

Modos cuasi normales para un agujero negro Schwarzschild de Sitter rodeado de quintaesencia: Método de Iteración Asintótica

Quasi-normal modes for a Schwarzschild de Sitter black hole surrounded by quintessence: Asymptotic Iteration Method

Miriam Jiménez , Omar Pedraza , L. A. López 

Área Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México.

Resumen

En este trabajo se calculan las frecuencias de los modos cuasi normales para un agujero negro de Schwarzschild de Sitter rodeado de quintaesencia para perturbaciones escalares usando el Método de Iteración Asintótica. De los resultados obtenidos, se puede analizar el comportamiento de los modos cuasi normales como función de la constante cosmológica Λ y el parámetro de quintaesencia c . Adicionalmente se estudia también la región de parámetros en la que se puede tener uno o dos horizontes.

Palabras Clave: Modos cuasi normales, Método de Iteración Asintótica, Quintaesencia.

Abstract

In this work, the frequencies of the quasi-normal modes are calculated for a Schwarzschild de Sitter black hole surrounded by quintessence for scalar perturbations using the Asymptotic Iteration Method. From the results obtained, the behavior of quasi-normal modes can be analyzed as a function of the cosmological constant Λ and the quintessence parameter c . Additionally, the parameters region in which one can have one or two horizons is also studied.

Keywords: Quasi-normal modes, Asymptotic Iteration Method, Quintessence

1. Introducción

El problema de eigenvalores juega un papel muy importante en el campo de la física matemática, por ejemplo, en mecánica cuántica la solución a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en una dimensión esta dada por

$$\frac{d^2\Phi(r)}{dr^2} + V(r)\Phi(r) = E\Phi(r), \quad (1)$$

donde $V(r)$ es el potencial, E la energía (eigenvalor) y $\Phi(r)$ la función de onda (eigenfunción). La ecuación (1) tiene soluciones exactas para ciertos potenciales, como: el oscilador armónico, el átomo de Hidrógeno, partícula en una caja, etc., pero en muchos casos se requieren del uso de métodos aproximados para hallar su solución.

En relatividad general, el estudio de los modos cuasi normales para un agujero negro, también requiere de encontrar soluciones a una ecuación de la forma dada por (1). Particularmen-

te, para el agujero negro de Schwarzschild se han empleado el método en series de Frobenius y el de fracciones continuas, al cual se le suele llamar Método de fracción continua como se muestra en el trabajo realizado por Leaver (1985), mientras que para otros tipos de agujeros negros (un poco más complejos) se requiere de cálculo numérico para su solución, en el cual se selecciona un valor complejo para la frecuencia al integrar directamente la ecuación diferencial y comprobar que las condiciones de frontera sean satisfechas.

Históricamente, otra técnica empleada para el cálculo de los modos cuasi normales es el método WKB (nombrado en honor de los físicos Gregor Wentzel, Hendrik Kramers y Léon Brillouin, para una mayor referencia el lector puede consultar el trabajo de Iyer (1987)), la cual aunque se basa en ciertas aproximaciones, sigue siendo una técnica muy poderosa y en muchas ocasiones la aproximación es muy precisa y además puede ser llevada a órdenes de aproximación más altos (en el caso ge-

* Autor para correspondencia: ji318307@uaeh.edu.mx.

Correo electrónico: ji318307@uaeh.edu.mx (Miriam Jiménez-Camargo), omarp@uaeh.edu.mx (Omar Pedraza-Ortega), lalopez@uaeh.edu.mx (Luis Alberto López-Suárez).

neral, el cálculo se realiza a sexto orden), tanto para mejorar la precisión o para estimar los errores. A pesar de contar con diversos métodos para hallar soluciones a ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden, como se mencionaron anteriormente, es importante recordar también que en algunos casos, estos enfoques presentan algunas limitaciones.

En esta dirección, el Método de Iteración Asintótica mejorado propuesto por Ciftci et al. (2003) para obtener los eigenvalores y eigenfunciones de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden, es más eficiente en algunos casos. Particularmente, en el trabajo desarrollado por Cho et al. (2012) se ha mostrado que este método puede ser una técnica eficiente y precisa en el cálculo de las frecuencias de los modos cuasi normales para una gran variedad de agujeros negros, como por ejemplo, Schwarzschild, Schwarzschild anti de Sitter o de Sitter, Reissner-Nordström, Kerr, entre otros.

Por otra parte, las observaciones astronómica actuales realizadas por Perlmutter et al. (1999), muestran que el universo se está expandiendo a un ritmo acelerado. Se cree que esta expansión se debe a una presión negativa sustancial. Hay dos fuentes de presión negativa, una es la constante cosmológica que actúa como una fuerza repulsiva contra la gravedad y la otra es la llamada *quintaesencia* cuya ecuación de estado vincula a la presión p con la densidad de energía ρ de la siguiente forma $p = \omega_q \rho$, donde el parámetro ω_q de la ecuación de estado debe de estar en el rango $-1 \leq \omega_q \leq -1/3$ para asegurar la aceleración en el universo. El caso $\omega_q = -1$ corresponde a la constante cosmológica. La solución de un agujero negro envuelto por materia de quintaesencia fue discutida por Kiselev (2003).

Ligando las ideas presentadas anteriormente, en este trabajo se estudian los modos cuasi normales de un agujero negro de Schwarzschild de Sitter rodeado de quintaesencia aplicando el Método de Iteración Asintótica.

La estructura de este trabajo esta organizado de la siguiente forma: En las secciones 2 y 3 se realiza una breve descripción del Método de Iteración Asintótica, mientras que en la sección 4 se presenta la definición de los modos cuasi normales como soluciones a un problema de eigenvalores. En la sección 5, se describe el agujero negro de Schwarzschild de Sitter rodeado de quintaesencia y se analizan también los horizontes de eventos. Luego en la sección 6 se calculan las frecuencias de los modos cuasi normales empleando el Método de Iteración Asintótica. Finalmente, las conclusiones son presentadas en la última sección.

2. Método de Iteración Asintótica

En esta sección se muestra brevemente la estructura del Método de Iteración Asintótica presentado por Ciftci et al. (2003). El punto de partida es la ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden

$$\frac{d^2\chi(x)}{dx^2} = \lambda_0(x)\frac{d\chi(x)}{dx} + s_0(x)\chi(x), \quad (2)$$

donde $\lambda_0(x)$ y $s_0(x)$ son funciones $C_\infty(a, b)$. Para hallar una solución a esta ecuación, se aprovecha la estructura simétrica del lado derecho. Derivando (2) respecto de x , se tiene

$$\frac{d^3\chi(x)}{dx^3} = \lambda_1(x)\frac{d\chi(x)}{dx} + s_1(x)\chi(x), \quad (3)$$

con

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) &= \frac{d\lambda_0(x)}{dx} + s_0(x) + [\lambda_0(x)]^2, \\ s_1(x) &= \frac{ds_0(x)}{dx} + s_0(x)\lambda_0(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Tomando nuevamente la segunda derivada a (2), se obtiene

$$\frac{d^4\chi(x)}{dx^4} = \lambda_2(x)\frac{d\chi(x)}{dx} + s_2(x)\chi(x), \quad (5)$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda_2(x) &= \frac{d\lambda_1(x)}{dx} + s_1(x) + \lambda_0(x)\lambda_1(x), \\ s_2(x) &= \frac{ds_1(x)}{dx} + s_0(x)\lambda_1(x). \end{aligned} \quad (6)$$

Así, para la derivada de orden $n + 1$ y de orden $n + 2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), se pueden obtener las siguientes expresiones

$$\chi^{(n+1)}(x) = \lambda_{n-1}(x)\chi'(x) + s_{n-1}(x)\chi(x), \quad (7)$$

$$\chi^{(n+2)}(x) = \lambda_n(x)\chi'(x) + s_n(x)\chi(x), \quad (8)$$

donde $\lambda_n(x)$ y $s_n(x)$ se definen como

$$\lambda_n(x) = \lambda'_{n-1}(x) + s_{n-1}(x) + \lambda_0(x)\lambda_{n-1}, \quad (9)$$

$$s_n(x) = s'_{n-1}(x) + s_0(x)\lambda_{n-1}(x), \quad (10)$$

aquí, la tilde ' y los super índices indican derivada respecto de x . Tomando el cociente de (7) y (8)

$$\frac{d}{dx} \ln(\chi^{n+1}) = \frac{\chi^{n+2}}{\chi^{n+1}} = \frac{\lambda_n \left(\chi' + \frac{s_n}{\lambda_n} \right)}{\lambda_{n-1} \left(\chi' + \frac{s_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \right)}. \quad (11)$$

Para una n suficientemente grande, el aspecto asintótico del método establece que

$$\frac{s_n}{\lambda_n} = \frac{s_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \equiv \alpha(x). \quad (12)$$

Esta expresión puede reescribirse como

$$s_n\lambda_{n-1} - s_{n-1}\lambda_n = 0, \quad (13)$$

la cual es una condición para obtener los eigenvalores λ . De la definición dada por (12), la ecuación (11), puede escribirse como

$$\frac{d}{dx} \ln(\chi^{n+1}) = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}. \quad (14)$$

Cuya solución es

$$\chi^{n+1}(x) = C_1 \exp \left[\int^x \frac{\lambda_n(t)}{\lambda_{n-1}(t)} dt \right]. \quad (15)$$

Siendo C_1 una constante de integración. Usando nuevamente (12) y (9) en (15), se puede expresar a $\chi^{n+1}(x)$ como

$$\chi^{n+1}(x) = C_1 \lambda_{n-1}(x) \exp \left[\int^x \{ \alpha(t) + \lambda_0(t) \} dt \right]. \quad (16)$$

Ahora, sustituyendo (16) en (7) se obtiene la siguiente ecuación

$$\chi'(x) + \alpha(x)\chi(x) = C_1 \lambda_{n-1}(x) \exp \left[\int^x \{ \alpha(t) + \lambda_0(t) \} dt \right], \quad (17)$$

la cual tiene como solución a

$$\chi(x) = \exp\left[-\int^x \alpha(t) dt\right] \{C_2 + C_1 \int^x \exp\left(\int^\tau [\lambda_0(t) + 2\alpha(t)] dt\right) d\tau\}. \quad (18)$$

Donde nuevamente C_2 es una constante. Las constantes de integración C_1 y C_2 pueden ser determinadas aplicando las condiciones de frontera correspondientes.

3. Método de Iteración Asintótica mejorado

Como se muestra en el trabajo de Ciftci et al. (2005), una característica poco atractiva de las relaciones de recursión (9) y (10), es que al realizar cada iteración, se debe tomar la derivada de los términos $s(x)$ y $\lambda(x)$ de la iteración anterior. Esto puede realentizar considerablemente la implementación numérica del Método de Iteración Asintótica, lo cual puede provocar problemas con la precisión numérica. Para solventar esta problemática, se desarrolló una versión mejorada de esta técnica, que evita la necesidad de tomar derivadas en cada paso, por lo que mejora significativamente la precisión, así como también la velocidad del método.

El punto de partida de este método mejorado consiste en tomar la serie de Taylor de $\lambda_n(x)$ y $s_n(x)$ alrededor del punto en el que se implementa el método, de esta forma se tiene

$$\lambda_n(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} c_n^i (x - \xi)^i, \quad (19)$$

$$s_n(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} d_n^i (x - \xi)^i, \quad (20)$$

donde c_n^i y d_n^i son los respectivos coeficientes de Taylor de las funciones $\lambda_n(\xi)$ y $s_n(\xi)$. Substituyendo (19) y (20) en las expresiones (9) y (10), se obtienen las siguientes relaciones de recurrencia

$$c_n^i = (i + 1)c_{n-1}^{i+1} + d_{n-1}^i + \sum_{j=0}^i c_0^j c_{n-1}^{i-j}, \quad (21)$$

$$d_n^i = (i + 1)d_{n-1}^{i+1} + \sum_{j=0}^i d_0^j c_{n-1}^{i-j}. \quad (22)$$

Introduciendo estas expresiones en (13), esta se puede reformular de la siguiente manera

$$d_n^0 c_{n-1}^0 - d_{n-1}^0 c_n^0 = 0. \quad (23)$$

Esta condición proporciona una relación de recurrencia para obtener los correspondientes eigenvalores y a diferencia de (13), no requiere de tomar derivadas, lo cual por supuesto permite agilizar el cálculo numérico.

Cabe mencionar que el lado derecho de (21) y (22) contiene términos de orden $n - 1$, entonces se puede emplear estas ecuaciones sucesivamente hasta que solo se consideren los términos c_0^i y d_0^i , sin embargo, debido a la gran cantidad de términos, realizar un gran número de iteraciones pueden ser poco práctico de calcular. Para evitar este problema, se inicia con $n = 0$ y entonces se calculan los coeficientes $n + 1$ secuencialmente hasta el

número deseado de recursiones. Por otra parte, como la condición (23) solo involucra el término $i = 0$, en cada iteración n , entonces solo se necesita determinar coeficientes con $i < N - n$, donde N es el número máximo de iteraciones a realizar.

4. Problema de eigenvalores: Modos cuasi normales

Cuando se perturba un agujero negro, el comportamiento resultante se puede describir en tres etapas. La primera etapa corresponde a la radiación debida a las condiciones iniciales de la perturbación. La segunda etapa corresponde a oscilaciones amortiguadas con frecuencias complejas, los modos de dichas oscilaciones se denominan modos cuasi normales. La tercera etapa en general corresponde a una ley de potencia de decaimiento de los campos.

El estudio de las frecuencias de los modos cuasi normales para agujeros negros pueden ser un indicativo tanto de los parámetros del agujero negro como del tipo de emisiones posibles.

Si el agujero negro posee simetría radial, el problema de eigenvalores para los modos cuasi normales tienen una forma similar a la ecuación de Schrödinger (1) unidimensional con un potencial efectivo, como la siguiente

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + [\omega^2 - V(r)] \psi(x) = 0, \quad (24)$$

donde $\omega = \omega_r + i\omega_i$, con ω_r la frecuencia de oscilación del agujero negro, la cual es siempre positiva, mientras que ω_i esta asociada a la estabilidad del agujero negro (el lector puede consultar el trabajo de Berti et al. (2009) para más detalles). En el caso en el que $\omega_i < 0$, se tiene una oscilación amortiguada, debido a que $\psi(x, t) \sim e^{i\omega t}$ decrece conforme el tiempo avanza y eventualmente tiende a cero para tiempos muy grandes, por lo que la oscilación del agujero negro cesara, este comportamiento describe una solución estable.

La coordenada tortuga x se define como

$$\frac{dx}{dr} = \frac{1}{f(r)}, \quad (25)$$

con $f(r)$ es la función métrica asociada al agujero negro. Si las perturbaciones son escalares y masivas, el potencial $V(r)$ se expresa como

$$V(r) = f(r) \left[\frac{l(l + 1)}{r^2} + \frac{f'(r)}{r} + \mu^2 \right], \quad (26)$$

donde μ la masa del campo escalar y l es el índice del armónico esférico.

Los modos cuasi normales se definen como soluciones de (24) sujeto a las condiciones de frontera

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-i\omega x}, & x \rightarrow -\infty, \\ e^{i\omega x}, & x \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (27)$$

para una dependencia temporal $e^{-i\omega t}$. Los modos que satisfacen las condiciones de frontera pueden considerarse como la huela digital del agujero negro como fue mostrado en el trabajo realizado por Konoplya and Zhidenko (2011).

5. Agujero negro de Schwarzschild de Sitter rodeado de quintaesencia

El elemento de línea de un espacio-tiempo de Schwarzschild de Sitter con simetría esférica en coordenadas esféricas, se puede escribir como

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2, \quad (28)$$

donde la función métrica se define como

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}, \quad (29)$$

con M es la masa y Λ la constante cosmológica (con $\Lambda > 0$). Esta solución fue propuesta por primera vez por Kottler (1918), en la cual la constante cosmológica Λ puede ser positiva o negativa y en tal caso, dicha solución es conocida como *Schwarzschild de Sitter* ($\Lambda > 0$) o *anti de Sitter* ($\Lambda < 0$).

Recientemente, en el trabajo de investigación de Kiselev (2003) respecto a la quintaesencia y agujeros negros, se propuso una nueva solución para un espacio-tiempo con simetrías esféricas y estática, donde se considera que el tensor de energía-momento para la quintaesencia debe de satisfacer

$$T_\phi^\phi = T_\theta^\theta = -\frac{1}{2}\rho(3\omega_q + 1), \quad T_r^r = T_t^t = \rho, \quad (30)$$

con ω_q es una constante, además se tiene que la condición de energía dominante requiere que $\rho_0 = T_{tt} \geq 0$ (con ρ_0 la densidad de energía). La idea de Kiselev permite obtener la función métrica de un agujero negro rodeado de quintaesencia al añadir el término de quintaesencia $-c/r^{3\omega_q+1}$ a la métrica del agujero negro. De esta forma, se puede expresar a la métrica de Schwarzschild de Sitter rodeado de quintaesencia como

$$f_\omega(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} - \frac{c}{r^{3\omega_q+1}}, \quad (31)$$

donde c es un factor de normalización y ω_q debe de satisfacer $-1 < \omega_q < -1/3$. Particularmente, en este trabajo, la atención se centra en el caso especial de $\omega_q = -2/3$, el cual permite un tratamiento simple de las propiedades del agujero negro de Schwarzschild de Sitter rodeado de quintaesencia.

Si $\omega_q = -2/3$, entonces (31) se puede expresar como

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} - cr. \quad (32)$$

Antes de proceder al estudio referente a los modos cuasi normales, es importante determinar el rango de valores que deben de tomar los parámetros que describen el agujero negro, para así poder determinar cuantos horizontes posee el agujero negro o bien si estos no existen (en tal caso no se tiene una solución de agujero negro). Para esto, es conveniente expresar r , c y Λ en unidades de M , es decir, $r \rightarrow r/M$, $c \rightarrow cM$ y $\Lambda \rightarrow \Lambda M^2$, por lo tanto la función métrica (32), se escribe como

$$f(r) = 1 - \frac{2}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} - cr. \quad (33)$$

Los horizontes se definen como las raíces positivas de la función métrica dada por (33), la cual se puede escribir como un

polinomio de tercer orden. Este polinomio posee dos raíces positivas r_1 y r_2 (con $r_1 < r_2$) y una negativa r_0 , donde r_1 corresponde al horizonte de eventos, mientras que r_2 a un horizonte aparente.

Entonces, aplicando la idea desarrollada por Rizwan et al. (2018) se estudia el caso extremo, es decir, este se define cuando se satisfacen las siguientes restricciones $f(r) = 0$ y $\frac{df(r)}{dr} = 0$ simultáneamente y es cuando dos o más horizontes colapsan. De la condición $f(r) = 0$, se parametriza a Λ como una función r y c , lo cual implica

$$\Lambda(r, c) = \frac{3(-2 + r - cr^2)}{r^3}. \quad (34)$$

Luego, este valor obtenido de $\Lambda(r, c)$ se sustituye en la condición $\frac{df(r)}{dr} = 0$, lo cual conlleva a

$$cr^2 - 2r + 6 = 0. \quad (35)$$

Esta ecuación posee dos raíces r_+ y r_-

$$r_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 6c}}{c}, \quad (36)$$

sin embargo, para el agujero negro de Schwarzschild de Sitter rodeado de quintaesencia, únicamente r_- tiene relevancia física. Por lo tanto, se puede parametrizar a Λ como función únicamente del parámetro de quintaesencia c al sustituir r_- en (34), obteniendo

$$\Lambda(c) = \frac{3c^2(\sqrt{1 - 6c} - 1 + 4c)}{(\sqrt{1 - 6c} - 1)^3}. \quad (37)$$

La Figura 1, muestra el comportamiento de Λ como función de c . En esta gráfica la curva (37) delimita a las regiones I y II.

Si se consideran puntos (c, Λ) correspondientes a la región II en (33), el agujero negro tiene dos horizontes, r_1 y r_2 , con r_1 el horizonte de eventos y r_2 un horizonte aparente. Para puntos (c, Λ) correspondientes a la frontera de las regiones I y II, los horizontes r_1 y r_2 se unen en un solo horizonte de eventos y para valores de c y Λ correspondientes a la región I, no se tiene un agujero negro ($f(r) \neq 0$).

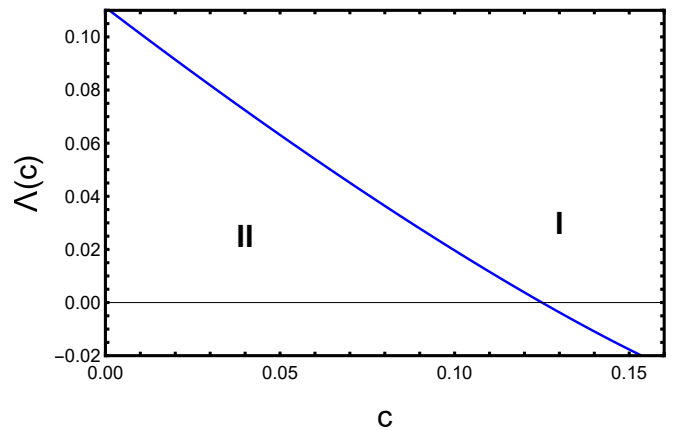


Figura 1: La figura muestra el comportamiento de Λ como función de c . La región II esta delimitada por la curva (37) y por $\Lambda = 0$, mientras que la región I, se encuentra por encima de la curva (37).

Otra propiedad que resulta útil definir, es la gravedad superficial

$$\kappa_1 = \left. \frac{1}{2} \frac{df}{dr} \right|_{r \rightarrow r_1}. \quad (38)$$

En este trabajo se emplearan valores de los parámetros Λ y c pertenecientes a la región II, es decir, el agujero negro tendrá dos horizontes.

6. Modos cuasi normales para un agujero negro Schwarzschild de Sitter rodeado de quintaesencia

Para poder calcular los modos cuasi normales para el agujero negro (28), se aplicara el Método de Iteración Asintótica descrito en la sección 3. Para implementar este método, es conveniente primero realizar el siguiente cambio de variable

$$\xi = \frac{1}{r}. \quad (39)$$

Con este cambio, la función métrica se expresa como

$$f(\xi) = \frac{p(\xi)}{\xi^2}, \quad \text{con} \quad p(\xi) = \xi^2 - 2M\xi^3 - \frac{\Lambda}{3} - c\xi. \quad (40)$$

Con ayuda de las expresiones (39) y (40), el potencial (26), se puede reescribir en términos de la variable ξ , como

$$V(\xi) = p \left[l(l+1) + \frac{2M\xi^3 - c\xi - \frac{2\Lambda}{3} + \mu^2}{\xi^2} \right]. \quad (41)$$

Introduciendo el potencial (41) en (24) y aplicando (39), se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{p'}{p} \frac{d\psi}{d\xi} + \left\{ \frac{\omega^2}{p^2} - \frac{l(l+1)}{p} + \frac{2M\xi^3 - c\xi - \frac{2\Lambda}{3} + \mu^2}{\xi^2 p} \right\} \psi = 0, \quad (42)$$

donde $p' = 2\xi - 6M\xi^2 - c$ (aquí la prima significa derivar a p respecto a ξ).

Para continuar con el análisis, es necesario expresar a la coordenada tortuga x , en términos de la coordenada ξ , para ello se emplea (25) y (39), obteniendo así

$$x = - \int \frac{d\xi}{\xi^2 f(\xi)} = - \int \frac{d\xi}{p(\xi)} = \frac{\ln(\xi - \xi_0)}{2M(\xi_0 - \xi_1)(\xi_0 - \xi_2)} + \frac{\ln(\xi - \xi_1)}{2M(\xi_1 - \xi_0)(\xi_1 - \xi_2)} + \frac{\ln(\xi - \xi_2)}{2M(\xi_2 - \xi_0)(\xi_2 - \xi_1)}, \quad (43)$$

donde ξ_0, ξ_1 y ξ_2 son las raíces de $p(\xi)$. De la relación entre p y f dada por (40), se puede determinar que $\xi_0 < \xi_2 < \xi_1$, con $\xi_0 = 1/r_0, \xi_1 = 1/r_1$ y $\xi_2 = 1/r_2$.

Por otra parte, si se calcula la gravedad superficial definida por (38), para cada valor de ξ_0, ξ_1 y ξ_2 , se obtiene entonces las siguientes expresiones

$$\kappa_0 = - \left. \frac{\xi^2 df}{2 d\xi} \right|_{\xi_0} = M(\xi_0 - \xi_1)(\xi_0 - \xi_2), \quad (44)$$

$$\kappa_1 = - \left. \frac{\xi^2 df}{2 d\xi} \right|_{\xi_1} = M(\xi_1 - \xi_0)(\xi_1 - \xi_2), \quad (45)$$

$$\kappa_2 = - \left. \frac{\xi^2 df}{2 d\xi} \right|_{\xi_2} = M(\xi_2 - \xi_0)(\xi_2 - \xi_1). \quad (46)$$

Las ecuaciones anteriores permiten expresar a la coordenada tortuga x en términos de ξ , de la siguiente forma

$$x = \ln(\xi - \xi_0)^{\frac{1}{2\kappa_0}} + \ln(\xi - \xi_1)^{\frac{1}{2\kappa_1}} + \ln(\xi - \xi_2)^{\frac{1}{2\kappa_2}}. \quad (47)$$

Esto permite formular a las condiciones de frontera (27) en términos de la variable ξ , por tanto, para la condición de frontera de onda saliente

$$\psi \rightarrow e^{i\omega x} = (\xi - \xi_0)^{\frac{i\omega}{2\kappa_0}} (\xi - \xi_1)^{\frac{i\omega}{2\kappa_1}} (\xi - \xi_2)^{\frac{i\omega}{2\kappa_2}}, \quad (48)$$

cuando $(x, r) \rightarrow \infty$ ($\xi \rightarrow 0$). La expresión anterior es útil, debido a que permite elegir el comportamiento del escalamiento apropiado para las condiciones de frontera de los modos cuasi normales.

Por lo tanto, la elección apropiada para escalar el comportamiento divergente en el horizonte aparente generado por la quintaesencia puede expresarse como

$$\psi(\xi) = e^{i\omega x} u(\xi). \quad (49)$$

Esta redefinición de $\psi(\xi)$ en términos de $u(\xi)$, permite escribir a (42) como

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \left(\frac{p' - 2i\omega}{p} \right) \frac{du}{d\xi} - \frac{l(l+1)\xi^2 + 2M\xi^3 - c\xi - \frac{2\Lambda}{3} + \mu^2}{\xi^2 p} u = 0. \quad (50)$$

Considerando ahora la condición de frontera de onda entrante en el horizonte de eventos, se tiene

$$\psi \rightarrow e^{-i\omega x} = (\xi - \xi_0)^{-\frac{i\omega}{2\kappa_0}} (\xi - \xi_1)^{-\frac{i\omega}{2\kappa_1}} (\xi - \xi_2)^{-\frac{i\omega}{2\kappa_2}}, \quad (51)$$

cuando $x \rightarrow -\infty$ ($r \rightarrow r_1$ y $\xi \rightarrow \xi_1 = 1/r_1$). Entonces al considerar únicamente el término dominante en el horizonte de eventos ξ_1 , el escalamiento adecuado se puede formular como sigue

$$u(\xi) = (\xi - \xi_1)^{-\frac{i\omega}{2\kappa_1}} \chi(\xi). \quad (52)$$

Nuevamente, introduciendo (52) en (50) se obtiene la forma estándar de la ecuación diferencial del método de iteración asintótica

$$\frac{d^2 \chi(\xi)}{d\xi^2} = \lambda_0(\xi) \frac{d\chi(\xi)}{d\xi} + s_0(\xi) \chi(\xi), \quad (53)$$

donde

$$\lambda_0(\xi) = \frac{2i\omega}{\kappa_1(\xi - \xi_1)} - \frac{p' - 2i\omega}{p}, \quad (54)$$

$$s_0(\xi) = \frac{l(l+1)\xi^2 + 2M\xi^3 - c\xi - \frac{2\Lambda}{3} + \mu^2}{\xi^2 p} - \frac{i\omega(i\omega + \kappa_1)}{\kappa_1^2(\xi - \xi_1)^2} + \frac{i\omega(p' - 2i\omega)}{\kappa_1 p(\xi - \xi_1)}. \quad (55)$$

A continuación se toman los desarrollos de Taylor de las funciones $\lambda_0(\xi)$ y $s_0(\xi)$ alrededor de un punto $\xi = \hat{\xi}$ y sus coeficientes se introducen en (23), de esta forma se obtiene una ecuación algebraica para las frecuencias ω , la cual se puede resolver de forma numérica, por supuesto, para una elección adecuada de n . Para realizar todos estos cálculos numéricos se empleo el software Mathematica.

Cabe mencionar que la elección de $\hat{\xi}$ no debería marcar ninguna diferencia en el calculo de ω , sin embargo, en la práctica hay pequeñas variaciones al cambiar el valor $\hat{\xi}$, no obstante, si

$\hat{\xi}$ corresponde al valor donde el potencial alcanza su máximo valor, entonces se obtienen mejores resultados para ω .

En las Tablas 1 y 2 se presentan los resultados obtenidos de los modos cuasi normales para diferentes valores del parámetro de quintaesencia c y de la constante cosmológica Λ . Estos valores muestran que si c y Λ se incrementan, la parte real de las frecuencias de los modos cuasi normales disminuyen y la parte imaginaria de las frecuencias de los modos cuasi normales aumenta. Dado que la parte real representa la frecuencia de oscilación se puede mencionar que la presencia de quintaesencia suprime la oscilación del agujero negro y su amortiguamiento aumenta con forme aumenta la presencia de quintaesencia (incrementando el valor de c).

Por otra parte, si el valor de la masa μ se incrementa la parte real e imaginaria de las frecuencias de los modos cuasi normales aumentan, como se puede apreciar en la Tabla 3. El sistema se vuelve mas estable al considerar el aumento de la masa del campo.

Tabla 1: Frecuencias de los modos cuasi normales para un agujero negro de Schwarzschild de Sitter rodeado de quintaesencia, para $\Lambda = 0,01$ y $\mu = 0,4$.

c ($l = 3$)	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
0.02	0.6108-0.0734i	0.5941-0.2233i	0.3364-0.2621i
0.04	0.5356-0.0623i	0.5234-0.1884i	0.2964-0.2957i
0.06	0.4510-0.0505i	0.4433-0.1523i	0.4270-0.2565i
0.08	0.3505-0.0377i	0.3467-0.1134i	0.3389-0.1895i
0.1	0.2124-0.0219i	0.2116-0.0658i	0.2099-0.1097i
c ($l = 4$)	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
0.02	0.7681-0.0759i	0.7569-0.2293i	0.3359-0.3300i
0.04	0.6730-0.0642i	0.6646-0.1936i	0.6480-0.3261i
0.06	0.5662-0.0519i	0.5606-0.1563i	0.5495-0.2621i
0.08	0.4394-0.0385i	0.4365-0.1157i	0.4307-0.1933i
0.1	0.2659-0.0221i	0.2652-0.0664i	0.2638-0.1107i

Tabla 2: Valores de los modos cuasi normales para un agujero negro de Schwarzschild de Sitter rodeado de quintaesencia, para $c = 0,01$ y $\mu = 0,4$.

Λ ($l = 3$)	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
0.02	0.6084-0.0754i	0.5937-0.2283i	0.3518-0.3424i
0.04	0.5263-0.0670i	0.5183-0.2016i	0.5009-0.3379i
0.06	0.4301-0.0561i	0.4264-0.1684i	0.4186-0.2807i
0.08	0.3072-0.0408i	0.3060-0.1226i	0.3036-0.2043i
Λ ($l = 4$)	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
0.02	0.7658-0.0776i	0.7558-0.2339i	0.7358-0.3941i
0.04	0.6633-0.0683i	0.6574-0.2053i	0.6454-0.3435i
0.06	0.5428-0.0567i	0.5399-0.1702i	0.5340-0.2839i
0.08	0.3883-0.0410i	0.3874-0.1231i	0.3854-0.2053i

Tabla 3: Comportamiento de los modos cuasi normales para un agujero negro de Schwarzschild de Sitter rodeado de quintaesencia, para $c = 0,01$ y $\Lambda = 0,01$.

μ ($l = 3$)	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
0.2	0.6187-0.0845i	0.6055-0.2559i	0.1639-0.2625i
0.4	0.6459-0.0789i	0.6270-0.2404i	0.3577-0.2462i
0.6	0.6918-0.0696i	0.6641-0.2130i	0.5391-0.2228i
μ ($l = 4$)	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
0.2	0.7912-0.0850i	0.7813-0.2564i	0.1651-0.3292i
0.4	0.8125-0.0816i	0.7999-0.2467i	0.3601-0.3133i
0.6	0.8482-0.0759i	0.8314-0.2302i	0.5423-0.2919i

7. Conclusiones

En este trabajo se han calculado los modos cuasi normales para un campo escalar masivo en un agujero negro de Schwarzschild de Sitter rodeado de quintaesencia, empleando el Método de Iteración Asintótica, el cual es un método semi analítico que permite resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden de forma numérica. Esta técnica puede ser también muy útil para resolver la ecuación en otros campos de la física.

Sin embargo, es importante mencionar que un factor fundamental para la implementación del Método de Iteración Asintótica, es factorizar adecuadamente el comportamiento asintótico en los horizontes e infinito, tal como se muestra en (49) y (52).

Para el análisis de los modos cuasi normales fue necesario, determinar la región de valores de los parámetros, para los cuales se tienen uno o dos horizontes. Particularmente se consideró la región donde el agujero negro tiene dos horizontes.

De los resultados obtenidos de las frecuencias de los modos cuasi normales, se encontró que la parte imaginaria de dichas frecuencias aumentan cuando los parámetros de masa μ , de la constante cosmológica Λ y del parámetro de quintaesencia c se incrementan, esto implica que las perturbaciones escalares masivas son estables, es decir, el parámetro de masa del campo conduce a que el tiempo de amortiguamiento sea menor, esto implica que las frecuencias de las perturbaciones de campos escalares masivos sean difíciles de detectar.

Aunque los resultados mostrados en las Tablas 1-3, son únicamente para los modos $n = 1, 2$ y 3 , $l = 3$ y 4 , el Método de Iteración Asintótica es lo suficientemente robusto y puede ser aplicado para otro tipo de valores de n y l .

Agradecimientos

Los autores agradecen la invitación a participar en este número especial por el XX aniversario de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la UAEH y se unen a las felicitaciones por su aniversario.

Este trabajo ha sido realizado parcialmente gracias al apoyo de PROMEP, proyecto UAEH-CA-108 y al SNI-CONACYT, Mexico.

Referencias

Berti, E., Cardoso, V., and Starinets, A. O. (2009). Quasinormal modes of black holes and black branes. *26*(16):163001.

Cho, H. T., Cornell, A. S., Doukas, J., Huang, T. R., and Naylor, W. (2012). A New Approach to Black Hole Quasinormal Modes: A Review of the Asymptotic Iteration Method. *Adv. Math. Phys.*, 2012:281705.

Ciftci, H., Hall, R. L., and Saad, N. (2003). Asymptotic iteration method for eigenvalue problems. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 36(47):11807–11816.

Ciftci, H., Hall, R. L., and Saad, N. (2005). Perturbation theory in a framework of iteration methods. *Phys. Lett. A*, 340(5):388–396.

Iyer, S. (1987). Black hole normal modes: A WKB approach. II. Schwarzschild black holes. *Phys. Rev. D*, 35:3632.

Kiselev, V. (2003). Quintessence and black holes. *Class. Quant. Grav.*, 20:1187–1198.

Konoplya, R. A. and Zhidenko, A. (2011). Quasinormal modes of black holes: From astrophysics to string theory. *Rev. Mod. Phys.*, 83:793–836.

Kottler, F. (1918). Über die physikalischen grundlagen der einsteinschen gravitationstheorie. *Annalen der Physik*, 361(14):401–462.

- Leaver, E. W. (1985). An analytic representation for the quasi-normal modes of kerr black holes. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 402(1823):285–298.
- Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber, G., Knop, R. A., Nugent, P., Castro, P. G., Deustua, S., Fabbro, S., Goobar, A., Groom, D. E., Hook, I. M., Kim, A. G., Kim, M. Y., Lee, J. C., Nunes, N. J., Pain, R., Pennypacker, C. R., Quimby, R., Lidman, C., Ellis, R. S., Irwin, M., McMahon, R. G., Ruiz-Lapuente, P., Walton, N., Schaefer, B., Boyle, B. J., Filippenko, A. V., Matheson, T., Fruchter, A. S., Panagia, N., Newberg, H. J. M., Couch, W. J., and Project, T. S. C. (1999). Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *ApJ*, 517(2):565–586.
- Rizwan, M., Jamil, M., and Wang, A. (2018). Distinguishing a rotating kiselev black hole from a naked singularity using the spin precession of a test gyroscope. *Phys. Rev. D*, 98:024015.