e^{A(t-\theta)}Bu(\theta)d\theta. \quad (5)$$

Observamos que para conocer el estado en el tiempo  $t + \theta$  solo necesitamos información disponible en el tiempo  $t$ , a saber, el estado  $x(t)$  y la variable de control  $u(\theta)$ ,  $\theta \in [t - \tau, t]$ . La fórmula (5) provee una predicción exacta.

En resumen, el sistema a analizar consta de dos ecuaciones en las dos variables  $x$  y  $u$ ,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau) \quad (6)$$

$$u(t) = K\{e^{A\tau}x(t) + \int_{t-\tau}^t e^{A(t-\theta)}Bu(\theta)d\theta\} \quad (7)$$

con condiciones iniciales

$$x(0) = x_0$$

$$u(\theta) = \psi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0].$$

Se demostró que la sustitución de (7) en (6) conduce a (4). Sin embargo, es erróneo pensar que los retardos desaparecen porque la dinámica (7), una ecuación integral de tipo retardado, es infinito dimensional.

Se presentó en (Karafyllis and Krstic, 2009) la prueba formal de estabilidad del sistema (6) en lazo cerrado con la ley de control (7) empleando técnicas de Backstepping aunadas a la interpretación del retardo como ecuación diferencial parcial de transporte. En Kharitonov (2014), se presentó una prueba simplificada en el contexto de ecuaciones con retardos en el contexto de sistemas de forma

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - h) + Bu(t - \tau). \quad (8)$$

Estos sistemas tienen, además del retardo  $\tau$  en la entrada, un retardo  $h$  en el estado, situación que ocurre por ejemplo en procesos con recirculación de producto (Santos-Sánchez et al., 2019).

Sin embargo, la vida no es tan sencilla: un primer problema radica en la implementación de la ley de control debido a que, aun teniendo conocimiento pleno de la planta, los errores de aproximación ligados al cálculo numérico de la integral en (7) por medio de sumas finitas de tipo Riemann puede conducir a efectos indeseables de inestabilidad debido a la aparición de dinámicas internas de tipo neutral (Mondié et al., 2002). En la referencia (Mondié et al., 2002) se mostró que la estabilidad es robusta a aproximaciones de la integral siempre que la ley de control garantice la estabilidad simultanea del lazo cerrado  $\dot{x}(t) = (A + BK)x(t)$  y de la dinámica interna descrita por la ecuación integral

$$x(t) = BK \int_{t-\tau}^t e^{A(t-\theta)}x(\theta)d\theta.$$

El sistema (6) en lazo cerrado con (7) es poco propicio al análisis de robustez con respecto a incertidumbre de la planta e implementación numérica. Este problema se puede remediar

empleando los predictores filtrados introducidos en Mondié and Michiels (2003) para el caso de sistemas de forma (1) y generalizado a sistemas de forma (8) en Kharitonov (2015).

La introducción del filtro consiste en aplicar el operador  $(\frac{d}{dt} - G)$  al control (3)

$$\dot{u}(t) - Gu(t) = K\dot{x}(t + \tau) - GKx(t + \tau)$$

donde, con el fin de no introducir dinámicas inestables, la matriz  $G \in \mathbb{R}^{m \times m}$  debe ser Hurwitz. Sustituyendo el sistema (1) conduce a

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= Gu(t) + K\{Ax(t + \tau) + Bu(t)\} - GKx(t + \tau) \\ &= \{G + KB\}u(t) + \{KA - GK\}x(t + \tau); t \geq 0. \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando la expresión (5) del estado futuro  $x(t + \tau)$ , se obtiene ahora una ecuación dinámica del control de tipo retardado

$$\dot{u}(t) = \{G + KB\}u(t) + \{KA - GK\} \left\{ e^{A\tau}x(t) + \int_{t-\tau}^t e^{A(t-\theta)}Bu(\theta)d\theta \right\} \quad (9)$$

en lugar de una ecuación integral. Esto resuelve la problemática de la implementación de la integral, y además facilita el análisis de robustez del sistema interconectado (1).

Cabe observar que algunos autores (Karafyllis and Krstic, 2013) consideran que el uso de métodos apropiados de integración permite evitar fenómenos de inestabilidad. Un grupo de autores (Zhou et al., 2012) ha propuesto omitir por completo el término integral en la ley de control (7). Esta opción requiere del análisis del retardo máximo posible para garantizar estabilidad, y está restringida a una clase de sistemas marginalmente estables, por lo que no se discute en este trabajo. En la sección que sigue se expone otra estrategia enfocada también a evitar términos integrales en las leyes de control.

#### 4.2. Predictores observadores y sub predictores

Este enfoque, llamado predictores observadores, introduce una predicción asintótica en lugar de una exacta. La idea subyacente, es de que al conocer el control en el tiempo  $t$ , así como la dinámica de la planta, se puede construir un sistema ficticio cuyo estado  $\hat{x}(t)$  es el estado  $x$  un tiempo  $\tau$  adelante, el cual se alimentará a la ley de control (2). Este sistema se escribiría como

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t).$$

Si las condiciones iniciales son las correctas y el modelo es exacto, este sistema predice el estado  $x(t + \tau)$ . Sin embargo, en un contexto real las condiciones iniciales no se conocen, de manera que  $\hat{x}(t)$  y  $x(t + \tau)$  no serán iguales. Con el fin de corregir este error, siguiendo las ideas del diseño de observadores, se agrega un término de corrección proporcional al error  $e(t)$  definido como

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t - \tau). \quad (10)$$

Este nuevo sistema, llamado predictor observador se escribe formalmente como

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(x(t) - \hat{x}(t - \tau)) \quad (11)$$

donde  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de ganancia del observador. La ley de control a realimentar es entonces

$$u(t) = K\hat{x}(t).$$

Derivando el error de observación (10) y sustituyendo las igualdades (1) y (11), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t - \tau) \\ &= Ax(t) - A\hat{x}(t - \tau) - L(x(t - \tau) - \hat{x}(t - 2\tau)) \end{aligned}$$

y se concluye que el error (10) está gobernado por la ecuación

$$\dot{e}(t) = Ae(t) - Le(t - \tau). \quad (12)$$

Para que el error de predicción (10) tienda a cero, se debe elegir la ganancia  $L$  de manera que la dinámica del error (12) sea estable. Esta tarea se torna complicada por la presencia del retardo  $\tau$ . En efecto, en contraste con el caso libre de retardos donde siempre existe una matriz  $L$  tal que la matriz  $A - L$  es Hurwitz, en el caso de (12), solo se puede asegurar que para cualquier matriz  $L$  tal que  $A - L$  es Hurwitz, existe un retardo  $\bar{\tau}$  tal que (12) es estable para todos los retardos en  $[0, \bar{\tau}]$ .

Claramente, el diseño de  $L$  requiere de un conocimiento profundo de la teoría de estabilidad de sistemas con retardos, ya que mientras más grande sea  $L$  a fin de cumplir con el requisito de que  $A - L$  sea Hurwitz, más pequeño es el retardo máximo  $\bar{\tau}$  permitido. Si  $\bar{\tau} \leq \tau$ , la convergencia del error está asegurada, si  $\bar{\tau} > \tau$ , si no existe una  $L$  que satisfaga las dos restricciones, el predictor observador es inadecuado.

La solución propuesta en Najafi et al. (2013) consiste en introducir predicciones del estado  $x(t + \tau/r)$ , como se muestra en la Figura 6, agregando al esquema original  $r$  subpredictores intermedios, donde  $r$  satisface  $\tau/r \leq \bar{\tau}$ .

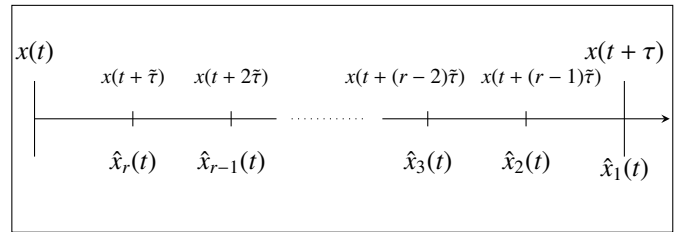


Figura 6: Esquema de la división del retardo para el intervalo  $[t, t + \tau]$  entre los sub estados estimados  $\hat{x}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ .

Definiendo la fracción del retardo original como  $\tilde{\tau} = \frac{\tau}{r}$ , se propone la siguiente cadena de  $r \in \mathbb{N}$  observadores subpredictores secuenciales:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1(t) &= A\hat{x}_1(t) + Bu(t) + L(\hat{x}_2(t) - \hat{x}_1(t - \tilde{\tau})) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) &= A\hat{x}_2(t) + Bu(t - \tilde{\tau}) + L(\hat{x}_3(t) - \hat{x}_2(t - \tilde{\tau})) \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_i(t) &= A\hat{x}_i(t) + Bu(t - (i - 1)\tilde{\tau}) + L(\hat{x}_{i+1}(t) - \hat{x}_i(t - \tilde{\tau})) \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_{r-1}(t) &= A\hat{x}_{r-1}(t) + Bu(t - (r - 2)\tilde{\tau}) + L(\hat{x}_r(t) - \hat{x}_{r-1}(t - \tilde{\tau})) \\ \dot{\hat{x}}_r(t) &= A\hat{x}_r(t) + Bu(t - (r - 1)\tilde{\tau}) + L(x(t) - \hat{x}_r(t - \tilde{\tau})). \end{aligned} \quad (13)$$

De manera que la ley de control es

$$u(t) = K\hat{x}_1(t).$$

El error de las subpredicciones es

$$e_i(t) = \hat{x}_{i+1}(t - (r - i)\tilde{\tau}) - \hat{x}_i(t - (r - i + 1)\tilde{\tau}), \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

satisface la dinámica

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= Ae_1(t) + L(e_2(t - \tilde{\tau}) - e_1(t - \tilde{\tau})) \\ \dot{e}_2(t) &= Ae_2(t) + L(e_3(t - \tilde{\tau}) - e_2(t - \tilde{\tau})) \\ &\vdots \\ \dot{e}_i(t) &= Ae_i(t) + L(e_{i+1}(t - \tilde{\tau}) - e_i(t - \tilde{\tau})) \\ &\vdots \\ \dot{e}_r(t) &= Ae_r(t) - Le_r(t - \tilde{\tau}). \end{aligned} \quad (14)$$

Este sistema se reescribe en forma matricial como

$$\dot{e}(t) = D_A e(t) + D_L e(t - \tilde{\tau}), \quad (15)$$

donde

$$e(t) = [e_1(t) \quad e_2(t) \quad \dots \quad e_j(t) \quad \dots \quad e_r(t)]^T$$

y

$$D_A = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A \end{pmatrix},$$

$$D_L = \begin{pmatrix} -L & L & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -L & L & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & -L & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L \end{pmatrix}.$$

Por ser (15) un sistema diagonal superior, su estabilidad solo depende de la de los sistemas diagonales, de manera que si los sistemas

$$\dot{e}_i(t) = Ae_i(t) - Le_i(t - \tilde{\tau}), \quad i = 1, \dots, r \quad (16)$$

son estables, entonces el error de predicción converge a cero. Estamos en presencia del mismo problema que en el caso del predictor simple, pero ahora con un retardo más pequeño  $\tilde{\tau} = \tau/r$ . Claramente, podemos reducir arbitrariamente el retardo  $\tilde{\tau}$  agregando subpredictores, de manera que se cumpla  $\tilde{\tau} \leq \bar{\tau}$ , lo cual garantiza la existencia de una matriz  $L$  que estabiliza el sistema (16), y en consecuencia el error de predicción (15).

Es posible interpretar el problema en el marco frecuencial. En efecto, la ecuación característica del error del predictor simple (12) es un cuasipolinomio (porque depende de la variable  $s$ , pero también de  $e^{-s\tilde{\tau}}$ ) de forma

$$\Delta(s) = \det(sI_{n \times n} - A + Le^{-s\tilde{\tau}}) \quad (17)$$

la ecuación característica de la ecuación de error (15) de los subpredictores secuenciales es

$$\tilde{\Delta}(s) = [\Delta_r(s)]^r \quad (18)$$

con

$$\Delta_r(s) = \det(sI_{n \times n} - A + Le^{-s\tilde{\tau}}).$$

Las raíces de (18) son las mismas que las del cuasipolinomio  $\Delta_r(s)$ , solo que con multiplicidad  $r$ . Ahora bien, observamos que los cuasipolinomios  $\Delta(s)$  y  $\Delta_r(s)$  tienen misma estructura, solo que con un retardo diferente. Vemos que cuando el retardo es cero  $\Delta(s)$  y  $\Delta_r(s)$  se reducen a un polinomio, de manera que siempre existe una matriz  $L$  tal que las raíces tienen parte real negativa. Para una matriz  $L$  dada, por continuidad (porque las raíces se mueven en forma continua en el plano complejo cuando el retardo aumenta), podemos asegurar que existe un intervalo  $[0, \bar{\tau}]$  donde las raíces se mantienen en el semiplano complejo izquierdo (Datko, 1978). Claramente, al usar subpredictores podemos asegurar que  $\tilde{\tau} = \tau/r \leq \bar{\tau}$ .

Con el enfoque frecuencial es posible hacer un estudio fino del problema, el cual permite determinar el retardo máximo  $\bar{\tau}$  para una matriz  $L$  dada, y en consecuencia el número de subpredictores  $r$  requeridos. También es de interés desarrollar métodos frecuenciales que permitan encontrar la matriz  $L$  que requiera el menor número posible de subpredictores.

## 5. Comparación

A continuación, se presenta una comparación cualitativa de las leyes de control obtenidas con el método de asignación finita de espectro y con el empleo de predictores observadores.

### 5.1. Implementación

Los posibles problemas ligados a la aproximación de la integral se evitan claramente en los predictores observadores puesto que el objetivo inicial del enfoque es precisamente evitar emplearla.

En la asignación de espectro finito, el filtraje del control que conduce al predictor filtrado (9) resuelve el problema de implementación a la vez que conduce a un sistema en lazo cerrado propicio a estudios de robustez.

### 5.2. Complejidad de la ley de control y de su diseño

La presencia de una integral sobre el intervalo  $[t - \tau, t]$  en las leyes de control (7) y (9) no es un obstáculo insuperable debido a que existen métodos numéricos, por ejemplo, el método de aproximación rectangular o trapezoidal, que permiten realizar la integración sin mayores problemas.

Sin embargo, no se puede negar que el hecho de que el predictor observador sea de misma naturaleza que la planta es una propiedad atractiva para el ingeniero en control. Esto es porque el esquema de predicción del tipo observador parte de un observador de estado, el cual es una réplica adelantada del modelo del sistema más el término de corrección de error de predicción. Note que cuando el retardo es grande, es conveniente emplear sub predictores para asegurar la convergencia del error de predicción, lo cual, a diferencia del predictor observador, incrementa la dimensión de esquema de predicción debido a la concatenación de sub predictores.

En lo que respecta al diseño, en ambos métodos se debe diseñar el control que estabiliza el sistema libre de retardos, en el

caso presentado esto consiste en determinar la matriz de ganancia  $K$  que asigna el espectro finito de la matriz  $A + BK$ .

Si se usa el control (7), el diseño termina allí. Si se usa el control filtrado (9) de asignación de espectro finito se debe también elegir la matriz Hurwitz  $G$  del filtro. Puesto que el filtraje introduce una dinámica estable en el sistema interconectado, se debe cuidar únicamente que las raíces de  $\det(sI_{m \times m} - G)$  no dominen las del espectro finito  $\det(sI_{n \times n} - (A + BK))$ .

En el caso del predictor observador, la situación es más complicada. No es posible elegir  $L$  de manera arbitraria ya que la dinámica del error es un sistema de tipo retardado. Si bien el uso de subpredictores asegura la existencia de una solución para un retardo en la entrada dado  $\tau$ , es necesario determinar el número  $r$ , mínimo de preferencia, de subpredictores requeridos. Para resolver este problema, se ha propuesto encontrar una solución usando desigualdades lineales matriciales (Najafi et al., 2013), o bien se puede realizar un estudio más fino del problema empleando métodos en el dominio de la frecuencia como el de D-particiones o la asignación de raíces múltiples dominantes (Rojas Ricca, 2021).

### 5.3. Desempeño

En el caso ideal, es decir cuando las matrices  $A$  y  $B$  de la planta y el retardo  $\tau$  son perfectamente conocidos, existe una diferencia notoria entre estos enfoques. En ambos casos, debido al retardo, el desempeño en el intervalo de tiempo  $[0, \tau]$  depende únicamente de la condición inicial del control. Si el predictor observador está correctamente diseñado, ambos esquemas tendrán un comportamiento asintótico satisfactorio. Cabe notar que a partir del tiempo  $\tau$ , el control (7) asigna de manera exacta el espectro  $\det(sI_{n \times n} - (A + BK))$  y el control filtrado asigna el espectro  $\det(sI_{n \times n} - (A + BK)) \det(sI_{m \times m} - G)$ , de manera que se conoce con exactitud las raíces dominantes del sistema. En el caso de predictores observadores, el desempeño dependerá de la velocidad de convergencia del error del predictor observador y del número de subpredictores.

### 5.4. Análisis de robustez

Los análisis presentados en las secciones 4.1 y 4.2 son válidos únicamente en condiciones ideales, es decir cuando se emplean en las expresiones del control (7), (9) o (13) las matrices  $A$  y  $B$  exactas de la planta y el verdadero retardo  $\tau$ . Esto raramente ocurre en la práctica. Las matrices  $A$  y  $B$  y el retardo  $\tau$  no se conocen con exactitud, o pueden incluso variar con el tiempo. Es importante mencionar que los sistemas dinámicos son en general no lineales. Un enfoque clásico para estabilizar esta clase de sistemas es mediante la linealización en puntos de operación y el empleo de técnicas de diseño de controladores lineales considerando las no linealidades como perturbaciones externas.

En un contexto real, es de suma importancia determinar si el control preserva la estabilidad del sistema en lazo cerrado cuando se presentan estas perturbaciones de la planta. Asimismo, es de interés caracterizar mediante cotas las perturbaciones que no destruyen la estabilidad. El estudio de esta propiedad, llamada robustez, es muy compleja en el caso del predictor exacto (7). En cambio, para el esquema en lazo cerrado (1)-(9), ha sido posible determinar cotas para las perturbaciones en las matrices de

parámetros  $A$  y  $B$  y en el retardo, tanto en el dominio de la frecuencia (Rodríguez-Guerrero et al., 2016) como en el dominio del tiempo (Juárez et al., 2020).

El enfoque de predictores observadores (13) ha sido usado con frecuencia para resolver problemas que incluyen dinámicas no lineales no modeladas (Castaños and Mondié, 2021), (Estrada-Sánchez et al., 2017).

A diferencia del predictor exacto simple, consideramos que al ser sistemas diferenciales interconectados de tipo retardado, tanto el control (9) como el (13) permiten obtener cotas de robustez.

### 5.5. Extensión a sistemas con retardos en el estado y la entrada

La extensión a los sistemas de forma (8) se torna más compleja en el caso del predictor exacto debido a que la expresión de  $x(t + \tau)$  depende ahora de la matriz fundamental del sistema, la cual es solución de una ecuación con retardos que se debe resolver y almacenar para calcular las integrales.

En el caso de predictores observadores, la forma del predictor observador se extiende simplemente sustituyendo los términos  $A\hat{x}_i(t)$  de las expresiones (13) por términos de forma  $A_0\hat{x}_i(t) + A_0\hat{x}_i(t - \tau)$ . Sin embargo, la dinámica del error tiene ahora dos retardos, de manera que la sintonización de la ganancia  $L$  y del número de predictores  $r$ , paso que se obvia en el caso del predictor exacto, es ahora más compleja.

### 5.6. Sistemas con medición parcial del estado

Es común en un contexto real que el estado no sea medible en su totalidad, y que solo se disponga de información de la salida del sistema  $y(t) = Cx(t)$ . En el caso del predictor exacto, será necesario diseñar un observador para obtener un estimado de la variable  $x(t)$  que será alimentado al predictor exacto (7) o al filtrado (9). En el caso de predictores observadores (13), ya está integrado al esquema un observador, de manera que este puede ser modificado fácilmente (Najafi et al., 2013) para considerar el caso de información parcial del estado, claro esta, bajo suposición de propiedades de observabilidad del par  $(C, A)$ . Basta con reemplazar los términos  $L(\hat{x}_{i+1}(t) - \hat{x}_i(t - \tilde{\tau}))$  por  $LC(\hat{x}_{i+1}(t) - \hat{x}_i(t - \tilde{\tau}))$  para  $i = 1, \dots, r - 1$ , y en la última ecuación, cambiar  $L(x(t) - \hat{x}_r(t - \tilde{\tau}))$  por  $Ly(t) - C\hat{x}_r(t - \tilde{\tau})$ . La dinámica del error de observación predicción es entonces  $\dot{e}_i(t) = Ae_i(t) - LCe_i(t - \tilde{\tau})$ ,  $i = 1, \dots, r$ , por lo que el diseño puede ser más complejo. El esquema ha sido empleado para incluso estimar el retardo (Léchappé et al., 2018).

## 6. Ejemplo ilustrativo

En esta sección se realiza el análisis de estabilidad de un péndulo invertido montado sobre un carro tal como se ilustra en la Figura 7. El carro-péndulo es una plataforma experimental clásica empleada en la enseñanza del control automático y, más aún, representa una plataforma de pruebas experimentales bastante atractiva para evaluar el desempeño de leyes de control, por ejemplo, en Villafuerte-Segura et al. (2019), se proveen resultados analíticos y experimentales para la estabilización del carro-péndulo empleando acciones retardadas inducidas de manera deliberada en la entrada de control.

### 6.1. Modelo matemático del carro-péndulo

Se considera el modelo matemático linealizado del carro-péndulo propuesto en Tanaka and Wang (2001)

$$\ddot{\varphi}(t) - \alpha\varphi(t) = \beta u(t - \tau),$$

donde  $\varphi(t)$  denota la posición angular,  $l$  es la longitud del péndulo y  $g$  es la constante de gravedad,  $\alpha = \frac{3g(m_p+m_c)}{l(m_p+4m_c)}$  y  $\beta = -\frac{3}{l(m_p+4m_c)}$ . La masa del péndulo y la masa del carro están denotadas por  $m_p$  y  $m_c$ , respectivamente.

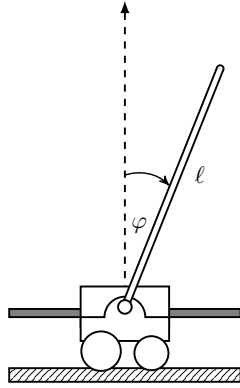


Figura 7: Péndulo invertido montado sobre un carro.

Considerando el vector de estado  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T = [\varphi(t) \ \dot{\varphi}(t)]^T$ , la dinámica del carro-péndulo se puede escribir como

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau), \quad (19)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix},$$

mientras que la ganancia del controlador es  $K = [k_p \ k_d] \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ , donde  $k_p \in \mathbb{R}$  y  $k_d \in \mathbb{R}$  denota la ganancia proporcional y derivativa, respectivamente.

### 6.2. Diseño del sistema en lazo cerrado con predictor filtrado

La ecuación característica del sistema (19) en lazo cerrado con el predictor filtrado (9) es

$$\begin{aligned} q(s) &= \det(sI_{n \times n} - (A + BK))(sI_{m \times m} - G) \\ &= (s^2 - \beta k_d s - \beta k_p - \alpha)(s - G). \end{aligned}$$

Observe que el término  $\det(sI_{n \times n} - (A + BK))$  en  $q(s)$ , es equivalente a la ecuación característica de un sistema libre de retardo de forma (4), lo cual facilita el diseño del parámetro  $K$ .

Para obtener reglas de sintonización del predictor filtrado (9), se elige  $G$  como una constante real negativa (en este caso  $G \in \mathbb{R}$ ) y el primer factor de  $q(s)$  se iguala con un polinomio de segundo grado de forma

$$q_d(s) = (s + \gamma)^2,$$

donde  $\gamma > 0$ . De tal manera, las ganancias estabilizantes resultan

$$\begin{aligned} k_p &= -\frac{\gamma^2 + \alpha}{\beta}, \\ k_d &= -\frac{2\gamma}{\beta}, \end{aligned} \quad (20)$$

las cuales asignan un par de raíces en  $s = -\gamma$  del plano complejo.

### 6.3. Diseño del sistema predictor observador

Por otra parte, el predictor observador es

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(x(t) - \hat{x}(t - \tau)) \\ u(t) = K\hat{x}(t), \end{cases} \quad (21)$$

donde  $K$  es la ganancia de control y  $L$  es la matriz de ganancias del error dinámico del observador predictor dado por

$$\dot{e}(t) = Ae(t) - Le(t - \tau). \quad (22)$$

Al proponer  $L$  como una matriz diagonal  $L = \text{diag}[l_1 \ l_2]$ , la ecuación característica de la ecuación de error del predictor observador resulta

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= \det(sI_{n \times n} - A + Le^{-s\tau}) \\ &= s^2 + e^{-2s\tau}l_1l_2 + e^{-s\tau}sl_1 + e^{-s\tau}sl_2 - \alpha. \end{aligned} \quad (23)$$

Para el caso de los sub predictores observadores cuando  $r = 2$ , (13) se reduce a

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = A\hat{x}_1(t) + L(\hat{x}_2(t) - \hat{x}_1(t - \tilde{\tau})) + Bu(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = A\hat{x}_2(t) + L(x(t) - \hat{x}_2(t - \tilde{\tau})) + Bu(t - \tilde{\tau}) \\ u(t) = K\hat{x}_1(t), \end{cases} \quad (24)$$

y cuando  $r = 4$ , (13) resulta

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = A\hat{x}_1(t) + L(\hat{x}_2(t) - \hat{x}_1(t - \tilde{\tau})) + Bu(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = A\hat{x}_2(t) + L(\hat{x}_3(t) - \hat{x}_2(t - \tilde{\tau})) + Bu(t - \tilde{\tau}) \\ \dot{\hat{x}}_3(t) = A\hat{x}_3(t) + L(\hat{x}_4(t) - \hat{x}_3(t - \tilde{\tau})) + Bu(t - 2\tilde{\tau}) \\ \dot{\hat{x}}_4(t) = A\hat{x}_4(t) + L(x(t) - \hat{x}_4(t - \tilde{\tau})) + Bu(t - 3\tilde{\tau}) \\ u(t) = K\hat{x}_1(t), \end{cases} \quad (25)$$

donde  $\tilde{\tau} = \frac{\tau}{r}$ . Mientras que las ecuaciones características de los errores de predicción correspondientes a los subpredictores secuenciales cuando  $r = 2$  y  $r = 4$  son

$$\tilde{\Delta}_2(s) = (s^2 + e^{-2s\tilde{\tau}}l_1l_2 + e^{-s\tilde{\tau}}sl_1 + e^{-s\tilde{\tau}}sl_2 - \alpha)^2, \quad (26)$$

y

$$\tilde{\Delta}_4(s) = (s^2 + e^{-2s\tilde{\tau}}l_1l_2 + e^{-s\tilde{\tau}}sl_1 + e^{-s\tilde{\tau}}sl_2 - \alpha)^4, \quad (27)$$

respectivamente.

La estabilización de los predictores basados en observadores dependen de dos parámetros de diseño, la ganancia  $K$  y la matriz de ganancias  $L$ . De manera similar al predictor filtrado (9), la sintonización de la ganancia  $K$  de los predictores observadores debe realizarse tal que el sistema libre de retardo de forma (4) sea estable. De esta manera, las reglas de sintonización para la ganancia de control  $K$  asociado a los observadores predictores son las obtenidas previamente en (20).

Es importante mencionar que la velocidad de convergencia de los errores de predicción de los predictores observadores debe ser mayor a la velocidad de convergencia del sistema (4). El requerimiento anterior se satisface cuando

$$\sigma > \gamma, \quad (28)$$

donde  $\sigma$  y  $\gamma$  denotan la velocidad de convergencia de los errores de observación y del sistema (4), respectivamente, las cuales están relacionadas con la ubicación de las raíces dominantes del sistema (4) y de las ecuaciones (23), (26) y (27).

A continuación, se proveen los resultados en simulación del sistema (19) en lazo cerrado con el predictor filtrado y con los predictores observadores.

#### 6.4. Simulación

Las simulaciones numéricas se realizaron empleando el software MATLAB/Simulink ®R2018b, con el solucionador *ode4* Runge-Kutta y con un paso de integración igual a 0,001. Los parámetros del carro-péndulo son  $l = 0,32$ (m),  $m_p = 0,23$ (kg),  $m_c = 0,52$ (kg) y el retardo en la entrada es  $\tau = 0,25$ (s). La constante de gravedad es  $g = 9,81$  (m/s<sup>2</sup>). Las condiciones iniciales son  $x_1(0) = \pi/12$  (rad) y  $x_2(0) = 0$  (rad/s).

Eligiendo  $\gamma = 5$  y aplicando las reglas de sintonización dadas en (20), se obtiene que  $k_p = 13,5175$  y  $k_d = 2,4640$ . La ganancia del predictor filtrado se elige como  $G = -25$ .

En la Tabla 1 se muestran los parámetros empleados en la sintonización de las ganancias de los predictores observadores.

Tabla 1: Parámetros de sintonización para los predictores observadores.

$r$	$l_1$	$l_2$	$\sigma$
1	8	8	inestable
2	8	8	0.8331
4	8	8	6.6835

En la Figura 8 se ilustran las raíces dominantes de las ecuaciones características (23), (26) y (27), denotadas por  $r = 1$ ,  $r = 2$  y  $r = 4$ , respectivamente.

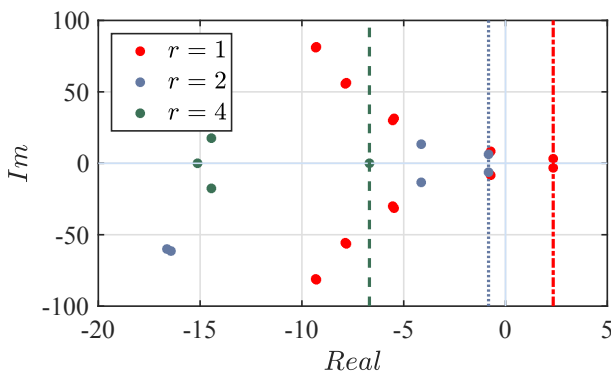


Figura 8: Raíces dominantes de las ecuaciones características (23), (26) y (27).

Note que cuando  $r = 1$ , las raíces dominantes de la ecuación (23) se ubican en el semiplano derecho del plano complejo,

por lo tanto, el sistema en lazo cerrado (19)-(21) es inestable. Cuando  $r = 2$ , las raíces dominantes de la ecuación característica (26) se ubican en  $-0,8331 - j6,2578$  del plano complejo, con lo cual la tasa de convergencia de los errores de predicción es  $\sigma = 0,8331$  y claramente no se satisface la condición requerida en (28). Al considerar  $r = 4$  las raíces dominantes de la ecuación característica (27) se ubican en  $-6,6835$  del plano complejo, por lo tanto  $\sigma > \gamma$ , con lo cual se garantiza una buena predicción del estado futuro del sistema (19). Observe que la tasa de convergencia  $\sigma$  de los errores de predicción es mayor cuando  $r > 1$  aun cuando la ganancia  $L = \text{diag}[l_1 \ l_2]$  sea la misma para todos los predictores observadores.

En las Figuras 9 y 10 se ilustran los resultados vía simulación de los sistemas en lazo cerrado (19)-(9), (19)-(24) y (19)-(25). En la Figura 9 se observa que el predictor filtrado (9) genera una respuesta sin oscilaciones, mientras que el predictor observador (cuando  $r = 2$ ) presenta una respuesta con oscilaciones, fenómeno que se reduce al emplear cuatro predictores observadores acoplados.

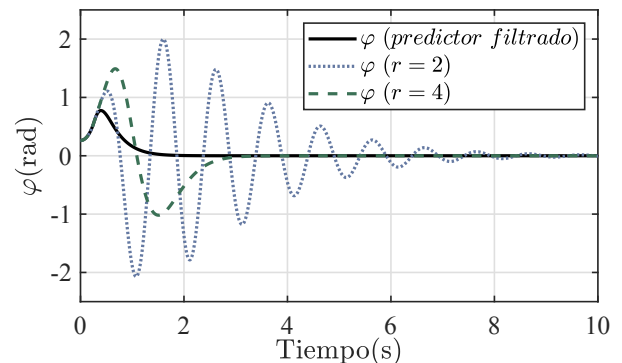


Figura 9: Posición angular  $\varphi(t)$  de los sistemas en lazo cerrado (19)-(9), (19)-(24) y (19)-(25).

La Figura 11 ilustra la norma euclidiana de los errores de predicción del predictor filtrado y del predictor observador, así como la sumatoria de las normas euclidianas de los errores de predicción  $e_i(t)$  de los sub predictores cuando  $r = 2$  y  $r = 4$ .

La Figura 12 ilustra la integral del error absoluto de los errores de predicción para el predictor filtrado y los sub predictores observadores cuando  $r = 2$  y  $r = 4$ . Cabe mencionar que el error de predicción del predictor observador cuando  $r = 4$  es menor al error de predicción del predictor observador cuando  $r = 2$ .



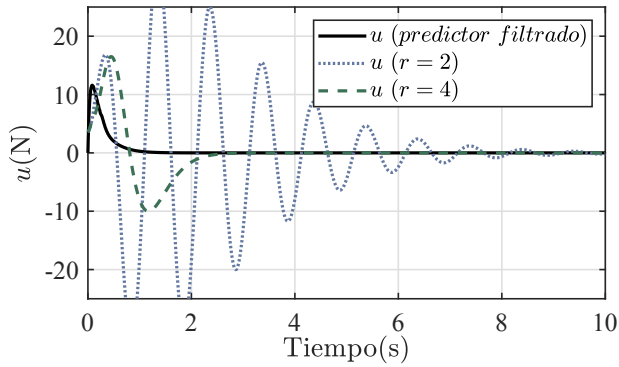


Figura 10: Acción de control (en Newtons) de los sistemas en lazo cerrado (19)-(9), (19)-(24) y (19)-(25).

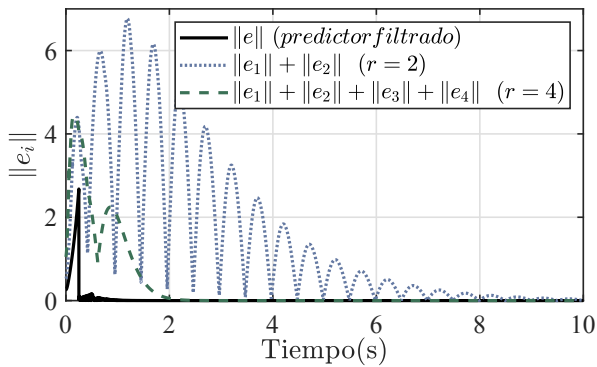


Figura 11: Norma euclidiana de los errores de predicción.

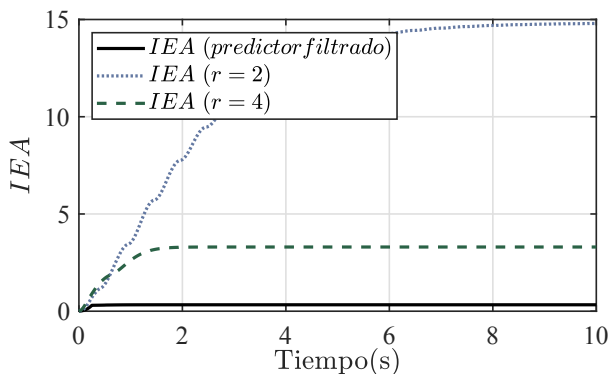


Figura 12: Integral del error absoluto de los errores de predicción.

## 7. Conclusiones

Resumiendo, el método de asignación de espectro finito consiste en emplear una predicción exacta del estado un tiempo  $\tau$  adelante mediante la fórmula de Cauchy que contiene un término integral que se debe aproximar numéricamente. La introducción de un filtrado de la ley de control hace más robusta

esta ley de control. Cabe observar que una vez calculada la predicción del estado, el método se aplica directamente sin recurrir a cálculos adicionales.

En el método de predictores observadores, la ecuación de la predicción tiene misma estructura que la ecuación de la planta de la cual se deriva, lo cual es una propiedad sumamente atractiva. Note que, si bien se mantiene la estructura inicial, la dimensión del predictor observador se incrementa en proporción al número requerido de subpredictores. Una desventaja es que requiere del diseño, en el marco de la teoría de sistemas con retardo, de la matriz de ganancia  $L$  y del número  $r$ .

El caso de planta con información parcial del estado, se puede abordar fácilmente con modificaciones simples del enfoque de predictores observadores. En cambio, en la asignación de espectro finito, se tiene que introducir un observador el estado. El lector puede encontrar aplicaciones que emplean estas técnicas en muy variados campos: por ejemplo en el control de un proceso de deshidratación de alimentos (Santos-Sánchez et al., 2019), la atenuación de vibraciones de edificios (Vite et al., 2020), la predicción del número real de infectados en epidemias (Castaños and Mondié, 2021), o el control de formaciones de robots no holonómicos (Velasco-Villa et al., 2021).

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias al apoyo del proyecto CONACYT A1-S-24796.

## Referencias

- Artstein, Z. (1982). Linear systems with delayed controls: a reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(4):869–879.
- Baker, R. C. (1963a). Título del artículo. *Nombre de la revista*, 34:184–186.
- Baker, R. C. (1963b). Título del libro. Nombre de la editorial, Lugar de publicación.
- Castaños, F. and Mondié, S. (2021). Observer-based predictor for a susceptible-infectious-recovered model with delays: an optimal-control case study. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31(11):5118–5133.
- Datko, R. (1978). A procedure for determination of the exponential stability of certain differential-difference equations. *Quarterly of Applied Mathematics*, 36(3):279–292.
- Dog, P. R. (1958). Título del capítulo. In Editor, editor, *Título del libro*, volume II, chapter 7, pages 56–98. Nombre de la editorial, Lugar de publicación.
- Estrada-Sánchez, I., Velasco-Villa, M., and Rodríguez-Cortés, H. (2017). Prediction-based control for nonlinear systems with input delay. *Mathematical Problems in Engineering*, 2017.
- García, F. J. (2007). Título del libro. Nombre de la editorial, Lugar de publicación.
- García, F. J., López, J., and Vallés, M. (2007). Título del libro. Nombre de la editorial, Lugar de publicación.
- García, F. J. and Martínez, R. (2008). Título del artículo. *Nombre de la revista*, número volumen: números de página.
- Juárez, L., Mondié, S., and Kharitonov, V. L. (2020). Dynamic predictor for systems with state and input delay: A time-domain robust stability analysis. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 30(6):2204–2218.
- Kailath, T. (1980). *Linear Systems*, volume 16. Prentice-Hall.
- Karafyllis, I. and Krstic, M. (2009). *Delay compensation for nonlinear, adaptive, and PDE Systems*, volume 16. Birkhauser.
- Karafyllis, I. and Krstic, M. (2013). *Predictor feedback for delay systems: implementations and approximations*, volume 16. Springer, Birkhauser.
- Keohane, R. (1958). Título del libro. Nombre de la editorial, Lugar de publicación.
- Kharitonov, V. L. (2014). An extension of the prediction scheme to the case of systems with both input and state delay. *Automatica*, 50(1):211–217.
- Kharitonov, V. L. (2015). Predictor-based controls: the implementation problem. *Differential Equations*, 51(13):1675–1682.

- Léchappé, V., De Léon, J., Moulay, E., Plestan, F., and Glumineau, A. (2018). Delay and state observation for SISO nonlinear systems with input delay. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 28(6):2356–2368.
- Manitius, A. (1976). Controllability, observability and stabilizability of retarded systems. In *1976 IEEE Conference on Decision and Control including the 15th Symposium on Adaptive Processes*, pages 752–758. IEEE.
- Manitius, A. and Olbrot, A. (1979). Finite spectrum assignment problem for systems with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(4):541–552.
- Mondié, S., Dambrine, M., and Santos, O. (2002). Approximation of control laws with distributed delays: a necessary condition for stability. *Kybernetika*, 38(5):541–551.
- Mondié, S. and Michiels, W. (2003). Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(12):2207–2212.
- Najafi, M., Hosseinnia, S., Sheikholeslam, F., and Karimadini, M. (2013). Closed-loop control of dead time systems via sequential sub-predictors. *International Journal of Control*, 86(4):599–609.
- Rodríguez-Guerrero, L., Kharitonov, V. L., and Mondié, S. (2016). Robust stability of dynamic predictor based control laws for input and state delay systems. *Systems & Control Letters*, 96:95–102.
- Rojas Ricca, B. J. (2021). Sintonización de un observador predictor para sistemas no lineales con retardo en la entrada. Master's thesis, CINVESTAV-IPN.
- Santos-Sánchez, O.-J., Mondié, S., Rodríguez-Guerrero, L., and Carmona-Rosas, J.-C. (2019). Delays compensation for an atmospheric sliced tomatoes dehydration process via state predictors. *Journal of the Franklin Institute*, 356(18):11473–11491.
- Smith, O. J. (1959). A controller to overcome dead time. *ISA J.*, 6:28–33.
- Tanaka, K. and Wang, H. O. (2001). *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach*. John Wiley & Sons.
- Velasco-Villa, M., Cruz-Morales, R., Rodríguez-Angeles, A., and Domínguez-Ortega, C. (2021). Observer-based time-variant spacing policy for a platoon of non-holonomic mobile robots. *Sensors*, 21(11).
- Villafuerte, R., Mondie, S., and Garrido, R. (2012). Tuning of proportional retarded controllers: theory and experiments. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 21(3):983–990.
- Villafuerte-Segura, R., Medina-Dorantes, F., Vite-Hernández, L., and Aguirre-Hernández, B. (2019). Tuning of a time-delayed controller for a general class of second-order linear time invariant systems with dead-time. *IET Control Theory & Applications*, 13(3):451–457.
- Vite, L., Gomez, M. A., Morales, J., and Mondié, S. (2020). A new control scheme for time-delay compensation for structural vibration. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2):4804–4809. 21st IFAC World Congress.
- Zhou, B., Lin, Z., and Duan, G.-R. (2012). Truncated predictor feedback for linear systems with long time-varying input delays. *Automatica*, 48(10):2387–2399.