

## Una nota sobre la estabilidad robusta en la ecuación de calor en una esfera radialmente simétrica

### A note on the robust stability in the heat equation in a radially symmetric sphere

L. Araujo-Hernández , R. Temoltzi-Ávila 

*Área Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México.*

#### Resumen

En este trabajo se establece un concepto de estabilidad robusta para la ecuación de calor en una esfera radialmente simétrica, empleando el concepto de estabilidad bajo perturbaciones de acción constante aplicado en ecuaciones diferenciales ordinarias. Se supone que en la ecuación de calor existe una fuente de calor externa que se representan vía series de Fourier-Bessel, y cuyos coeficientes son funciones continuas a trozos acotadas. Se aplica el método de separación de variables para obtener soluciones de la ecuación de calor y se determinan los coeficientes de Fourier-Bessel de tal manera que la solución obtenida, así como sus primeras derivadas parciales, sean acotadas. En base a esto, se establecen condiciones suficientes para asegurar la estabilidad robusta en la ecuación de calor.

*Palabras Clave:* Fuentes de calor, series de Fourier-Bessel, desviaciones máximas, estabilidad robusta.

#### Abstract

In this work a robust stability concept is established for the heat equation in a radially symmetric sphere, using the concept of stability under constant action perturbations applied in ordinary differential equations. It is assumed that in the heat equation there is an external heat source that is represented via Fourier-Bessel series, and whose coefficients are bounded piecewise continuous functions. The method of separation of variables is applied to obtain solutions of the heat equation and the Fourier-Bessel coefficients are determined in such a way that the solution obtained, as well as its first partial derivatives, are bounded. Based on this, sufficient conditions are established to ensure robust stability in the heat equation.

*Keywords:* Heat sources, Fourier-Bessel series, maximum deviations, robust stability.

#### 1. Introducción

El análisis sobre la estabilidad de las soluciones de la ecuación de calor con fuentes externas ha sido estudiado en diferentes contextos, en particular, como una generalización de los conceptos de estabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Una observación sobre esta idea se puede consultar en la referencia (Bellman, 1948), en la cual se muestra que es apropiado generalizar el concepto de estabilidad para las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales a partir del concepto de estabilidad para ecuaciones diferenciales ordinarias en el sentido de Lyapunov-Poincaré. Este método de generalización es también considerado en (Kostandian, 1960), en el cual se emplean algunas ideas del segundo método de Lyapunov para estudiar la estabilidad de la solución de la ecuación

no lineal que describe la conducción de calor empleando la métrica del espacio  $L^2$ . Otro método de generalización que se ha considerado sobre la estabilidad de soluciones para ecuaciones diferenciales parciales, es el de estabilidad en el sentido de Hyers-Ulam, para el cual en la referencia (Hegyi and Jung, 2013) se analiza el caso de una ecuación de calor definida en la clase de soluciones radialmente simétricas. Un caso más sobre la generalización de la estabilidad de soluciones de la ecuación de calor con fuentes de calor que presentan incertidumbre, cuyo concepto es introducido en (Liu, 2009), es el concepto de estabilidad en medida, el cual se analiza en la referencia (Yang, 2019).

En el presente trabajo se propone un método para establecer un criterio sobre la estabilidad robusta de la solución trivial para la ecuación de calor definida en una esfera radialmente simétrica

\*Autor para correspondencia: temoltzi@uaeh.edu.mx.

Correo electrónico: luarhe97@gmail.com (Luis Araujo-Hernández), temoltzi@uaeh.edu.mx (Raúl Temoltzi-Ávila).

ca con fuentes de calor externas que pertenecen a un conjunto de funciones prefijado. La estabilidad robusta se determina a partir del concepto de estabilidad bajo perturbaciones de acción constante introducido por G. N. Duboshin e I. G. Malkin para ecuaciones diferenciales ordinarias, ver (Elsogoltz, 1983). En principio, se busca que tanto las soluciones de la ecuación, así como sus primeras derivadas parciales respecto al tiempo y al eje radial, no deben exceder un valor prefijado. Un método análogo se ha empleado en (Zhermolenko and Temoltzi-Ávila, 2021) para el caso de una ecuación de tipo hiperbólico con amortiguamiento que admite perturbaciones externas.

## 2. Planteamiento del problema

Un tema interesante en el estudio del problema de la conducción de calor, consiste en estudiar la forma en que se distribuye la temperatura en diferentes cuerpos sólidos; el método que se emplee depende de la forma del cuerpo en cuestión. Por ejemplo, en (Jones, 1983) se estudia el comportamiento de las soluciones de la ecuación de reacción-difusión de  $n$  dimensiones cuando  $t \rightarrow \infty$ :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{n-1} \frac{\partial y}{\partial r} \right) + f(y),$$

con condición inicial de la forma  $y(r, 0) = y_0(r)$ , y donde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se supone suave y con forma de un polinomio cúbico que posee tres raíces en 0,  $\alpha$  y 1, con  $\alpha \in (0, 1)$ . Por otra parte, en (Roussier, 2004) se extiende el análisis del comportamiento de las soluciones cuando  $t \rightarrow \infty$ , considerando pequeñas perturbaciones. Otros casos sobre el estudio de esta ecuación se pueden consultar por ejemplo en las referencias (Crank, 1975; Mehrer, 2007; Hetnarski and Eslami, 2019).

En este trabajo se considera un caso particular de la ecuación anterior, la cual describe la distribución de la temperatura en una esfera sólida de radio  $a \in (0, \pi)$  que es radialmente simétrica en el espacio de tres dimensiones, y que admite una fuente de calor externa  $u(r, t)$ , es decir, se considera la ecuación diferencial parcial descrita por:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{k}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial y}{\partial r} \right) + u(r, t), \quad (r, t) \in \Omega, \quad (1)$$

con  $\Omega := [0, a] \times [0, \infty)$ , y donde  $k$  es llamado coeficiente de difusividad térmica. La ecuación (1) se complementa por considerar condiciones inicial y de contorno nulas:

$$y(r, 0) = 0, \quad r \in [0, a], \quad (2)$$

$$y(a, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Como caso de interés, se supone que las fuentes de calor se pueden representar mediante una serie de Fourier-Bessel usando como conjunto ortonormal las funciones esféricas de Bessel de orden cero  $\{j_0(\sqrt{\mu_n}r)\}$ , donde

$$\begin{aligned} j_\nu(\tau) &= \sqrt{\frac{\pi}{2\tau}} J_{\nu+1/2}(\tau) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma\left(n + \nu + \frac{3}{2}\right)} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{2n+\nu} \quad \nu \geq 0, \end{aligned}$$

y  $\sqrt{\mu_n} = n\pi/a$ , ver (Watson, 1952), en particular, se supone que el conjunto de fuentes de calor externas admisibles  $u(r, t)$  para la ecuación (1) es:

$$\mathcal{U}_\Omega := \left\{ u(r, t) \mid u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) j_0(\sqrt{\mu_n}r), \right. \\ \left. (r, t) \in \Omega, u_n(t) \in \mathcal{U}_{\delta_n}, \{\delta_n\} \in \mathcal{D}_\delta \right\}, \quad (4)$$

donde

$$\mathcal{U}_{\delta_n} := \{u_n(t) \in \mathcal{KC}(\mathbb{R}) \mid |u_n(t)| \leq \delta_n\},$$

con  $\mathcal{KC}(\mathbb{R})$  el conjunto de funciones continua a trozos definidas sobre  $\mathbb{R}$ , y para  $\delta > 0$ ,  $\mathcal{D}_\delta$  denota la familia de sucesiones  $\{\delta_n\}$  de números reales no negativos que satisfacen  $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n = \delta$ .

De la expresión de las funciones  $u(r, t) \in \mathcal{U}_\Omega$  vía series de Fourier-Bessel, se observa que para todo  $(r, t) \in \Omega$  se cumple  $|u(r, t)| \leq \delta$ , pues  $j_0(s)$  es acotada por la unidad y

$$|u(r, t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t)| \cdot |j_0(\sqrt{\mu_n}r)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n = \delta.$$

En el caso en que en (1) no existe presencia de una fuente de calor externa, es decir, si  $u(r, t) = 0$ ,  $(r, t) \in \Omega$ , entonces la solución del problema de valores inicial y de contorno (1)–(3) coincide con la solución trivial  $\bar{y}(r, t) = 0$ ,  $(r, t) \in \Omega$ . Tal solución se denomina en lo que sigue *no perturbada*. Se observa que  $\bar{y}(r, t)$  es la única solución no perturbada de (1) con condiciones inicial y de contorno (2) y (3).

Se supone que la constante de difusividad térmica en (1) satisface la desigualdad

$$k > \frac{a}{2\pi}.$$

De la desigualdad anterior resulta que  $k > 1/2\mu_1 = a^2/2\pi^2$ . Se supone también que las soluciones de la ecuación de calor (1) sujeto a las condiciones inicial y de contorno (2)–(3) admiten una representación vía series de Fourier-Bessel respecto de la función esférica de Bessel de orden cero  $j_0$ , esto es, que las soluciones admiten la siguiente representación:

$$y(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) j_0(\sqrt{\mu_n}r), \quad (r, t) \in \Omega, \quad (5)$$

donde las funciones  $a_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  se denominan coeficientes de Fourier-Bessel, y que son preciso determinar.

Para cada solución (5) del problema de valores inicial y de contorno (1)–(4) se define la siguiente norma:

$$\|y(r, t)\| = \max \left\{ |y(r, t)|, \left| \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right|, \left| \frac{\partial y(r, t)}{\partial t} \right| \right\} \quad (r, t) \in \Omega.$$

La introducción de la norma anterior permite comparar soluciones  $y(r, t)$  en la forma (5) asociadas a fuentes de calor externas no triviales  $u(r, t) \in \mathcal{U}_\Omega$  con la solución no perturbada  $\bar{y}(r, t)$ , esto es, analizar el número real  $\|y(r, t) - \bar{y}(r, t)\| = \|y(r, t)\|$ . Esto permite introducir una noción de estabilidad robusta para el problema de valores inicial y de contorno (1)–(3) con fuentes de calor en (4), en el sentido de la siguiente:

**Definición 2.1.** La solución no perturbada  $\bar{y}(r, t)$  del problema (1)–(4) es robustamente estable, si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\eta = \eta(\epsilon) > 0$  tal que si  $|u(r, t)| \leq \delta < \eta(\epsilon)$  para todo  $(r, t) \in \Omega$ , entonces la solución de (1) satisface  $\|y(r, t)\| < \epsilon$  para todo  $(r, t) \in \Omega$ .

La Definición 2.1 es una extensión natural del concepto de estabilidad bajo perturbaciones de acción constante introducido por G. N. Duboshin e I. G. Malkin, ver (Elsogoltz, 1983). Un concepto análogo ha sido considerado en (Zhermolenko and Temoltzi-Ávila, 2021) para la ecuación de onda unidimensional con perturbaciones externas.

### 3. Método de separación de variables de Fourier-Bessel

En este apartado se obtienen condiciones suficientes sobre la existencia de soluciones del problema de valores inicial y de contorno (1)–(3) para que estas se puedan expresar vía una serie de Fourier-Bessel como se expresa en (5). Con este fin, se muestran también algunas propiedades generales sobre los coeficientes de Fourier-Bessel de la representación (5) de la solución  $y(r, t)$ .

#### 3.1. Criterio de estabilidad robusta para los coeficientes de Fourier-Bessel

Al suponer la validez de la expresión (5) para una solución  $y(r, t)$  de la ecuación en derivadas parciales (1), y considerar la representación de una fuente de calor  $u(r, t)$  como se define en (4), después de sustituir tales expresiones en la ecuación de calor (1), se obtiene que los respectivos coeficientes de Fourier-Bessel  $a_n$  y  $u_n(t)$  de ambas representaciones, deben satisfacer la ecuación diferencial ordinaria de primer orden con una perturbación externa:

$$\dot{a}_n + k\mu_n a_n = u_n(t), \quad a_n(0) = 0, \quad u_n(t) \in \mathcal{U}_{\delta_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Bajo el supuesto  $0 < \delta_n < k\mu_n, n \in \mathbb{N}$ , las soluciones de la  $n$ -ésima ecuación diferencial ordinaria (6) posee las siguientes propiedades:

- (a) Para cada perturbación externa  $u_n(t) \in \mathcal{U}_{\delta_n}$  el coeficiente de Fourier-Bessel para (5) se obtiene como la solución de la ecuación diferencial ordinaria (6):

$$a_n(t) = \int_0^t e^{-k\mu_n s} u_n(t-s) ds, \quad t \geq 0.$$

- (b) Si se eligen en  $\mathcal{U}_{\delta_n}$  las perturbaciones externas constantes  $u_n^\pm(t) = \pm\delta_n, t \geq 0$ , entonces se obtienen los coeficientes de Fourier-Bessel siguientes:

$$a_n^\pm(t) = \pm \frac{\delta_n}{k\mu_n} (1 - e^{-k\mu_n t}), \quad t \geq 0.$$

- (c) Para cada elección  $u_n(t) \in \mathcal{U}_{\delta_n}$ , la solución  $a_n(t)$  de (6) satisface la desigualdad

$$a_n^-(t) \leq a_n(t) \leq a_n^+(t), \quad t \geq 0.$$

Se sigue del inciso (a) que si en la ecuación diferencial (6) no existe perturbación externa, es decir, si  $u_n(t) = 0, t \geq 0$ , entonces la correspondiente solución es la solución trivial. Tal solución se denota por  $\bar{a}_n(t) = 0, t \geq 0$ , y se denomina también *no perturbada*.

Para cada  $T > 0$  se define el siguiente conjunto

$$D_n(T) = \{(s, z) \in \mathbb{R}^2 : z = a_n(s), a_n \text{ es solución de (6)} \\ \text{para alguna } u_n(t) \in \mathcal{U}_{\delta_n}, s \in [0, T]\},$$

el cual se conoce como *tubo de alcanzabilidad* de (6). Las gráficas de las funciones  $a_n^-$  y  $a_n^+$  que se definen en el inciso (b) pertenecen al conjunto  $D_n(T)$ . Se observa también que todo punto de la forma  $(s, z)$  tal que  $0 \leq s \leq T$  y  $a_n^-(s) \leq z \leq a_n^+(s)$  pertenece a  $D_n(T)$ , lo cual se sigue de observar que la solución  $a_n$  de (6) asociada a la perturbación externa constante

$$u_n(t) = \frac{k\mu_n}{1 - e^{-k\mu_n s}} z,$$

la cual pertenece  $\mathcal{U}_{\delta_n}$ , satisface  $a_n(s) = z$ . Se sigue de esta observación, y los incisos (b) y (c), que la frontera del conjunto  $D_n(T)$  se puede describir por la recta  $t = T$  y las gráficas de las funciones  $a_n^-$  y  $a_n^+$ . Otras propiedades sobre el conjunto  $D_n(T)$  son las siguientes: para cada valor finito  $T > 0, D_n(T)$  es un conjunto cerrado, acotado y convexo que es simétrico con respecto al eje de coordenadas  $a_n = 0$ , y si  $T_1 < T_2$ , entonces  $D_n(T_1) \subset D_n(T_2)$ , ver (Kurzanski and Varaiya, 2014).

Se sigue del inciso (c) y de las observaciones anteriores, que para cada elección  $u_n(t) \in \mathcal{U}_{\delta_n}$ , la correspondiente solución  $a_n$  de (6) tiene la siguiente propiedad:  $(t, a_n(t)) \in D_n(T), t \in [0, T]$ . Por otra parte, de acuerdo a la dependencia lineal del parámetro  $\delta_n > 0$  en la representación de las funciones  $a_n^-$  y  $a_n^+$  que describen la frontera del conjunto  $D_n(T)$ , es posible modificar la estructura de este conjunto tomando distintos valores de este parámetro, ver la Figura 1.

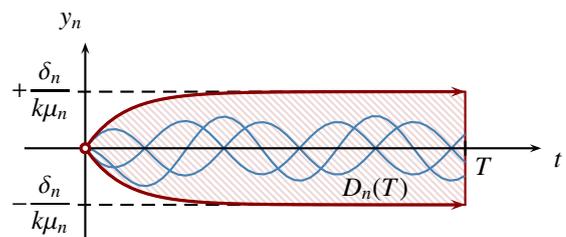


Figura 1: Ilustración de la estructura del tubo de alcanzabilidad  $D_n(T)$  de la ecuación diferencial (6) en la que se muestran dos posibles soluciones.

La observación anterior permite introducir un concepto de estabilidad robusta análogo al que se introdujo en la Definición 2.1 en el sentido del concepto de estabilidad bajo perturbaciones de acción constante debido a G. N. Duboshin e I. G. Malkin, ver (Elsogoltz, 1983). Con este objetivo, se considera la siguiente norma para las soluciones de (6):

$$\|a_n(t)\| = \max\{|a_n(t)|, |\dot{a}_n(t)|\}, \quad t \geq 0.$$

**Definición 3.1.** La solución no perturbada, es decir, la solución trivial  $\bar{a}_n(t) \equiv 0$  (para  $\bar{a}_n(0) = 0, u_n(t) \equiv 0$ ) de la ecuación (6),

se denomina robustamente estable con respecto a una perturbación  $u_n \in \mathcal{U}_{\delta_n}$ , si para cualquier  $\epsilon_n > 0$  arbitrariamente pequeño, existe  $\eta_n(\epsilon_n) > 0$  tal que bajo las siguientes condiciones:  $a_n(0) = 0$ ,  $|u_n(t)| \leq \delta_n < \eta_n(\epsilon_n)$  para todo  $t \geq 0$ , toda solución de la ecuación (6) satisface  $\|a_n(t)\| < \epsilon_n$  para todo  $t \geq 0$ .

Otras definiciones análogas de estabilidad robusta para ecuaciones diferenciales ordinarias de orden dos con perturbaciones externas se pueden encontrar en las referencias (Aleksandrov et al., 2010; Temoltzi-Ávila and Ávila-Pozos, 2020; Zhernolenko and Temoltzi-Ávila, 2021).

De acuerdo con la definición del problema de valores iniciales (6) se sigue que para cada elección  $u_n(t) \in \mathcal{U}_{\delta_n}$  y  $t \geq 0$ , la correspondiente solución satisface

$$|a_n(t)| = \left| \int_0^t e^{-k\mu_n s} u_n(t-s) ds \right| \leq \frac{\delta_n}{k\mu_n} (1 - e^{-k\mu_n t}),$$

y, por consiguiente,

$$\max_{t \geq 0} |a_n(t)| \leq \frac{\delta_n}{k\mu_n}. \tag{7}$$

De igual manera se puede verificar que

$$\max_{t \geq 0} |\dot{a}_n(t)| \leq 2\delta_n. \tag{8}$$

De las desigualdades (7) y (8) se concluye que

$$\|a_n(t)\| \leq \delta_n \cdot \max \left\{ \frac{1}{k\mu_n}, 2 \right\}.$$

Por consiguiente, para cada  $\epsilon_n > 0$  arbitrariamente pequeño, la desigualdad  $\|a_n(t)\| < \epsilon_n$  es válida si

$$\delta_n < \eta_n(\epsilon_n) := \frac{\epsilon_n}{\max \left\{ \frac{1}{k\mu_n}, 2 \right\}}.$$

De acuerdo con el supuesto hecho sobre la desigualdad que cumple la constante de difusividad térmica:  $k > 1/2\mu_1$ , se sigue que  $\max\{1/k\mu_n, 2\} = 2$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por tanto, si se cumple la desigualdad  $\delta_n < \epsilon_n/2$ , entonces  $\|a_n(t)\| < \epsilon_n$  para todo  $t \geq 0$ , esto es, la solución trivial de (6) es robustamente estable en el sentido de la Definición 3.1.

### 3.2. Condiciones de existencia de soluciones del problema de condiciones inicial y de contorno

En este apartado se muestran las condiciones bajo las cuáles posee soluciones el problema de valores inicial y de contorno (1)–(3) con fuentes de calor externas que pertenecen a  $\mathcal{U}_\Omega$ . De esta manera, de acuerdo a la representación de las soluciones de la familia de ecuaciones diferenciales ordinarias (6), la representación (5) se puede expresar como:

$$y(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} j_0(\sqrt{\mu_n}r) \int_0^t e^{-k\mu_n s} u_n(t-s) ds, \quad (r, t) \in \Omega, \tag{9}$$

y debido a que

$$\frac{k}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right) = k \left( \frac{\partial^2 y(r, t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right),$$

la justificación de la aplicación del método de Fourier-Bessel para obtener una solución del problema (1)–(4), consiste en demostrar la convergencia uniforme en  $t \in [0, \infty)$  y  $r \in [0, a]$  de la serie de Fourier-Bessel (9), así como de otras tres series obtenidas de (9) por diferenciación término a término con respecto a  $t$  y  $r$ :

$$\frac{\partial y(r, t)}{\partial t}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial y(r, t)}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2 y(r, t)}{\partial r^2}. \tag{10}$$

En el siguiente resultado se resume esta situación.

**Proposición 3.1.** *Si la suma  $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$  es finita, entonces la función  $y(r, t)$  definida en (9) es una solución del problema (1)–(3) con fuentes externas en (4).*

*Demostración.* Basta con determinar bajo qué condiciones las series definidas en (9) y (10) convergen uniformemente.

Para la serie (9) se observa que para todo  $(r, t) \in \Omega$ :

$$\begin{aligned} |y(r, t)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^t e^{-k\mu_n s} u_n(t-s) ds \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{k\mu_n} (1 - e^{-k\mu_n t}) \leq \frac{a^2}{k\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n. \end{aligned} \tag{11}$$

donde se ha usado el hecho de que  $|j_0(\sqrt{\mu_n}r)|$  no excede la unidad y que  $\mu_n > \mu_1 = \pi^2/a^2$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Se sigue que (9) converge uniformemente en  $r \in [0, a]$  y  $t \geq 0$  siempre que  $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$  sea convergente.

Por otra parte, la serie de la primera derivada parcial de la función en (9) respecto a  $t$ , se describe por:

$$\frac{\partial y(r, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} j_0(\sqrt{\mu_n}r) \left( u_n(t) - k\mu_n \int_0^t e^{-k\mu_n(t-s)} u_n(s) ds \right).$$

Por consiguiente, se tiene que para todo  $(r, t) \in \Omega$  se cumplen las desigualdades siguientes:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial y(r, t)}{\partial t} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n(t) - k\mu_n \int_0^t e^{-k\mu_n(t-s)} u_n(s) ds \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \delta_n + k\mu_n \cdot \frac{\delta_n}{k\mu_n} (1 - e^{-k\mu_n t}) \right) \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n, \end{aligned} \tag{12}$$

donde una vez más se ha usado el hecho de que  $|j_0(\sqrt{\mu_n}r)|$  no excede la unidad. Se sigue que la primera derivada parcial (9) respecto a  $t$  converge uniformemente en  $r \in [0, a]$  y  $t \geq 0$  siempre que  $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$  sea convergente.

De igual manera, como

$$\frac{1}{r} \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\mu_n}}{r} j_1(\sqrt{\mu_n}r) \int_0^t e^{-k\mu_n s} u_n(t-s) ds,$$

y de acuerdo a la validez de la identidad

$$\frac{3j_1(\tau)}{\tau} = j_0(\tau) + j_2(\tau), \quad \tau > 0, \tag{13}$$

ver (Watson, 1952), se sigue que para todo  $(r, t) \in \Omega$  se cumplen

las desigualdades siguientes:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{r} \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sqrt{\mu_n}}{r} j_1(\sqrt{\mu_n} r) \int_0^t e^{-k\mu_n s} u_n(t-s) ds \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2\mu_n}{3} \int_0^t e^{-k\mu_n s} u_n(t-s) ds \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu_n}{3} \frac{\delta_n}{k\mu_n} (1 - e^{-k\mu_n t}) \leq \frac{2}{3k} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n. \end{aligned}$$

Por tanto, la primera derivada parcial de la función (9) respecto a  $r$  dividida por  $r$ , converge uniformemente en  $r \in [0, a]$  y  $t \geq 0$  a condición de que  $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$  sea convergente.

Finalmente, para la serie

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y(r, t)}{\partial r^2} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \left( j_0(\sqrt{\mu_n} r) - \frac{2}{\sqrt{\mu_n} r} j_1(\sqrt{\mu_n} r) \right) \\ &\quad \cdot \int_0^t e^{-k\mu_n s} u_n(t-s) ds, \end{aligned}$$

y de acuerdo con la identidad (13), se sigue que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 y(r, t)}{\partial r^2} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \mu_n \int_0^t e^{-k\mu_n s} u_n(t-s) ds \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \cdot \frac{\delta_n}{k\mu_n} (1 - e^{-k\mu_n t}) \leq \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n, \end{aligned}$$

Se concluye que la segunda derivada parcial de la función (9) respecto a  $r$  converge uniformemente en  $r \in [0, a]$  y  $t \geq 0$  siempre que  $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$  sea convergente.  $\square$

#### 4. Criterio de estabilidad robusta

Se obtiene ahora finalmente el criterio sobre la estabilidad robusta de la solución no perturbada de la ecuación (1), sujeta a las condiciones inicial y de contorno (2)–(3), considerando fuentes de calor que pertenecen a  $\mathcal{U}_\Omega$ .

Sea  $\epsilon > 0$  arbitrariamente pequeño. Se define  $\mathcal{E}_\epsilon$  como la familia de sucesiones  $\{\epsilon_n\}$  de números reales positivos que satisfacen  $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n = \epsilon$ . Por ejemplo, para  $p \in (0, 1)$  se puede elegir  $\{\epsilon_n\} \in \mathcal{E}_\epsilon$  de tal manera que  $\epsilon_n = \epsilon(1-p)p^{n-1}$ , la cual satisface  $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n = \epsilon$ , ya que  $\sum_{n=1}^{\infty} (1-p)p^{n-1}$  es la suma de una sucesión geométrica decreciente con primer término  $1-p$  y razón  $p \in (0, 1)$ .

Si elige una sucesión arbitraria  $\{\epsilon_n\} \in \mathcal{E}_\epsilon$  y se considera una sucesión  $\{\delta_n\}$  de términos no negativo que satisfacen:

$$\delta_n < \frac{\epsilon_n}{\max\left\{\frac{1}{k\mu_n}, 2\right\}} = \frac{\epsilon_n}{2}.$$

Dada la estabilidad robusta de la solución trivial de la ecuación (6), para  $\epsilon_n$  como antes, se observa que

$$|y(r, t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(t)| \leq \frac{a^2}{\pi^2 k} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_n < \frac{a^2}{2\pi^2 k} \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n = \frac{a^2 \epsilon}{2\pi^2 k} \quad (14)$$

y

$$\left| \frac{\partial y(r, t)}{\partial t} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\dot{a}_n(t)| \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n = \epsilon. \quad (15)$$

Se observa que las estimaciones (14) y (15) prueban de forma incidental la convergencia uniforme de las series de funciones  $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n(t)|$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} |\dot{y}_n(t)|$ ,  $t \geq 0$ . Por otra parte, de la representación (5) y la desigualdad (7), se sigue que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\mu_n} |a_n(t)| \leq \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{\sqrt{\mu_n}} \\ &\leq \frac{a}{\pi k} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \frac{a}{2\pi k} \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n = \frac{a\epsilon}{2\pi k}. \quad (16) \end{aligned}$$

Por tanto, de acuerdo con las representaciones (14)–(16) al considerar  $\delta_n < \epsilon_n/2$ , el estimado  $\|y(r, t)\| < \epsilon$  se obtiene si se elige

$$\delta < \eta(\epsilon) := \frac{\epsilon}{2 \cdot \max\left\{1, \frac{a}{2\pi k}, \frac{a^2}{2\pi^2 k}\right\}} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Esto permite formular el siguiente resultado:

**Teorema 4.1.** *Para la estabilidad robusta de la solución no perturbada de la ecuación de calor (1) en ausencia de fuentes de calor con condiciones iniciales y de contorno nulas (2)–(3), es suficiente que para cada  $\epsilon > 0$  se elija  $\eta(\epsilon) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k$  y  $0 < \delta_k < \frac{1}{2} \epsilon_k$ , asumiendo que  $\{\epsilon_k\} \in \mathcal{E}_\epsilon$ .*

El siguiente ejemplo muestra de forma numérica los resultados obtenidos, los cuales se obtuvieron con GNU Octave 4.2.2.

**Ejemplo 1.** En el problema de condiciones iniciales y condiciones de contorno (1)–(4) se elige  $k = 0.1592$ ,  $a = 1.0$ , y se buscan soluciones tales que  $\|y(r, t)\| < 1$ . En el conjunto  $\mathcal{E}_1$  se elige la sucesión  $\{\epsilon_n\}$  asociada a  $p = 0.1$ , es decir, tal que  $\epsilon_n = 9/10^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . La sucesión  $\{\delta_n\}$  se elige de tal manera que  $\delta_n = 9\epsilon_n/20$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Finalmente, se elige  $\Omega_T = [0, a] \times [0, T]$  con  $T = 90$ .

Si para (6) se eligen las peores perturbaciones externas, es decir, si se eligen  $u_n(t) = \delta_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , la fuente de calor externa para (1) tiene la forma

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n j_0(\sqrt{\mu_n} r), \quad r \in [0, 1].$$

En  $\Omega_T$  se obtiene el estimado  $|y(r, t)| \leq 0.4653$ , y para las primeras derivadas se obtiene  $|\partial y(r, t)/\partial t| \leq 0.8129$  mientras que  $|\partial y(r, t)/\partial r| \leq 0.6357$ . Las gráficas de las soluciones se muestran en la Figura 2. Casos similares se obtienen si se eligen otros valores  $p$  en  $(0, 1)$ .

Un resultado análogo se obtiene si se consideran las perturbaciones  $u_n(t) = -\delta_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

De igual manera, si se consideran las perturbaciones externas  $u_n(t) = \delta_n \sin(t/10)$ , entonces en  $\Omega_T$  se obtiene el estimado  $|y(r, t)| \leq 0.4708$ , mientras que en las primeras derivadas parciales  $|\partial y(r, t)/\partial t| \leq 0.0470$  y  $|\partial y(r, t)/\partial r| \leq 0.6344$ . Las gráficas correspondientes se muestran en la Figura 3.

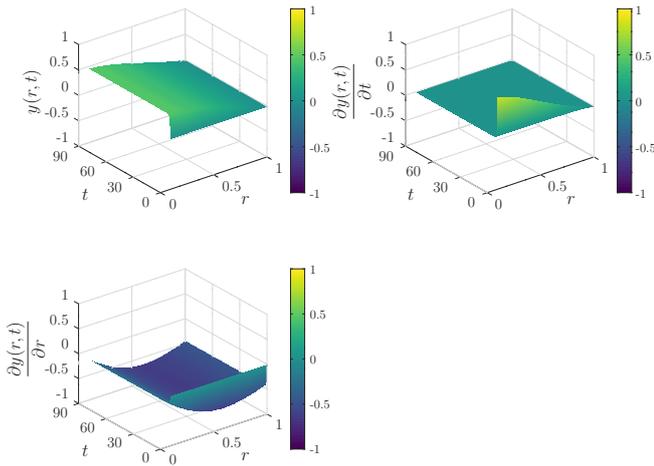


Figura 2: Solución del problema de valores iniciales (1)–(3) bajo la influencia de las perturbaciones:  $u_n(t) = \delta_n$ .

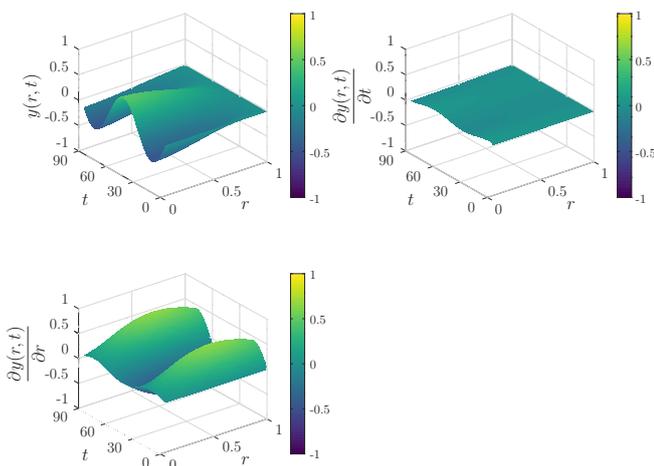


Figura 3: Solución del problema de valores iniciales (1)–(3) bajo la influencia de las perturbaciones:  $u_n(t) = \delta_n \sin(t/10)$ .

## Conclusión

Se describe un método que permite estabilizar la solución trivial de la ecuación de calor radialmente simétrica con fuentes de calor que pertenecen a un conjunto prefijado, suponiendo condiciones iniciales y de contorno nulas. El criterio permite

determinar una cota para el conjunto de fuentes de calor externas, con el fin de acotar por un valor constante positivo, los valores de su solución y de sus primeras derivadas parciales.

## Agradecimientos

Los autores agradecen la invitación a participar en este número especial por el XX aniversario de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo y se unen a las felicitaciones por su aniversario.

También expresan su agradecimiento a los revisores por las observaciones realizadas a este trabajo.

## Referencias

- Aleksandrov, V. V., Reyes-Romero, M., Sidorenko, G. Y., and Temoltzi-Avila, R. (2010). Stability of controlled inverted pendulum under permanent horizontal perturbations of the supporting point. *Mechanics of Solids*, 45(2):187–193.
- Bellman, R. (1948). Existence and boundedness of solutions of nonlinear partial differential equations of parabolic type. *Transactions of the American Mathematical Society*, 64(1):21–44.
- Crank, J. (1975). *The mathematics of diffusion*. Oxford University Press, Great Britain, 2nd edition.
- Elsgolts, L. (1983). *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. Mir, Moscú.
- Hegyí, B. and Jung, S. M. (2013). On the stability of heat equation. *Abstract and Applied Analysis*. Article ID 202373, 4 pages.
- Hetnarski, R. B. and Eslami, M. R. (2019). *Thermal stresses -Advanced theory and applications*. Number 158 in Solid-State Science. Springer-Verlag, Switzerland, 2nd edition.
- Jones, C. K. R. T. (1983). Spherically symmetric solutions of a reaction-diffusion equation. *Journal of Differential Equations*, 49(1):142–169.
- Kostandian, B. A. (1960). On the stability of solutions of the nonlinear equation of heat conduction. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 24(6):1686–1689.
- Kurzanski, A. B. and Varaiya, P. (2014). *Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation*. Systems & Control: Foundations & Applications. Springer, Switzerland.
- Liu, B. (2009). Some research problems in uncertainty theory. *Journal of Uncertain Systems*, 3(1):3–21.
- Mehrer, H. (2007). *Diffusion in solids. Fundamentals, methods, materials, diffusion-controlled processes*. Number 155 in Solid Mechanics and Its Applications. Springer-Verlag, Berlin.
- Roussier, V. (2004). Stability of radially symmetric travelling waves in reaction-diffusion equations. *Annales de L'institut Henri Poincaré*, 21(3):341–379.
- Temoltzi-Ávila, R. and Ávila-Pozos, R. (2020). Conjunto de alcanzabilidad de un sistema mecánico controlable y condiciones de estabilidad robusta. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 17(3):285–293.
- Watson, G. N. (1952). *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge University Press, London, 2nd edition.
- Yang, X. (2019). Stability in measure for uncertain heat equation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, 24(12):6533–6540.
- Zhermolenko, V. N. and Temoltzi-Ávila, R. (2021). On the Bulgakov problem and the robust stability of hyperbolic equation. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 76(4):95–104.