DESDE 2013
https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/icbi/issue/archive
Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI
ISSN: 2007-6363

Publicación Semestral Pädi Vol. 10 No. Especial (2022) 59–64

Ideales traza sobre ω
Trace ideals on ω

N. Rivas-González*

Estudiante de Doctorado en el Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México y Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán, México.

Resumen

Este trabajo se centra en la definición de Ideal Traza, dada por J. Brende en (Brendle and Yatabe, 2005). El objetivo es dar algunas relaciones que hay entre un ideal y su traza, e.g. sus cardinales asociados. Además, se introducen nuevos cardinales y se muestran sus relaciones con los cardinales estándar. Por último, se dan algunos ejemplos concretos de ideales traza.

Palabras Clave: Ideal sobre ω, Ideal Traza, Cardinales asociados a un ideal, Orden de Tukey.

Abstract

This work focuses on the definition of Trace Ideal, given by J. Brende in (Brendle and Yatabe, 2005). The aim is to show some relations between the ideal and its trace, such as the associated cardinals. Additionally, new cardinals are introduced and their relations with the standard cardinals are established. Finally, we provide some concrete examples of trace ideals.

Keywords: Ideal on ω, Trace Ideal, Cardinals associated to an ideal, Tukey Order.

Introducción

Un *ideal* $\mathcal{I}$ sobre un conjunto X es una familia no vacía de $\mathcal{P}(X) = \{Y : Y \subseteq X\}$ que es cerrada bajo subconjuntos, es decir $(\forall I)(\forall J)\ I \in \mathcal{I} \wedge J \subseteq I \rightarrow J \in \mathcal{I}$, y bajo uniones finitas, es decir $(\forall I, J \in \mathcal{I})\ I \cup J \in \mathcal{I}$. Los ideales considerados en este trabajo serán *propios* ($X \notin \mathcal{I}$) y *libres* ($[X]^{<\omega} = \{F \subseteq X : F \text{ es finito}\} \subseteq \mathcal{I}$). El *ideal generado por* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es $\langle\mathcal{A}\rangle = \{Y \subseteq X : (\exists F \in [\mathcal{A}]^{<\omega})\ Y \subseteq \bigcup F\}$. Un ideal $\mathcal{I}$ es un *σ-ideal* si es cerrado bajo uniones numerables, y es un *P-ideal* si para cada $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}$ existe $A \in \mathcal{I}$ tal que $(\forall n \in \omega) A_n \subseteq^* A$ (para $A, B \subseteq X$, $A \subseteq^* B$ si existe $F \in [X]^{<\omega}$ tal que $A \subseteq B \cup F$). Un ideal $\mathcal{I}$ sobre un conjunto infinito X es *alto* si para cada $A \in [X]^\omega = \{C \subseteq X : C \text{ es numerable}\}$ existe $B \in [A]^\omega \cap \mathcal{I}$. Un ideal $\mathcal{I}$ sobre ω (el conjunto de números naturales) es *analítico* si es un subespacio analítico (ver (Galicki, 2013, sec. 4)) de $\mathcal{P}(\omega)$, el cual es homeomorfo al espacio $2^\omega = \{f : f : \omega \to 2\}$ con la topología producto. $|X|$ es la cardinalidad del conjunto X. $\aleph_0 = |\omega|$ y $\mathfrak{c} = |2^\omega| = |\mathbb{R}|$.

Para un espacio topológico X, $D \subseteq X$ es *denso* si su clausura es igual a X, $N \subseteq X$ es *nunca denso* si el complemento de su clausura es denso y $M \subseteq X$ es *magro* si está contenido en la unión numerable de conjuntos nunca densos. Los conceptos y notaciones no definidos en el escrito son estándar y pueden consultarse en Hernández-Hernández (2021), Hernández-Hernández (2014) y Kunen (1980).

Un ideal $\mathcal{I}$ sobre X tiene los siguientes cardinales asociados.

- $\mathrm{add}(\mathcal{I}) = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \wedge \bigcup\mathcal{A} \notin \mathcal{I}\}$.
- $\mathrm{cov}(\mathcal{I}) = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \wedge \bigcup\mathcal{A} = X\}$.
- $\mathrm{non}(\mathcal{I}) = \min\{|Y| : Y \subseteq X \wedge Y \notin \mathcal{I}\}$.
- $\mathrm{cof}(\mathcal{I}) = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \wedge (\forall I \in \mathcal{I})(\exists A \in \mathcal{A})\ I \subseteq A\}$.

En $\omega^\omega = \{f : f : \omega \to \omega\}$ se define la relación $\leq^*$ dada por $f \leq^* g$ si y sólo si $\{n \in \omega : f(n) > g(n)\}$ es finito. Se definen entonces los siguientes cardinales.

$$\mathfrak{b} = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \subseteq \omega^\omega \wedge (\forall f \in \omega^\omega)(\exists g \in \mathcal{B})\ g \nleq^* f\},$$

$$\mathfrak{d} = \min\{|\mathcal{D}| : \mathcal{D} \subseteq \omega^\omega \wedge (\forall f \in \omega^\omega)(\exists g \in \mathcal{D})\ f \leq^* g\}.$$

Dentro de 2^ω se considerarán algunos σ-ideales con nombre propio: $\mathcal{N}$, el ideal de los conjuntos nulos (respecto a la medida producto); y $\mathcal{M}$, el ideal de los conjuntos magros. Los cardinales de $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$, junto con $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{d}$, se relacionan mediante el

*Autor para correspondencia: n.rivas@matmor.unam.mx.
Correo electrónico: n.rivas@matmor.unam.mx (Norberto Javier Rivas-González).

Fecha de recepción: 17/11/2021 Fecha de aceptación: 10/02/2022 Fecha de publicación: 22/04/2022
https://doi.org/10.29057/icbi.v10iEspecial.8323

conocido como Diagrama de Cichoń, donde la notación $\kappa \to \lambda$ significa que $\kappa \leq \lambda$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{N}) \\
 & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & \\
\mathrm{add}(\mathcal{N}) \arrow[uu] \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

Un σ-ideal sobre ω^ω a considerar es $\mathcal{K}_\sigma$, el ideal generado por los conjuntos σ-compactos ($K \subseteq \omega^\omega$ es *σ-compacto* si existe $\mathcal{F} = \{K_n \subseteq \omega^\omega : n \in \omega\}$ familia de compactos tal que $K = \bigcup \mathcal{F}$). Para este ideal se sabe que $\mathrm{add}(\mathcal{K}_\sigma) = \mathrm{non}(\mathcal{K}_\sigma) = \mathfrak{b}$ y $\mathrm{cov}(\mathcal{K}_\sigma) = \mathrm{cof}(\mathcal{K}_\sigma) = \mathfrak{d}$ (Blass, 2010).

Un *árbol* T es un conjunto parcialmente ordenado por una relación $\leq$ tal que para cada $t \in T$ se cumple que el conjunto $\mathrm{pred}(t) = \{s \in T : s \leq t\}$ es bien ordenado (todo subconjunto no vacío tiene un elemento mínimo). A los elementos de un árbol se les llama *nodos*. Un árbol T es *bien podado* si $(\forall t \in T)(\exists s \in T)\ t < s$. Dos nodos s, t son *compatibles* (denotado por $s \| t$) si $s \leq t$ o $t \leq s$; en caso contrario se dice que son *incompatibles* (denotado por $s \perp t$). $A \subseteq T$ es una *anticadena* si $(\forall s, t \in T)\ s \perp t$. Para n un número natural, 2^n es el conjunto de funciones con dominio n y rango 2. El conjunto $2^{<\omega} = \bigcup\{2^n : n \in \omega\}$ con el orden de la contención ($s \leq t$ si y sólo si $s \subseteq t$) es un árbol. Si $s \in 2^{<\omega}$ entonces $[s] = \{f \in 2^\omega : s \subseteq f\}$ y $\langle s \rangle = \{t \in 2^{<\omega} : s \subseteq t\}$. Análogamente se define el árbol $\omega^{<\omega}$ y lo relacionado a él.

Ya que la mayoría de definiciones y resultados son aplicables para 2^ω y para ω^ω, $\mathcal{E}s$ denotará a cualquiera de ellos y $\mathcal{A}r$ será el árbol correspondiente. Para $f \in \mathcal{E}s$, sea $\mathrm{nd}(f) = \{f\restriction_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{A}r$, donde $f\restriction_n$ es la restricción a n de la función f. Las *ramas* de $A \subseteq \mathcal{A}r$ son el conjunto $[A] = \{f \in \mathcal{E}s : (\forall n \in \omega)\ f\restriction_n \in A\}$. Hay una biyección entre $\{F \subseteq \mathcal{E}s : F \text{ es cerrado}\}$ y $\{T \subseteq \mathcal{A}r : T \text{ es árbol bien podado}\}$ dada por $F \mapsto \bigcup\{\mathrm{nd}(f) : f \in F\}$ y $T \mapsto [T]$.

Ideales sobre ω

Para $\mathcal{I}$, ideal alto sobre ω, se tienen los siguientes cardinales.

- $\mathrm{add}^*(\mathcal{I}) = \mathrm{mín}\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \wedge (\forall I \in \mathcal{I})(\exists A \in \mathcal{A})\ A \not\subseteq^* I\}$.
- $\mathrm{cov}^*(\mathcal{I}) = \mathrm{mín}\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \wedge (\forall X \in [\omega]^\omega)(\exists A \in \mathcal{A})\ |A \cap X| = \aleph_0\}$.
- $\mathrm{cof}^*(\mathcal{I}) = \mathrm{mín}\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \wedge (\forall I \in \mathcal{I})(\exists A \in \mathcal{A})\ I \subseteq^* A\}$.
- $\mathrm{non}^*(\mathcal{I}) = \mathrm{mín}\{|\mathcal{X}| : \mathcal{X} \subseteq [\omega]^\omega \wedge (\forall I \in \mathcal{I})(\exists X \in \mathcal{X})\ |I \cap X| < \aleph_0\}$.

Los cuales cumplen con el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{non}^*(\mathcal{I}) \arrow[dr] & & \\
\aleph_0 \arrow[r] & \mathrm{add}^*(\mathcal{I}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathrm{cof}^*(\mathcal{I}) \arrow[r] & \mathfrak{c} \\
 & & \mathrm{cov}^*(\mathcal{I}) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

La elección de los nombres se justifica ya que todo ideal alto $\mathcal{I}$ sobre ω tiene un ideal asociado $\widehat{\mathcal{I}}$ sobre $[\omega]^\omega$ dado por $\widehat{\mathcal{I}} = \{\mathcal{X} \subseteq [\omega]^\omega : (\exists I \in \mathcal{I})(\forall X \in \mathcal{X})\ |X \cap I| = \aleph_0\}$. Así se cumple que $\mathrm{add}(\widehat{\mathcal{I}}) = \mathrm{add}^*(\mathcal{I})$ (y lo correspondiente con los otros tres cardinales), además $\mathcal{I}$ es un P-ideal si y sólo si $\widehat{\mathcal{I}}$ es un σ-ideal si y sólo si $\mathrm{add}^*(\mathcal{J}) > \aleph_0$. Como los ideales considerados son libres, entonces $\mathrm{cof}^*(\mathcal{I}) = \mathrm{cof}(\mathcal{I})$.

Para $\mathcal{I}$ un ideal, se dice que $X \subseteq \mathcal{I}$ es *$\subseteq$-acotado* (o simplemente *acotado*) si $\bigcup X \in \mathcal{I}$.

Definición 1.1. Sean $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ ideales sobre ω, se definen los siguientes pre-órdenes.

- [Katetov] $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$ si existe $F : \omega \to \omega$ tal que $\{F^{-1}[I] : I \in \mathcal{I}\} \subseteq \mathcal{J}$.
- [Tukey] $\mathcal{I} \leq_T \mathcal{J}$ si existe $F : \mathcal{I} \to \mathcal{J}$ tal que si $X \subseteq \mathcal{J}$ es acotado, $F^{-1}[X]$ también lo es.

El orden de Tukey se puede definir de manera más general. Si $(P, \leq_{\mathrm{P}})$ y $(Q, \leq_{\mathrm{Q}})$ son conjuntos parcialmente ordenados, entonces $(P, \leq_{\mathrm{P}}) \leq_T (Q, \leq_{\mathrm{Q}})$ si existe $F : P \to Q$ tal que $F^{-1}[A]$ es $\leq_{\mathrm{P}}$-acotado siempre que A sea $\leq_{\mathrm{Q}}$-acotado. O de manera equivalente, si existen $F : P \to Q$ y $F^* : Q \to P$ tales que $(\forall p \in P)(\forall q \in Q)\ F(p) \leq_{\mathrm{Q}} q \ \to\ p \leq_{\mathrm{P}} F^*(q)$. Además, se dice tales ordenes son *Tukey equivalentes* si $(P, \leq_{\mathrm{P}}) \leq_T (Q, \leq_{\mathrm{Q}})$ y $(Q, \leq_{\mathrm{Q}}) \leq_T (P, \leq_{\mathrm{P}})$, lo cual se denota por $(P, \leq_{\mathrm{P}}) \equiv_T (Q, \leq_{\mathrm{Q}})$. También se pueden definir los cardinales de aditividad y cofinalidad asociados a un orden parcial $(P, \leq_{\mathrm{P}})$ de la siguiente manera: $\mathrm{add}(P) = \mathrm{mín}\left\{|A| : A \subseteq P \wedge (\forall p \in P)(\exists a \in A)\ a \not\leq_{\mathrm{P}} p\right\}$ y $\mathrm{cof}(P) = \mathrm{mín}\{|C| : C \subseteq P \wedge (\forall p \in P)(\exists c \in C)\ p \leq_{\mathrm{P}} c\}$.

Para $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ ideales sobre ω se define $\mathcal{I} \leq_T^* \mathcal{J}$ si se cumple que $(\mathcal{I}, \subseteq^*) \leq_T (\mathcal{J}, \subseteq^*)$. Si ambos ideales son P-ideales, entonces $\mathcal{I} \leq_T \mathcal{J}$ implica $\mathcal{I} \leq_T^* \mathcal{J}$. Las relaciones Katetov y Tukey entre ideales implican relaciones entre algunos de sus cardinales, como muestra lo siguiente, cuya prueba se encuentra en (Hernández-Hernández and Hrušák, 2007). Más aún, la misma prueba implica que para la definición general se tiene $\mathrm{add}(P) \geq \mathrm{add}(Q)$ y $\mathrm{cof}(P) \leq \mathrm{cof}(Q)$ siempre que $P \leq_T Q$ (se escribe $P \leq_T Q$ en lugar de $(P, \leq_{\mathrm{P}}) \leq_T (Q, \leq_{\mathrm{Q}})$ cuando no hay ambigüedad en los ordenes involucrados).

Proposición 1.2. Sean $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ ideales sobre ω.

a) Si $\mathcal{I} \leq_T^* \mathcal{J}$ entonces $\mathrm{add}^*(\mathcal{I}) \geq \mathrm{add}^*(\mathcal{J})$ y $\mathrm{cof}^*(\mathcal{I}) \leq \mathrm{cof}^*(\mathcal{J})$.

b) Si $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$ entonces $\mathrm{cov}^*(\mathcal{I}) \leq \mathrm{cov}^*(\mathcal{J})$.

Resultados importantes sobre la estructura de los ideales (Teorema 1.4) se deben a Mazur y Solecki ((Mazur, 1991), (Solecki, 1996, 1999)). Para formularlos hay que introducir la definición de submedida y algunos conceptos relacionados.

Definición 1.3. Una función $\varphi : \mathcal{P}(\omega) \to [0, \infty]$ es una *submedida* si cumple lo siguiente:

- $\varphi(\emptyset) = 0$
- $(\forall n \in \omega)\ \varphi(\{n\}) < \infty$ [Propia]
- $(\forall A, B \subseteq \omega)\ A \subseteq B \to \varphi(A) \leq \varphi(B)$ [Monótona]
- $\varphi(A \cup B) \leq \varphi(A) + \varphi(B)$ [Subaditiva]

Una submedida φ es *semicontinua por abajo* (denotado por *lsc*) si $\varphi(A) = \mathrm{lím}_n\, \varphi(A \cap n)$ para cada $A \subseteq \omega$.

Si φ es una lsc-submedida tal que $\varphi(\omega) = \infty$, entonces $\mathrm{Fin}(\varphi) = \{X \subseteq \omega : \varphi(X) < \infty\}$ es un ideal sobre ω, el *ideal finito* de φ. Si φ es una lsc-submedida tal que $\mathrm{lím}_n\, \varphi(\omega - n) > 0$ entonces $\mathrm{Exh}(\varphi) = \{X \subseteq \omega : \mathrm{lím}_n\, \varphi(X - n) = 0\}$ es un ideal sobre ω, el *ideal exhaustivo* de φ.

Teorema 1.4. Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω.

- **[Mazur]** $\mathcal{I}$ es F_σ si y sólo si existe una lsc-submedida φ tal que $\mathcal{I} = \mathrm{Fin}(\varphi)$.
- **[Solecki]** $\mathcal{I}$ es un P-ideal analítico si y sólo si existe una lsc-submedida φ tal que $\mathcal{I} = \mathrm{Exh}(\varphi)$.
- **[Solecki]** $\mathcal{I}$ es un P-ideal F_σ si y sólo si existe una lsc-submedida φ tal que $\mathcal{I} = \mathrm{Fin}(\varphi) = \mathrm{Exh}(\varphi)$.

Ideales Traza

Definición 2.5. Para $A \subseteq \mathcal{A}r$ se define a $[A]_\infty$ (en algunos textos denotado por πA), su conjunto de *ramas ideales*, como

$$[A]_\infty = \{f \in \mathcal{E}s : (\exists^\infty n \in \omega)\ f\restriction_n \in A\}.$$

Para $A, B \subseteq \mathcal{A}r$ tal que $A \subseteq^* B$, se cumple que $[A]_\infty \subseteq [B]_\infty$. Para $s \in A$ sea $\mathrm{rk}_A(s) = |\mathrm{pred}(s) \cap A|$, para cada natural n se define $A^{\langle n\rangle} = \{s \in A : \mathrm{rk}_A(s) = n\}$; así, se tiene que $[A]_\infty = \bigcap_{n\in\omega}\bigcup_{s\in A^{\langle n\rangle}}[s]$, por lo tanto $[A]_\infty$ es un G_δ-conjunto (intersección numerable de conjuntos abiertos). De manera recíproca, para todo $G \subseteq \mathcal{E}s$ que sea G_δ-conjunto existe $A \subseteq \mathcal{A}r$ con $[A]_\infty = G$; para mostrar esto sea $G = \bigcap\{G_n \subseteq \mathcal{E}s : n \in \omega,\ G_n \text{ abierto y } G_{n+1} \subseteq G_n\}$, entonces existe $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A}r)$ sucesión de anticadenas con $(\forall n \in \omega)(\forall t \in A_{n+1})(\exists s \in A_n)\ s \subsetneq t$ y tal que $(\forall n \in \omega)\ G_n = \bigcup\{[s] : s \in A_n\}$, con lo cual $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ cumple con $[A]_\infty = G$.

La siguiente definición, central para el trabajo, fue dada por J. Brendle en (Brendle and Yatabe, 2005).

Definición 2.6. Sea $\mathcal{L}$ un ideal sobre $\mathcal{E}s$. Se define a $\mathrm{tr}(\mathcal{L})$, el *ideal traza* de $\mathcal{L}$, como

$$\mathrm{tr}(\mathcal{L}) = \{A \subseteq \mathcal{A}r : [A]_\infty \in \mathcal{L}\},$$

el cual es, en efecto, un ideal sobre $\mathcal{A}r$.

Por definición, un conjunto $A \subseteq \mathcal{A}r$ tal que $[A]_\infty$ es finito pertenece a cualquier ideal traza, en particular toda anticadena y todo conjunto de la forma $\mathrm{nd}(f)$ para algún $f \in \mathcal{E}s$. Además, todo ideal traza es alto: si $X \subseteq \mathcal{A}r$ es infinito y existe $f \in [X]_\infty$ entonces $\mathrm{nd}(f) \cap X$ es infinito, si no existe tal f entonces $[X]_\infty = \emptyset$ y así existe $A \subseteq X$ una anticadena infinita.

Definición 2.7. Sea $\mathcal{L}$ un ideal sobre $\mathcal{E}s$. Se dirá que una función $i : \mathcal{L} \to \mathrm{tr}(\mathcal{L})$ es *arbórea para* $\mathcal{L}$ si cumple con $(\forall L \in \mathcal{L})\ L \subseteq [i(L)]_\infty$. Si tal función existe se dice que el ideal $\mathcal{L}$ es *arbóreo*.

De las observaciones hechas a la definición 2.5, un ideal es arbóreo si y sólo si tiene una base de G_δ-conjuntos. Si $\mathcal{L}, \mathcal{K}$ son ideales sobre $\mathcal{E}s$, entonces $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ implica $\mathrm{tr}(\mathcal{L}) \subseteq \mathrm{tr}(\mathcal{K})$ y el recíproco se cumple si $\mathcal{L}$ es arbóreo. Además, una función arbórea para $\mathcal{L}$ es testigo de $(\mathcal{L}, \subseteq) \leq_T (\mathrm{tr}(\mathcal{L}), \subseteq^*)$; este hecho implica la siguiente proposición.

Proposición 2.8. Sea $\mathcal{L}$ un ideal arbóreo sobre $\mathcal{E}s$.

a) $\mathrm{cof}(\mathcal{L}) \leq \mathrm{cof}^*(\mathrm{tr}(\mathcal{L}))$.

b) $\mathrm{add}^*(\mathrm{tr}(\mathcal{L})) \leq \mathrm{add}(\mathcal{L})$.

Para un ideal $\mathcal{L}$ sobre $\mathcal{E}s$ sea $\mathcal{L}^\delta$ el ideal generado por los G_δ-conjuntos de $\mathcal{L}$. Se define el cardinal $\mathrm{add}_\delta(\mathcal{L}) = \mathrm{add}\left(\mathcal{L}^\delta\right)$ y de manera análoga se definen los otros tres cardinales asociados a $\mathcal{L}^\delta$. Se tiene entonces que $\mathrm{tr}(\mathcal{L}) = \mathrm{tr}\left(\mathcal{L}^\delta\right)$ y que $\mathcal{L}$ es arbóreo si y sólo si $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\delta$, en este caso $\mathrm{non}_\delta(\mathcal{L}) = \mathrm{non}(\mathcal{L})$ y $\mathrm{cov}_\delta(\mathcal{L}) = \mathrm{cov}(\mathcal{L})$, y en general cumplen lo siguiente.

Proposición 2.9. Sea $\mathcal{L}$ un ideal sobre $\mathcal{E}s$.

a) $\mathrm{cov}(\mathcal{L}) \leq \mathrm{cov}_\delta(\mathcal{L}) \leq \mathrm{cov}^*(\mathrm{tr}(\mathcal{L}))$.

b) $\mathrm{non}^*(\mathrm{tr}(\mathcal{L})) \leq \mathrm{non}_\delta(\mathcal{L}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{L})$.

Demostración. Como $\mathcal{L}^\delta \subseteq \mathcal{L}$, se sigue directo de la definición que $\mathrm{cov}(\mathcal{L}) \leq \mathrm{cov}_\delta(\mathcal{L})$ y que $\mathrm{non}_\delta(\mathcal{L}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{L})$.

Para a). Sea $\kappa < \mathrm{cov}_\delta(\mathcal{L})$, $\mathcal{A} \in [\mathrm{tr}(\mathcal{L})]^\kappa$ y $f \in \mathcal{E}s$ con $f \notin \bigcup_{A\in\mathcal{A}}[A]_\infty$, entonces se tiene que $|\mathrm{nd}(f)| = \aleph_0$ y $(\forall A \in \mathcal{A})\ |\mathrm{nd}(f) \cap A| < \aleph_0$, con lo cual $\kappa < \mathrm{cov}^*(\mathrm{tr}(\mathcal{L}))$.

Para b). Para $Z \notin \mathcal{L}^\delta$ sea $\mathcal{X} = \{\mathrm{nd}(f) : f \in Z\} \subseteq [\mathcal{A}r]^\omega$. Si existe $A \in \mathrm{tr}(\mathcal{L})$ con $(\forall f \in Z)\ |\mathrm{nd}(f) \cap A| = \aleph_0$ entonces $Z \subseteq [A]_\infty$, lo cual no puede ocurrir. Por tanto $\mathcal{X}$ cumple la definición para $\mathrm{non}^*(\mathrm{tr}(\mathcal{L}))$ y la desigualdad se obtiene. ■

Corolario 2.10. Sea $\mathcal{L}$ un σ-ideal sobre $\mathcal{E}s$, si $\mathrm{non}_\delta(\mathcal{L}) = \aleph_0$ entonces $\mathcal{L}$ no es arbóreo y $\mathrm{tr}(\mathcal{L})$ no es un P-ideal.

Demostración. Se tiene que existe $A \in \mathcal{L} - \mathcal{L}^\delta$ numerable, el cual es testigo de que $\mathcal{L}$ no es arbóreo. Luego, como $\mathrm{add}^*(\mathrm{tr}(\mathcal{L})) \leq \mathrm{non}^*(\mathrm{tr}(\mathcal{L})) \leq \aleph_0$, $\mathrm{tr}(\mathcal{L})$ no es un P-ideal. ■

En resumen, para $\mathcal{L}$ un ideal sobre $\mathcal{E}s$ se cumple el siguiente diagrama entre los cardinales aquí definidos.

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{cof}^*(\mathrm{tr}(\mathcal{L})) & \\
\mathrm{cov}^*(\mathrm{tr}(\mathcal{L})) \arrow[ur] & \mathrm{cof}_\delta(\mathcal{L}) \arrow[u] & \mathrm{non}(\mathcal{L}) \\
\mathrm{cov}_\delta(\mathcal{L}) \arrow[u] \arrow[ur] & & \mathrm{non}_\delta(\mathcal{L}) \arrow[u] \arrow[ul] \\
\mathrm{cov}(\mathcal{L}) \arrow[u] & \mathrm{add}_\delta(\mathcal{L}) \arrow[ul] \arrow[ur] & \mathrm{non}^*(\mathrm{tr}(\mathcal{L})) \arrow[u] \\
& \mathrm{add}^*(\mathrm{tr}(\mathcal{L})) \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Se puede definir otro tipo de ideales traza usando conjuntos compactos. Para ello sea P un espacio Polaco (para el ejemplo que se dará después basta considerar $P = 2^\omega$), se define $\mathcal{K}(P) = \{K \subseteq P : K \text{ es compacto}\}$. Se considera a $\mathcal{K}(P)$ con la topología de Vietoris (ver (Hernández-Hernández, 2021)).

Definición 2.11. Sea P un espacio Polaco y $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}(P)$.

- $\mathcal{I}$ es *ideal* si es cerrado bajo uniones finitas y subconjuntos compactos, es decir, $(\forall F \in [\mathcal{I}]^{<\omega})\ \bigcup F \in \mathcal{I}$ y $(\forall K \in \mathcal{I})(\forall L \in \mathcal{K}(P))\ L \subseteq K \to L \in \mathcal{I}$.
- Un ideal $\mathcal{I}$ es *σ-ideal* si es cerrado bajo uniones numerables que sean compactas, es decir, cumple con $(\forall C \in [\mathcal{I}]^\omega)\ \bigcup C \in \mathcal{K}(P) \to \bigcup C \in \mathcal{I}$.

Dougherty, Kechris, Louveau y Woodin probaron que para $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}(P)$, $\mathcal{I}$ es un σ-ideal analítico si y sólo si $\mathcal{I}$ es un G_δ-ideal ((Kechris, 1991) y (Kechris et al., 1987)). De manera más general, si $X \subseteq P$ se define $\mathcal{K}(X) = \{K \in \mathcal{K}(P) : K \subseteq X\}$. Solecki define la propiedad $(*)$ para un ideal $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}(P)$ dada por $(\forall \mathcal{X} \in [\mathcal{I}]^\omega)(\exists G \subseteq P)$ G *es* G_δ, $\bigcup \mathcal{X} \subseteq G \ \wedge\ \mathcal{K}(G) \subseteq \mathcal{I}$; lo cual es más fuerte a ser σ-ideal. Más aún, él prueba que si un ideal tiene la propiedad $(*)$ y es analítico o su complemento es analítico, entonces es un G_δ-ideal (Solecki, 2011).

Definición 2.12. Sea $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{E}s)$ un ideal. Se define a $\mathrm{tr}_{\mathcal{K}}(\mathcal{I})$, el *ideal $\mathcal{K}$-traza* de $\mathcal{I}$, como

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{K}}(\mathcal{I}) = \langle\{T \subseteq \mathcal{A}r : T \text{ es árbol bien podado y } [T] \in \mathcal{I}\}\rangle$$

Si $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{E}s)$ es analítico, entonces $\mathrm{tr}_{\mathcal{K}}(\mathcal{I})$ también lo es. Además, no necesariamente $\mathrm{tr}_{\mathcal{K}}(\mathcal{I})$ es un ideal alto (como se verá en la sección de ejemplos). En este caso el único cardinal relevante es su cofinalidad, pero de la definición se sigue fácilmente que $\mathrm{cof}(\mathrm{tr}_{\mathcal{K}}(\mathcal{I})) = \mathrm{cof}(\mathcal{I})$.

Ejemplos

Gracias al Corolario 2.10 se puede mostrar que ninguno de los ideales $\mathcal{M}$ y $\mathcal{K}_\sigma$ es arbóreo, y sus respectivos ideales traza no son P. En efecto, por el Teorema de Categoría de Baire, todo G_δ-conjunto denso de $\mathcal{E}s$ es de segunda categoría, y como los conjuntos σ-compactos de ω^ω son magros, entonces $\mathrm{non}_\delta(\mathcal{M}) = \mathrm{non}_\delta(\mathcal{K}_\sigma) = \aleph_0$. Como se mostrará, $\mathcal{N}$ sí es arbóreo y su traza es un P-ideal.

$\mathrm{tr}(\mathcal{N})$

Teorema 3.13. Existe una lsc-submedida $\varphi : \mathcal{P}(2^{<\omega}) \to [0,1]$, tal que $\mathrm{tr}(\mathcal{N}) = \mathrm{Exh}(\varphi)$.

Demostración. Como antes, para $A \subseteq 2^{<\omega}$ sea $A^{\langle 0\rangle} = \{s \in A : \mathrm{pred}(s) \cap A = \emptyset\}$. Sea $\varphi : \mathcal{P}(2^{<\omega}) \to [0,1]$ definida por

$$\varphi(A) = \sum_{s \in A^{\langle 0\rangle}} 2^{-|s|}.$$

Es claro que $\varphi(\emptyset) = 0$. Ahora, si $A \subseteq B$ entonces para cada $s \in B^{\langle 0\rangle} - A^{\langle 0\rangle}$ y cada $A_s \subseteq A^{\langle 0\rangle}$ con $(\forall t \in A_s)\ s \subseteq t$ se tiene que $2^{-|s|} \geq \sum_{t \in A_s} 2^{-|t|}$, con lo cual $\varphi(A) \leq \varphi(B)$. Por último, como $(A \cup B)^{\langle 0\rangle} \subseteq A^{\langle 0\rangle} \cup B^{\langle 0\rangle}$ se tiene que $\varphi(A \cup B) \leq \varphi(A) + \varphi(B)$. Esto muestra que φ es una submedida. Luego, como $\bigcup_{n\in\omega}(A \cap 2^{<n})^{\langle 0\rangle} = A^{\langle 0\rangle}$ y φ se define como una serie convergente, se tiene que φ es una lsc-submedida.

De la definición de φ se tiene que $\mathrm{Exh}(\varphi) \subseteq \mathrm{tr}(\mathcal{N})$. Sea $A \notin \mathrm{Exh}(\varphi)$ y sea $\varepsilon > 0$ testigo de esto, es decir, $\varphi(A - 2^{<n}) \geq \varepsilon$ para cada $n \in \omega$. Sea $U_n = \bigcup\{[s] : s \in (A - 2^{<n})^{\langle 0\rangle}\}$, entonces $\{U_n : n \in \omega\}$ es una sucesión $\subseteq$-decreciente de conjuntos con medida no menor a ε, con lo cual $\bigcap_{n\in\omega} U_n$ tiene medida positiva, pero $\bigcap_{n\in\omega} U_n = [A]_\infty$ con lo cual $A \notin \mathrm{tr}(\mathcal{N})$. ■

El ideal $\mathcal{N}$ es arbóreo porque todo conjunto nulo es subconjunto de un G_δ-conjunto nulo. En (Hernández-Hernández and Hrušák, 2007), los autores demuestran que $\mathcal{I}_{1/n} \hookrightarrow \mathrm{tr}(\mathcal{N}) \hookrightarrow \mathcal{Z}$ (un ideal $\mathcal{I}$ sobre X está *encajado* en un ideal $\mathcal{J}$ sobre Y, denotado por $\mathcal{I} \hookrightarrow \mathcal{J}$, si existe $e : X \to Y$ inyectiva tal que $\{e[I] : I \in \mathcal{I}\} \subseteq \mathcal{J}$ es un ideal). Donde $\mathcal{I}_{1/n}$ es un *ideal sumable* dado por

$$\mathcal{I}_{1/n} = \left\{A \subseteq \omega : \sum\left\{1/n : n \in A - \{0\}\right\} < \infty\right\}$$

y $\mathcal{Z}$ es el *ideal de densidad asintóticamente zero* dado por

$$\mathcal{Z} = \left\{A \subseteq \omega : \lim_n \frac{|A \cap n|}{n} = 0\right\}$$

Esto, junto con la siguiente caracterización de conjuntos nulos de (Bartoszyński and Judah, 1995), muestra que existe una función arbórea para $\mathcal{N}$ cuya imagen es el encaje de $\mathcal{I}_{1/n}$ en $\mathrm{tr}(\mathcal{N})$.

Teorema 3.14. Sea $X \subseteq 2^\omega$. $X \in \mathcal{N}$ si y sólo si existe $A \subseteq 2^{<\omega}$ tal que $(\forall f \in X)(\exists^\infty n \in \omega)\ f\restriction_n \in A$ y $\sum_{n\in\omega} {}^{|A\cap 2^n|}/_{2^n} < \infty$

El conocido como Teorema de Todorčević afirma que $\mathcal{I}_{1/n}$ es el ideal $\leq_T$-máximo entre los P-ideales analíticos (Todorčević, 1996). En (Bartoszyński and Judah, 1995) se prueba que $(\mathcal{I}_{1/n}, \subseteq^*) \equiv_T (\mathcal{N}, \subseteq)$, con lo cual $(\mathcal{I}, \subseteq^*) \leq_T (\mathcal{N}, \subseteq)$ para todo $\mathcal{I}$ P-ideal analítico sobre ω. Así sus cardinales cumplen con $\mathrm{add}^*(\mathcal{I}) \geq \mathrm{add}(\mathcal{N})$ y $\mathrm{cof}^*(\mathcal{I}) \leq \mathrm{cof}(\mathcal{N})$. Cuando $\mathcal{L}$ es un ideal arbóreo cuyo ideal traza es P-analítico, se cumple lo siguiente.

$$\mathrm{add}(\mathcal{L}) \geq \mathrm{add}^*(\mathrm{tr}(\mathcal{L})) \geq \mathrm{add}(\mathcal{N})$$
$$\mathrm{cof}(\mathcal{L}) \leq \mathrm{cof}^*(\mathrm{tr}(\mathcal{L})) \leq \mathrm{cof}(\mathcal{N})$$

En particular se tiene que $\mathrm{add}^*(\mathrm{tr}(\mathcal{N})) = \mathrm{add}(\mathcal{N})$ y $\mathrm{cof}^*(\mathrm{tr}(\mathcal{N})) = \mathrm{cof}(\mathcal{N})$.

En (Hernández-Hernández and Hrušák, 2007) se pregunta si todos los P-ideales, analíticos y altos son $\leq_T^*$-equivalentes. El siguiente resultado muestra que $\mathcal{I}_{1/n}$ y $\mathrm{tr}(\mathcal{N})$ sí lo son.

Proposición 3.15. Si $\mathcal{I}$ es un P-ideal analítico, $\mathcal{I} \leq_T^* \mathrm{tr}(\mathcal{N})$

Demostración. Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω y $\mathcal{L}$ un ideal arbóreo sobre 2^ω tales que $(\mathcal{I}, \subseteq^*) \leq_T (\mathcal{L}, \subseteq)$; sean entonces $F : \mathcal{I} \to \mathcal{L}$ y $F^* : \mathcal{L} \to \mathcal{I}$ testigos de $(\mathcal{I}, \subseteq^*) \leq_T (\mathcal{L}, \subseteq)$ y sea $i : \mathcal{L} \to \mathrm{tr}(\mathcal{L})$ una función arbórea. Se definen $G : \mathcal{I} \to \mathrm{tr}(\mathcal{L})$ y $G^* : \mathrm{tr}(\mathcal{L}) \to \mathcal{I}$ mediante $G(I) = i(F(I))$ y $G^*(A) = F^*([A]_\infty)$. Para $I \in \mathcal{I}$ y $A \in \mathrm{tr}(\mathcal{L})$ con $G(I) \subseteq^* A$ se tiene que $F(I) \subseteq [i(F(I))]_\infty \subseteq [A]_\infty$, por lo tanto $I \subseteq^* G^*(A)$ y así $\mathcal{I} \leq_T^* \mathrm{tr}(\mathcal{L})$. ■

$\mathrm{tr}(\mathcal{M})$

Como se mencionó, $\mathcal{M}$ no es un ideal arbóreo, y el siguiente resultado es otra manera de probar esto.

Proposición 3.16. $\mathcal{M}^\delta = \mathcal{NWD}$, donde $\mathcal{NWD} \subseteq \mathcal{P}(2^\omega)$ es el ideal de los conjuntos nunca densos.

Demostración. Sea M un G_δ-conjunto y magro, y sea U un abierto tal que $M \cap U$ es denso (en U). Como $M \cap U$ es G_δ-conjunto en U, entonces $M \cap U$ es comagro en U; por otro lado, como U es abierto entonces $M \cap U$ es magro en U, con lo cual $U = \emptyset$ y por lo tanto M es nunca denso. ■

Este resultado nos da la complejidad Borel de $\mathrm{tr}(\mathcal{M})$.

Teorema 3.17. $\mathrm{tr}(\mathcal{M})$ es un $\mathrm{F}_{\sigma\delta}$ ideal.

Demostración. Para t un nodo del árbol $2^{<\omega}$ se define $F_t = \{A \subseteq 2^{<\omega} : (\exists s \supseteq t)\ A \cap \langle s\rangle = \emptyset\}$, el cual es un F_σ-conjunto. Para un $A \subseteq 2^{<\omega}$ se cumple que $A \in F_t$ si y sólo si $[A]_\infty$ no es denso en el abierto $[t]$, con lo cual $(\forall t \in 2^{<\omega}) A \in F_t$ si y sólo si $[A]_\infty \in \mathcal{NWD}$, y por la proposición anterior se concluye que $\mathrm{tr}(\mathcal{M}) = \bigcap\{F_t : t \in 2^{<\omega}\}$. ■

En (Balcar et al., 2004) se define un orden $\prec$ en $2^{<\omega}$ tal que $s \prec t$ si y sólo si se cumple una de tres opciones: $t^\frown\langle 0\rangle \subseteq s$, $s^\frown\langle 1\rangle \subseteq t$, o bien $s(\Delta(s,t)) < t(\Delta(s,t))$; en donde $\Delta(s,t) = \min\{n \in \omega : s(n) \neq t(n)\}$ definido para s, t incompatibles. Ocurre entonces que el orden usual de los números racionales $\mathbb{Q}$ es isomorfo a este orden de $2^{<\omega}$, con lo cual son homeomorfos como espacios topológicos y se cumplen los siguientes puntos (para (X,τ) un espacio topológico, $\mathcal{W} \subseteq \tau$ es una *π-base* si $(\forall\, U \in \tau - \{\emptyset\})\,(\exists\, W \in \mathcal{W})\ W \subseteq U$).

- $\{\langle s\rangle : s \in 2^{<\omega}\}$ es una π-base para $\mathbb{Q}$.
- Sea $D \subseteq 2^{<\omega}$. D es denso en la topología de $\mathbb{Q}$ si y sólo si $(\forall\, s \in 2^{<\omega})\,(\exists\, t \in D)\ s \subseteq t$.
- Sea $N \subseteq 2^{<\omega}$. N es nunca denso en la topología de $\mathbb{Q}$ si y sólo si $(\forall\, s \in 2^{<\omega})\,(\exists\, t \supseteq s)\ N \cap \langle t\rangle = \emptyset$.

De esto y la prueba del Teorema 3.17 se sigue que $\mathrm{tr}(\mathcal{M}) = \mathrm{nwd} = \{N \subseteq \mathbb{Q} : N \text{ es nunca denso}\}$. En la misma publicación se prueba que $\mathrm{cov}^*(\mathrm{nwd}) = \mathrm{cov}(\mathcal{M})$ y $\mathrm{cof}(\mathrm{nwd}) = \mathrm{cof}(\mathcal{M})$.

$\mathrm{tr}(\mathcal{K}_\sigma)$

De manera similar que en $2^{<\omega}$, se puede definir en $\omega^{<\omega}$ un orden $\prec$ isomorfo al orden de $\mathbb{Q}$, el único cambio es en el segundo caso: $s \prec t$ si $s^\frown\langle n\rangle \subseteq t$ para algún $n \geq 1$. A continuación se probarán resultados análogos a los anteriores.

Proposición 3.18. Sea $X \subseteq \omega^{<\omega}$ y para $s,t \in \omega^{<\omega}$ sean $(s,t)_\prec = \{r \in \omega^{<\omega} : s \prec r \prec t\}$ y $\langle s\rangle^0 = (s^\frown\langle 0\rangle, s)_\prec$.

a) $\Pi = \left\{\langle s\rangle^0 : s \in \omega^{<\omega}\right\}$ es π-base para la topología de $\mathbb{Q}$.

b) X es denso en $\mathbb{Q}$ si y sólo si $(\forall\, s \in \omega^{<\omega})\,(\exists\, t \in X)\ s \subseteq t$.

c) X es nunca denso en $\mathbb{Q}$ si y sólo si $(\forall\, s \in \omega^{<\omega})\,(\exists\, t \supseteq s)\ X \cap \langle t\rangle = \emptyset$

Demostración. a). Sea $r \in \langle s\rangle^0$, entonces $r \in \langle s^\frown\langle 0\rangle\rangle$, ya que si fuera incompatible con $s^\frown\langle 0\rangle$ o fuera segmento inicial propio de s, entonces o bien $r \prec s, s^\frown\langle 0\rangle$ o bien $r \succ s, s^\frown\langle 0\rangle$. Si $r \in \langle s^\frown\langle 0\rangle^\frown\langle n\rangle\rangle$ para algún $n \geq 1$ entonces $s^\frown\langle 0\rangle \prec r \prec s$, y si $r \in \langle s^\frown\langle 0\rangle^\frown\langle 0\rangle\rangle$ entonces $r \prec s^0$. Se concluye entonces que $\langle s\rangle^0 = \bigcup\left\{\langle s^\frown\langle 0\rangle^\frown\langle n\rangle\rangle : n \geq 1\right\}$.

Sean $s,t \in \omega^{<\omega}$ con $s \prec t$. Si $s^\frown\langle n\rangle \subseteq t$ para algún $n \geq 1$, se tiene que $\langle t\rangle^0 \subseteq (s,t)_\prec$; en los otros posibles casos para $s \prec t$ se cumple que $\langle s^\frown\langle 1\rangle\rangle^0 \subseteq (s,t)_\prec$. Por lo tanto Π es π-base.

Las partes b) y c) se siguen fácilmente de la parte a). ■

Como se mencionó, cada conjunto σ-compacto es magro, así $\mathrm{tr}(\mathcal{K}_\sigma) \subseteq \mathrm{tr}(\mathcal{M}) = \mathrm{nwd}$. Hasta el momento, el autor no conoce más sobre este ideal, pero continúa trabajando en ello.

$\mathrm{tr}_\mathcal{K}(conv_0)$

Se define a $conv_0$ como el ideal en $\mathcal{K}(2^\omega)$ generado por las sucesiones de 2^ω que convergen a 0, esto es

$$conv_0 = \{s \in (2^\omega)^\omega : s \to 0\} \cup [2^\omega]^{<\omega}$$

Éste no es un σ-ideal. Además, puesto que para una familia $\mathcal{S}$, de tamaño menor que $\mathfrak{c}$, de sucesiones que convergen a 0 existe una sucesión que también converge a 0 y que no es subsucesión de ningún elemento de $\mathcal{S}$, entonces $\mathrm{cof}(conv_0) = \mathfrak{c}$.

Se tiene que $\mathrm{tr}_\mathcal{K}(conv_0) = \langle \mathcal{T}_0\rangle$, donde $T \in \mathcal{T}_0$ si y sólo si T es un árbol bien podado tal que $[T] \subseteq 2^\omega$ es una sucesión que converge a 0. Para mostrar que este ideal tiene la propiedad de ser $\leq_T$-máximo entre todos los ideales de tamaño menor o igual a $\mathfrak{c}$ se necesitará hacer uso de las siguientes definiciones.

Definición 3.19. Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω.

- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ es *débilmente acotado* (denotado por *web*) si es infinito y $(\forall\, X \in [\mathcal{A}]^\omega)\,(\exists\, Y \in [X]^\omega)\ \bigcup Y \in \mathcal{I}$.
- $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$ es *fuertemente no-acotado* (denotado por *sun*) si es infinito y $(\forall\, X \in [\mathcal{B}]^\omega)\ \bigcup X \notin \mathcal{I}$.

Para $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$, $\mathcal{A}$ no es *web* si y sólo si $(\exists\, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A})\ \mathcal{B}$ es *sun*. También se tiene que si $C \subseteq \mathcal{I}$ es acotado entonces es *web*. Cuando un ideal $\mathcal{I}$ cumple el recíproco, es decir, que todo conjunto *web* es acotado, se dirá que es *web-regular*. Todo ideal alto no es *web*-regular porque $\{\{n\} : n \in \omega\}$ es *web* y no acotado.

Teorema 3.20. $\mathrm{tr}_\mathcal{K}(conv_0)$ es un ideal *web*-regular.

Demostración. Para $K \in \mathcal{K}(2^\omega)$ sea $T_K \subseteq 2^{<\omega}$ el árbol bien podado tal que $[T_K] = K$. De la definición de $\mathrm{tr}_\mathcal{K}(conv_0)$ se sigue directamente que un conjunto $A \subseteq \mathrm{tr}_\mathcal{K}(conv_0)$ es acotado si y sólo si $(\exists\, K \in \mathcal{K}(2^\omega))\ \bigcup A \subseteq T_K$ y $K' \subseteq \{0\}$; donde K' denota el conjunto de puntos de acumulación de $K \subseteq 2^\omega$.

Sea $t_0 = \langle 1\rangle$ y $t_{n+1} = \langle 0\rangle^\frown t_n$. Así $\{[t_n] : n \in \omega\} \cup \{\{0\}\}$ es partición de 2^ω. Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{tr}_\mathcal{K}(conv_0)$ un conjunto *web*. Si existe n tal que existe $\{a_k : k \in \omega\} \subseteq \langle t_n\rangle \cap \bigcup \mathcal{A}$ anticadena infinita entonces, refinando la anticadena de ser necesario, existe $\mathcal{B} = \{A_k \in \mathcal{A} : k \in \omega\}$ numerable con $(\forall\, k \in \omega)\, a_k \in A_k$. Se tiene entonces que para todo $Y \subseteq \mathcal{B}$ numerable y todo $K \in \mathcal{K}(2^\omega)$, si $\bigcup Y \subseteq T_K$ entonces K tiene un punto de acumulación en $[t_n]$; así $\mathcal{B}$ es un conjunto *sun* y $\mathcal{A}$ no sería un conjunto *web*. Ocurre entonces que para todo $n \in \omega$, el conjunto $\langle t_n\rangle \cap \bigcup \mathcal{A}$ no contiene ninguna anticadena infinita.

De lo anterior se sigue que $(\forall\, n \in \omega)\ |[\langle t_n\rangle \cap \bigcup \mathcal{A}]_\infty| < \aleph_0$. Entonces, puesto que todo subconjunto infinito de $\mathrm{tr}(\emptyset)$ contiene una anticadena infinita, para cada $n \in \omega$ existe $F_n \subseteq [t_n]$ finito tal que $\langle t_n\rangle \cap \bigcup \mathcal{A} \subseteq T_{F_n}$. Así, $\mathcal{A}$ está acotado por T_K donde $K = \bigcup\{F_n : n \in \omega\} \cup \{0\} \in conv_0$. ■

$\mathrm{tr}_\mathcal{K}(conv_0)$ contiene conjuntos *sun* de tamaño $\mathfrak{c}$; en efecto, basta considerar a $I \subseteq 2^\omega$ un conjunto compacto de tamaño $\mathfrak{c}$ que no contiene a 0, para cada $\mathcal{X} \subseteq \{\mathrm{nd}(x) : x \in I\}$ numerable, se cumple que $[\mathcal{X}]$ converge a un punto distinto de 0, con lo cual $\mathcal{X}$ no está acotado en $\mathrm{tr}_\mathcal{K}(conv_0)$.

Un orden parcial $(P, \leq_P)$ es *dirigido* si cumple con $(\forall\, p,q \in P)\,(\exists\, r \in P)\ p,q \leq_P r$. Utilizando a la contención como orden, cualquier ideal $\mathcal{I}$ es dirigido.

Teorema 3.21. Si $(P, \leq_P)$ es un orden dirigido con $|P| \leq \mathfrak{c}$, entonces $P \leq_T \mathrm{tr}_\mathcal{K}(conv_0)$.

Demostración. Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{tr}_\mathcal{K}(conv_0)$ un conjunto *sun* de tamaño $\mathfrak{c}$ y sea $f : P \to \mathcal{B}$ una función inyectiva. Sea $X \subseteq P$ un conjunto no $\leq_P$-acotado, entonces X es infinito y como f es inyectiva entonces $f[X] \subseteq \mathcal{B}$ también es infinito, con lo cual no es acotado en $\mathrm{tr}_\mathcal{K}(conv_0)$. Se concluye así que $P \leq_T \mathrm{tr}_\mathcal{K}(conv_0)$. ■

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Fernando Hernández Hernández, quién siempre me está animando y apoyando no sólo en el maravilloso estudio de la matemática. A los revisores anónimos por su tiempo y las observaciones que ayudaron a mejorar este escrito, al comité editorial por aceptar mi trabajo. A Ahn, por su cariñosa paciencia y aliento. El autor agradece también el apoyo de la beca CONACyT con número CVU 815237.

Referencias

Balcar, B., Hernández-Hernández, F., and Hrušák, M. (2004). Combinatorics of dense subsets of the rationals. *Fundamenta Mathematicae*, 183(1):59–80.

Bartoszyński, T. and Judah, H. (1995). *Set Theory. On the Structure of the real line*. A K Peters.

Blass, A. (2010). Combinatorial cardinal characteristics of the continuum. In Foreman, M. and Kanamori, A., editors, *Handbook of Set Theory*, pages 395–489. Springer.

Brendle, J. and Yatabe, S. (2005). Forcing indestructibility of mad families. *Annals of Pure and Applied Logic*, 132(2):271–312.

Galicki, A. (2013). Aspects of classical descriptive set theory.

Hernández-Hernández, F. (2014). *Teoría de conjuntos. Una introducción*. Aportaciones Matemáticas.

Hernández-Hernández, F. (2021). *Curso de topología. Un enfoque conjuntista*. Aportaciones Matemáticas.

Hernández-Hernández, F. and Hrušák, M. (2007). Cardinal invariants of analytic p-ideals. *Canadian Journal of Mathematics*, 59(3):575–595.

Kechris, A. S. (1991). Hereditary properties of the class of closed sets of uniqueness for trigonometric series. *Israel Journal of Mathematics*, 73(2):189–198.

Kechris, A. S., Louveau, A., and Woodin, W. H. (1987). The structure of σ-ideals of compact sets. *Transactions of the American Mathematical Society*, 301:263–288.

Kunen, K. (1980). *Set theory: an introduction to independence proofs*. North-Holland.

Mazur, K. (1991). F_σ-ideals and $\omega_1\omega_1^*$-gaps in the boolean algebras $\mathcal{P}(\omega)/I$. *Fundamenta Mathematicae*, 138(2):103–111.

Solecki, S. (1996). Analytic ideals. *Bulletin of Symbolic Logic*, 2:339–348.

Solecki, S. (1999). Analytic ideals and their applications. *Annals of Pure and Applied Logic*, 99:51–72.

Solecki, S. (2011). G_δ ideals of compact sets. *Journal of the European Mathematical Society*, 4.

Todorčević, S. (1996). Analytic gaps. *Fundamenta Mathematicae*, 150.