

Sobre la igualdad entre la envolvente convexa de dos círculos con la unión de cierta familia de elipses

On the equality of the convex hull of two circles with the union of certain family of ellipses

Benjamín A. Itzá-Ortiz ^a, Rubén A. Martínez-Avendaño ^b, Victor Nopal-Coello ^{a,*}, Rafael Villarroel-Flores ^a

^aÁrea Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México.

^bDepartamento Académico de Matemáticas, Instituto Tecnológico Autónomo de México, 01080, Ciudad de México, Mexico.

Resumen

En este artículo damos una prueba alternativa y elemental a un resultado propuesto por los primeros dos autores sobre la expresión de la envolvente convexa de dos círculos como la unión de una familia no-numerable de elipses. Las herramientas empleadas incluyen cálculo elemental y geometría analítica. Es de hacer notar que el empleo de estas herramientas, permitieron la demostración de un resultado un poco más general que el original.

Palabras Clave: Conjuntos convexos, envolvente convexa, elipses

Abstract

In this article, we propose an alternative and elementary proof to a result proposed by the first two authors about the expression of certain convex hull of two circles as the union of an uncountable family of ellipses. The tools employed include elementary calculus and analytic geometry. As a matter of fact, the tools employed allowed the proof of a slightly more general result than the original.

Keywords: Convex sets, convex hull, ellipses.

1. Introducción

Un subconjunto convexo A de \mathbb{R}^n es aquel que satisface que para cualesquiera dos puntos \vec{x} y \vec{y} en A , el segmento de recta que une a \vec{x} y \vec{y} está contenido en A . Los conjuntos convexos son usados en una amplia variedad de aplicaciones en las ciencias, por ejemplo en investigación de operaciones (Hillier and Lieberman, 2015), teoría de operadores (Brown and Carl, 1977), geometría (Leonard and Lewis, 2015), entre otros.

Una clase importante de conjuntos convexos en el plano cartesiano se define por medio del rango numérico de operadores acotados en espacios de Hilbert (Martínez-Avendaño and Rosenthal, 2007). En (Itzá-Ortiz and Martínez-Avendaño, 2021) se demuestra que el rango numérico de ciertos operadores puede representarse como la unión infinita de otros conjuntos convexos más sencillos. En particular, la proposición 3.4 en (Itzá-Ortiz and Martínez-Avendaño, 2021) afirma que la envolvente

convexa de la unión de los círculos con centro en 1 y -1 y radio $1/2$ es igual a la cerradura de la envolvente convexa de la unión infinita de ciertas elipses. En este trabajo nos proponemos dar una prueba alternativa y elemental de dicho resultado. Las herramientas que se usarán consisten de cálculo elemental y geometría analítica. Una de las ventajas en el empleo de estas herramientas elementales es el hecho de que permiten reducir el conjunto sobre el que se toma la unión de las elipses en la unión infinita y permiten omitir la cerradura en la envolvente convexa. Técnicas elementales han sido usadas en la literatura para establecer la igualdad de conjuntos convexos con uniones infinitas de elipses, por ejemplo, en (Hernández-Becerra and Itzá-Ortiz, 2016).

Las elipses que se ocupan en el artículo se definen a continuación.

Definición 1.1. Sea $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y sea $w = 1 + e^{i\phi}$. Denote-

* Autor para correspondencia: ving89@hotmail.com.

Correo electrónico: itza@uaeh.edu.mx (Benjamín Alfonso Itzá-Ortiz), rubeno71@gmail.com (Rubén Alejandro Martínez-Avendaño), ving89@hotmail.com (Victor Nopal-Coello), rafaelv@uaeh.edu.mx (Rafael Villarroel-Flores).

mos por γ_ϕ la elipse con focos en $\pm\sqrt{w}$ y eje mayor de longitud $1 + |w|$. Denotaremos por E_ϕ al conjunto convexo cerrado con frontera γ_ϕ .

El resultado principal que se demuestra en el artículo es el siguiente. Compararlo con (Itzá-Ortiz and Martínez-Avendaño, 2021, Proposición 3.4), en donde se toma la unión sobre todo $\phi \in [0, 2\pi)$ y además se toma la cerradura de la envolvente convexa de la unión de las elipses.

Teorema 1.2. Sean A y B las circunferencias de radio $1/2$ y centro en 1 y -1 respectivamente. Entonces

$$\text{conv}(A \cup B) = \bigcup_{\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} E_\phi.$$

Dividimos el resto de este trabajo en tres secciones. En la sección 2 se calcula la ecuación de la elipse γ_ϕ , la cual se utiliza en las demás secciones. En la sección 3 se encuentran los puntos de intersección de la elipse γ_ϕ con las dos circunferencias A y B de radio $\frac{1}{2}$ y centros en ± 1 . Finalmente, en la sección 4 se demuestra el teorema 1.2 mediante la comprobación de las dos inclusiones necesarias para obtener la igualdad.

2. La ecuación de la elipse γ_ϕ

En esta sección obtenemos la ecuación de la elipse γ_ϕ dada en la definición 1.1.

A lo largo de este artículo, se ocupará la siguiente notación:

$$\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], w = 1 + e^{i\phi} \text{ y } \theta = \frac{\phi}{4}. \tag{1}$$

En primer lugar, calcularemos las coordenadas de los focos de γ_ϕ en números complejos, como se muestra en el siguiente lema. Aunque este resultado se observó en (Itzá-Ortiz and Martínez-Avendaño, 2021), incluimos una prueba aquí para el beneficio del lector.

Lema 2.1. Sean ϕ , w y θ como en (1). Entonces, $\theta = \arg(\sqrt{w})$ y $w = 2 \cos(2\theta)e^{2i\theta}$. Por lo tanto, los focos de la elipse γ_ϕ son $\pm \sqrt{|w|}e^{i\theta}$.

Demostración. Notemos que $|e^{i\phi}| = 1 = |w - e^{i\phi}|$, por lo tanto el triángulo, en el plano complejo, que tiene vértices en los puntos $e^{i\phi}$, w y 0 , es un triángulo isósceles (ver Figura 1) con lados iguales de medida 1 y ángulos iguales de medida α .

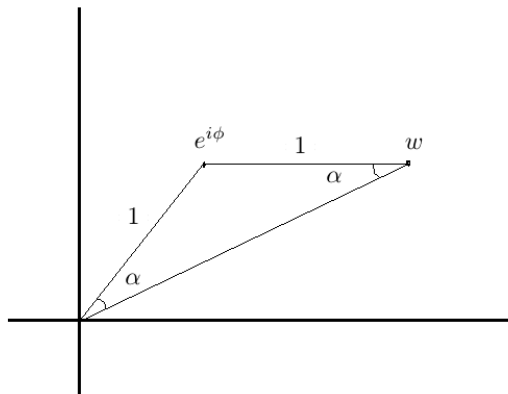


Figura 1: Triángulo $(e^{i\phi}, w, 0)$

Como la recta que pasa por los puntos $e^{i\phi}$ y w es paralela al eje real, por ser ángulos alternos internos entre paralelas, entonces el argumento de w es α , es decir, $w = |w|e^{i\alpha}$.

De lo anterior concluimos que $2\alpha = \phi$ y por lo tanto $\alpha = 2\theta$, lo que implica que $w = |w|e^{2i\theta}$.

Por otro lado, veamos que

$$\begin{aligned} |w| &= |1 + e^{i\phi}| = |1 + \cos(\phi) + i \sin(\phi)| \\ &= \sqrt{(1 + \cos(\phi))^2 + \sin^2(\phi)} \\ &= \sqrt{1 + 2 \cos(\phi) + \cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)} \\ &= \sqrt{2(1 + \cos(\phi))} \\ &= 2 \sqrt{\frac{1 + \cos(4\theta)}{2}} \\ &= 2 \sqrt{\cos^2(2\theta)} \\ &= 2 \cos(2\theta). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $w = 2 \cos(2\theta)e^{2i\theta}$, lo que implica que la raíz cuadrada (positiva y negativa) de w , es decir, los focos de γ_ϕ son

$$\pm \sqrt{w} = \pm \sqrt{|w|}e^{i\theta} = \pm \sqrt{2 \cos(2\theta)}e^{i\theta}.$$

□

A partir del lema 2.1 el siguiente corolario es inmediato. Comparar con el lema 3.2 en (Itzá-Ortiz and Martínez-Avendaño, 2021), donde la ecuación de γ_ϕ está dada en números complejos.

Corolario 2.2. Las coordenadas en el plano cartesiano de los focos de la elipse E_ϕ son

$$\pm \left(\sqrt{2 \cos(2\theta)} \cos(\theta), \sqrt{2 \cos(2\theta)} \sin(\theta) \right).$$

Con estos focos y sabiendo la longitud del eje mayor, $1 + |w| = 1 + 2 \cos(2\theta)$, construimos la elipse.

Proposición 2.3. Sean ϕ y w como en (1). Entonces la elipse γ_ϕ , que tiene focos en $\pm\sqrt{w}$ y eje mayor de longitud $1 + |w|$, tiene ecuación general

$$x^2 + y^2(5 + 4 \cos(\phi)) - 4xy \sin(\phi) - \left(\frac{1 + 2 \cos(\phi)}{2} \right)^2 = 0. \tag{2}$$

Demostración. Usando el hecho de que la distancia del centro a cualquiera de los focos es $c = |\sqrt{w}| = \sqrt{2 \cos(2\theta)}$ y de que la longitud del eje mayor es $2a = 1 + |w| = 1 + 2 \cos(2\theta)$ calcularemos la ecuación de la elipse horizontal con centro en el origen. Luego rotaremos la elipse por un ángulo θ para que los focos queden exactamente en los puntos $\pm\sqrt{w}$.

Recordemos que la ecuación de la elipse con centro en el origen y eje focal paralelo al eje de las abscisas es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3}$$

donde $a = \frac{1}{2} + \cos(2\theta)$, $c = \sqrt{2 \cos(2\theta)}$ y

$$b^2 = a^2 - c^2 = \left(\frac{1}{2} + \cos(2\theta)\right)^2 - 2 \cos(2\theta) = \left(\frac{1}{2} - \cos(2\theta)\right)^2.$$

Sustituyendo estos valores en (3) obtenemos la ecuación de la elipse con eje focal paralelo al eje de las abscisas:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2} + \cos(2\theta)\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2} - \cos(2\theta)\right)^2} = 1.$$

Ahora rotaremos la elipse un ángulo θ . Para hacer esta rotación sustituimos x por $x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$ y y por $y \cos(\theta) - x \sin(\theta)$ en la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Notemos que la ecuación anterior es equivalente a la ecuación $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$. Sustituyendo tenemos

$$\begin{aligned} a^2 b^2 &= b^2 (x \cos(\theta) + y \sin(\theta))^2 + a^2 (y \cos(\theta) - x \sin(\theta))^2 \\ &= b^2 (x^2 \cos^2(\theta) + 2xy \sin(\theta) \cos(\theta) + y^2 \sin^2(\theta)) \\ &\quad + a^2 (y^2 \cos^2(\theta) - 2xy \sin(\theta) \cos(\theta) + x^2 \sin^2(\theta)) \\ &= x^2 (b^2 \cos^2(\theta) + a^2 \sin^2(\theta)) - 2xy (a^2 - b^2) \sin(\theta) \cos(\theta) \\ &\quad + y^2 (b^2 \sin^2(\theta) + a^2 \cos^2(\theta)). \end{aligned}$$

Calculando los coeficientes tenemos

$$\begin{aligned} a^2 b^2 &= \left(\frac{1}{2} + \cos(2\theta)\right)^2 \left(\frac{1}{2} - \cos(2\theta)\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} - \cos^2(2\theta)\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1 + \cos(4\theta)}{2}\right)^2 \\ &= \left(-\frac{1}{4} - \frac{\cos(\phi)}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1 + 2 \cos(\phi)}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2 \cos^2(\theta) + a^2 \sin^2(\theta) &= \left(\frac{1}{2} - \cos(2\theta)\right)^2 \cos^2(\theta) + \left(\frac{1}{2} + \cos(2\theta)\right)^2 \sin^2(\theta) \\ &= \left(\frac{1}{4} - \cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)\right) \cos^2(\theta) \\ &\quad + \left(\frac{1}{4} + \cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)\right) \sin^2(\theta) \\ &= \frac{1}{4} - \cos(2\theta) [\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)] + \cos^2(2\theta) \\ &= \frac{1}{4} - \cos^2(2\theta) + \cos^2(2\theta) \\ &= \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \cos(2\theta) - \frac{1}{2} + \cos(2\theta)\right) \left(\frac{1}{2} + \cos(2\theta) + \frac{1}{2} - \cos(2\theta)\right) \\ &= 2 \cos(2\theta). \end{aligned}$$

Más aún,

$$[a^2 - b^2] 2 \sin(\theta) \cos(\theta) = 2 \cos(2\theta) \sin(2\theta) = \sin(4\theta) = \sin(\phi).$$

$$\begin{aligned} b^2 \sin^2(\theta) + a^2 \cos^2(\theta) &= \left(\frac{1}{2} - \cos(2\theta)\right)^2 \sin^2(\theta) + \left(\frac{1}{2} + \cos(2\theta)\right)^2 \cos^2(\theta) \\ &= \left(\frac{1}{4} - \cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)\right) \sin^2(\theta) \\ &\quad + \left(\frac{1}{4} + \cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)\right) \cos^2(\theta) \\ &= \frac{1}{4} - \cos(2\theta) [\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)] + \cos^2(2\theta) \\ &= \frac{1}{4} + \cos^2(2\theta) + \cos^2(2\theta) \\ &= \frac{1}{4} + 2 \cos^2(2\theta) \\ &= \frac{1}{4} + 1 + \cos(4\theta) \\ &= \frac{5}{4} + \cos(\phi). \end{aligned}$$

Sustituyendo los coeficientes tenemos

$$\frac{1}{4} x^2 - xy \sin(\phi) + \left(\frac{5}{4} + \cos(\phi)\right) y^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1 + 2 \cos(\phi)}{2}\right)^2,$$

y multiplicando la ecuación por 4 tenemos

$$x^2 + y^2 (5 + 4 \cos(\phi)) - 4xy \sin(\phi) = \left(\frac{1 + 2 \cos(\phi)}{2}\right)^2. \quad \square$$

En el siguiente corolario distinguiremos algunos puntos de γ_ϕ que serán relevantes más adelante. Como consecuencia, también se obtiene una prueba alternativa a las partes (2) y (3) del lema 3.3 en (Itzá-Ortiz and Martínez-Avenida, 2021).

Corolario 2.4. Los puntos $\pm \left(\sin(\phi), \frac{1}{2}\right)$ pertenecen a γ_ϕ , para toda $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Demostración. Para probar que los puntos $\pm \left(\sin(\phi), \frac{1}{2}\right)$ están en la elipse γ_ϕ , solo debemos verificar que satisfacen la ecuación de la Proposición 2.3. Solo probaremos que el punto $\left(\sin(\phi), \frac{1}{2}\right)$ está en γ_ϕ , la prueba de que el otro punto está en γ_ϕ es completamente análoga.

Sustituyendo $\left(\sin(\phi), \frac{1}{2}\right)$ en la ecuación de la elipse γ_ϕ , dada

en la ecuación (2), tenemos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2(5 + 4 \cos(\phi)) - 4xy \operatorname{sen}(\phi) - \left(\frac{1+2 \cos(\phi)}{2}\right)^2 \\ = \operatorname{sen}^2(\phi) + \frac{1}{4}(5 + 4 \cos(\phi)) - 4(\operatorname{sen}(\phi))\frac{1}{2} \operatorname{sen}(\phi) \\ - \left(\frac{1+2 \cos(\phi)}{2}\right)^2 \\ = \operatorname{sen}^2(\phi) + \frac{5}{4} + \cos(\phi) - 2 \operatorname{sen}^2(\phi) - \left(\frac{1+2 \cos(\phi)}{2}\right)^2 \\ = \frac{5}{4} + \cos(\phi) - \operatorname{sen}^2(\phi) - \left(\frac{1+4 \cos(\phi)+4 \cos^2(\phi)}{4}\right) \\ = \frac{5}{4} + \cos(\phi) - 1 + \cos^2(\phi) - \left(\frac{1+4 \cos(\phi)+4 \cos^2(\phi)}{4}\right) \\ = \frac{1}{4} + \cos(\phi) + \cos^2(\phi) - \left(\frac{1+4 \cos(\phi)+4 \cos^2(\phi)}{4}\right) \\ = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $(\operatorname{sen}(\phi), \frac{1}{2}) \in \gamma_\phi$. \square

3. Puntos de intersección de γ_ϕ con A y B

En esta sección calcularemos los puntos de intersección de la elipse γ_ϕ con las circunferencias A y B , es decir, con la circunferencia con centro en 1 y radio $1/2$ y la circunferencia con centro en -1 y radio $1/2$, respectivamente.

Proposición 3.1. Sea $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, entonces $\gamma_\phi \cap A$ consiste de los siguientes tres puntos:

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(\frac{\cos(\phi)}{2} + 1, \frac{\operatorname{sen}(\phi)}{2}\right), \\ P_2 &= \left(\frac{3}{4} + \frac{\operatorname{sen}(\phi) \sqrt{1+2 \cos(\phi)}}{4(1+\cos(\phi))}, \frac{\operatorname{sen}(\phi)}{4(1+\cos(\phi))} + \frac{\sqrt{1+2 \cos(\phi)}}{4}\right), \\ P_3 &= \left(\frac{3}{4} - \frac{\operatorname{sen}(\phi) \sqrt{1+2 \cos(\phi)}}{4(1+\cos(\phi))}, \frac{\operatorname{sen}(\phi)}{4(1+\cos(\phi))} - \frac{\sqrt{1+2 \cos(\phi)}}{4}\right) \end{aligned}$$

Más aún, $\gamma_\phi \cap B$ consiste de los puntos $-P_1, -P_2$ y $-P_3$.

Demostración. Calcularemos solo los puntos de intersección de la elipse γ_ϕ con la circunferencia A . Los puntos en $\gamma_\phi \cap B$ se calculan de manera análoga.

Sea (x, y) un puntos en $\gamma_\phi \cap A$. Como $(x, y) \in \gamma_\phi$ entonces satisface la ecuación (2), entonces:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2(5 + 4 \cos(\phi)) - 4xy \operatorname{sen}(\phi) &= \left(\frac{1+2 \cos(\phi)}{2}\right)^2 \\ x^2 - 4xy \operatorname{sen}(\phi) + 4y^2 \operatorname{sen}^2(\phi) - 4y^2 \operatorname{sen}^2(\phi) \\ + y^2(5 + 4 \cos(\phi)) &= \left(\frac{1+2 \cos(\phi)}{2}\right)^2 \\ (x - 2y \operatorname{sen}(\phi))^2 + y^2(5 + 4 \cos(\phi) - 4 \operatorname{sen}^2(\phi)) &= \left(\frac{1+2 \cos(\phi)}{2}\right)^2 \\ (x - 2y \operatorname{sen}(\phi))^2 + y^2(1 + 4 \cos(\phi) + 4 \cos^2(\phi)) &= \left(\frac{1+2 \cos(\phi)}{2}\right)^2 \\ (x - 2y \operatorname{sen}(\phi))^2 + y^2(1 + 2 \cos(\phi))^2 - \left(\frac{1+2 \cos(\phi)}{2}\right)^2 &= 0 \\ (x - 2y \operatorname{sen}(\phi))^2 - (1 + 2 \cos(\phi))^2 \left(\frac{1}{4} - y^2\right) &= 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, como $(x, y) \in A$, entonces $\frac{1}{4} - y^2 = (x - 1)^2$. Sustituyendo esto en la última ecuación tenemos $(x - 2y \operatorname{sen}(\phi))^2 - (1 + 2 \cos(\phi))^2 (x - 1)^2 = 0$, y factorizando

$$\begin{aligned} [x - 2y \operatorname{sen}(\phi) - (1 + 2 \cos(\phi))(x - 1)] \\ [x - 2y \operatorname{sen}(\phi) + (1 + 2 \cos(\phi))(x - 1)] = 0. \end{aligned}$$

No es difícil de verificar que si el primer término es cero, entonces se cumple la relación

$$y = -\frac{\cos(\phi)}{\operatorname{sen}(\phi)}x + \frac{1 + 2 \cos(\phi)}{2 \operatorname{sen}(\phi)}, \quad (\ell_1)$$

lo que implica que hay puntos en $\gamma_\phi \cap A$ que también están en la recta ℓ_1 descrita por la ecuación anterior.

Análogamente, si el segundo factor es cero, entonces se cumple

$$y = \frac{1 + \cos(\phi)}{\operatorname{sen}(\phi)}x - \frac{1 + 2 \cos(\phi)}{2 \operatorname{sen}(\phi)}. \quad (\ell_2)$$

Notemos que $(A \cap \ell_1) \cup (A \cap \ell_2) = \gamma_\phi \cap A$. Por lo tanto, para calcular puntos en $\gamma_\phi \cap A$ es suficiente estudiar $A \cap \ell_1$ y $A \cap \ell_2$.

Si $(x, y) \in A \cap \ell_1$ entonces cumple con la ecuación $(x - 1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, y sustituyendo la ecuación de la recta ℓ_1 se obtiene:

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 + \left(-\frac{\cos(\phi)}{\operatorname{sen}(\phi)}x + \frac{1+2 \cos(\phi)}{2 \operatorname{sen}(\phi)}\right)^2 - \frac{1}{4} &= 0 \\ x^2 - 2x + 1 + \frac{\cos^2(\phi)}{\operatorname{sen}^2(\phi)}x^2 - \frac{\cos(\phi)(1+2 \cos(\phi))}{\operatorname{sen}^2(\phi)}x \\ + \frac{(1+2 \cos(\phi))^2}{4 \operatorname{sen}^2(\phi)} - \frac{1}{4} &= 0 \\ x^2 \left(1 + \frac{\cos^2(\phi)}{\operatorname{sen}^2(\phi)}\right) - x \left(2 + \frac{\cos(\phi)(1+2 \cos(\phi))}{\operatorname{sen}^2(\phi)}\right) + 1 \\ + \frac{(1+2 \cos(\phi))^2}{4 \operatorname{sen}^2(\phi)} - \frac{1}{4} &= 0 \\ \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2(\phi)} - \left(\frac{2+\cos(\phi)}{\operatorname{sen}^2(\phi)}\right)x \\ + \frac{1+4 \cos(\phi)+4 \cos^2(\phi)+4 \operatorname{sen}^2(\phi)-\operatorname{sen}^2(\phi)}{4 \operatorname{sen}^2(\phi)} &= 0 \\ x^2 - (2 + \cos(\phi))x + \frac{4+4 \cos(\phi)+\cos^2(\phi)}{4} &= 0 \\ x^2 - (2 + \cos(\phi))x + \left(\frac{2+\cos(\phi)}{2}\right)^2 &= 0 \\ \left(x - \frac{2+\cos(\phi)}{2}\right)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en la recta ℓ_1 solo hay un punto de $\gamma_\phi \cap A$, que tiene abscisa $x = \frac{2+\cos(\phi)}{2}$ y ordenada

$$\begin{aligned} y &= -\frac{\cos(\phi)}{\operatorname{sen}(\phi)} \cdot \frac{2 + \cos(\phi)}{2} + \frac{1 + 2 \cos(\phi)}{2 \operatorname{sen}(\phi)} \\ &= \frac{1 + 2 \cos(\phi) - \cos^2(\phi) - 2 \cos(\phi)}{2 \operatorname{sen}(\phi)} \\ &= \frac{1 - \cos^2(\phi)}{2 \operatorname{sen}(\phi)} = \frac{\operatorname{sen}(\phi)}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el punto $P_1 = \left(\frac{\cos(\phi)}{2} + 1, \frac{\operatorname{sen}(\phi)}{2}\right) \in \gamma_\phi \cap A$.

Análogamente, calcularemos los puntos en $\ell_2 \cap A$. Sea

$(x, y) \in A \cap \ell_2$, entonces se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + \left(\frac{1+\cos(\phi)}{\sin(\phi)}x - \frac{1+2\cos(\phi)}{2\sin(\phi)}\right)^2 - \frac{1}{4} &= 0 \\ x^2 - 2x + 1 + \frac{(1+\cos(\phi))^2}{\sin^2(\phi)}x^2 - \frac{(1+\cos(\phi))(1+2\cos(\phi))}{\sin^2(\phi)}x \\ &+ \frac{(1+2\cos(\phi))^2}{4\sin^2(\phi)} - \frac{1}{4} = 0 \\ \frac{(1+2\cos(\phi))^2}{4\sin^2(\phi)} - \frac{1}{4} + 1 + x^2 \left(1 + \frac{1+2\cos(\phi)+\cos^2(\phi)}{\sin^2(\phi)}\right) \\ &- x \left(2 + \frac{1+3\cos(\phi)+2\cos^2(\phi)}{\sin^2(\phi)}\right) = 0 \\ \left(\frac{2+2\cos(\phi)}{\sin^2(\phi)}\right)x^2 - \left(\frac{3+3\cos(\phi)}{\sin^2(\phi)}\right)x + \frac{4+4\cos(\phi)+\cos^2(\phi)}{4\sin^2(\phi)} &= 0 \\ 2x^2(1+\cos(\phi)) - 3x(1+\cos(\phi)) + \frac{(2+\cos(\phi))^2}{4} &= 0 \\ \left(2x^2 - 3x + \frac{(2+\cos(\phi))^2}{4(1+\cos(\phi))}\right)(1+\cos(\phi)) &= 0. \end{aligned}$$

Como $1 + \cos(\phi) > 0$ para toda $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, entonces $2x^2 - 3x + \frac{(2+\cos(\phi))^2}{4(1+\cos(\phi))} = 0$, lo que implica que

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - \frac{2(2+\cos(\phi))^2}{(1+\cos(\phi))}}}{4} = \frac{3}{4} \pm \frac{\sin(\phi)\sqrt{1+2\cos(\phi)}}{4(1+\cos(\phi))}.$$

Sustituyendo cada valor de x en la ecuación de la recta ℓ_2 tenemos que los puntos de intersección son:

$$P_2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sin(\phi)\sqrt{1+2\cos(\phi)}}{4(1+\cos(\phi))}, \frac{\sin(\phi)}{4(1+\cos(\phi))} + \frac{\sqrt{1+2\cos(\phi)}}{4}\right),$$

$$P_3 = \left(\frac{3}{4} - \frac{\sin(\phi)\sqrt{1+2\cos(\phi)}}{4(1+\cos(\phi))}, \frac{\sin(\phi)}{4(1+\cos(\phi))} - \frac{\sqrt{1+2\cos(\phi)}}{4}\right),$$

como se quería. □

Observación 3.2. Mencionaremos algunos datos importantes acerca de los puntos de intersección de la elipse γ_ϕ con la circunferencia A .

- Como $1 + 2\cos(\phi) > 0$ para toda $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, entonces los puntos de intersección P_2 y P_3 siempre existen.
- Notemos que

$$\begin{aligned} 9 - \frac{2(2+\cos(\phi))^2}{1+\cos(\phi)} &= \frac{9+9\cos(\phi) - 2(4+4\cos(\phi)+\cos^2(\phi))}{1+\cos(\phi)} \\ &= \frac{1+\cos(\phi) - 2\cos^2(\phi)}{1+\cos(\phi)} \\ &= 1 - 2\frac{\cos^2(\phi)}{1+\cos(\phi)}. \end{aligned}$$

Como $\frac{\cos^2(\phi)}{1+\cos(\phi)} \geq 0$ para $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, entonces $1 - 2\frac{\cos^2(\phi)}{1+\cos(\phi)} \leq 1$. Esto implica que

$$\frac{3 \pm \sqrt{9 - \frac{2(2+\cos(\phi))^2}{1+\cos(\phi)}}}{4} \leq 1,$$

es decir, los puntos P_2 y P_3 tienen coordenada x menor o igual que 1. Por lo tanto, los puntos P_2 y P_3 están siempre en el hemisferio izquierdo de la circunferencia A .

- Dado que $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, entonces

$$\frac{\cos(\phi)}{2} + 1 \geq 1,$$

esto implica que P_1 está siempre en el hemisferio derecho de la circunferencia A .

- Análogamente, $-P_1$ está siempre en el hemisferio izquierdo de la circunferencia B , y $-P_2$ y $-P_3$ están siempre en el hemisferio derecho de la circunferencia B .
- Los puntos P_1, P_2 y P_3 son distintos salvo en los casos que $\phi = \frac{\pi}{2}$, cuando $P_1 = P_2$ y $\phi = -\frac{\pi}{2}$, cuando $P_1 = P_3$.

4. Demostración del teorema 1.2

Consideremos la partición de $\text{conv}(A \cup B)$ en dos subconjuntos:

1. Sea Δ_1 la envolvente convexa de los puntos $(0, 0)$, $(1, \frac{1}{2})$ y $(-1, \frac{1}{2})$, y Δ_2 la envolvente convexa de los puntos $(0, 0)$, $(1, -\frac{1}{2})$ y $(-1, -\frac{1}{2})$. El primer subconjunto lo definimos como

$$F_1 := \Delta_1 \cup \Delta_2.$$

2. El segundo subconjunto lo definimos como

$$F_2 := \text{conv}(A \cup B) \setminus F_1.$$

En la Figura 2, el conjunto F_1 está marcado de azul.

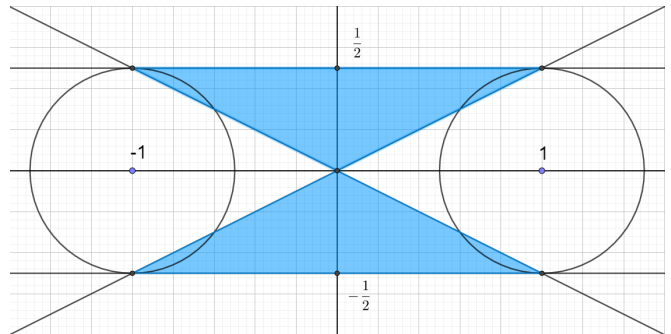


Figura 2: Conjunto F_1

Lema 4.1. Se tiene la siguiente inclusión de conjuntos

$$\text{conv}(A \cup B) \subset \bigcup_{\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} E_\phi.$$

Demostración. Sea $x \in \text{conv}(A \cup B)$, entonces $x \in F_1$ o $x \in F_2$.

Supongamos que $x \in F_1$. Si $x = (0, 0)$ entonces $x \in \bigcup_{\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} E_\phi$, ya que el origen es centro de todas las elipses γ_ϕ . Supongamos entonces que $x \neq (0, 0)$.

Sea ℓ_1 la recta que pasa por x y por el origen. Notemos que esta recta corta a la recta $y = \frac{1}{2}$ en el punto $q = (a, \frac{1}{2})$. Definamos $\phi = \text{sen}^{-1}(a)$ como la preimagen de a en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y consideremos la elipse γ_ϕ .

Por el Corolario 2.4, los puntos q y $-q$ están en la elipse γ_ϕ , por lo tanto el segmento $\overline{-qq} \subset E_\phi$.

Por construcción x está contenido en el segmento $\overline{-qq}$, es decir, $x \in \overline{-qq} \subset E_\phi$, por lo tanto

$$F_1 \subset \bigcup_{\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} E_\phi.$$

Supongamos ahora que $x \in F_2$. Sea ℓ_2 la recta que pasa por x y por el origen.

La recta ℓ_2 corta a la circunferencia A en dos puntos, sea $b = (b_x, b_y)$ el punto de intersección de la recta ℓ_2 con la circunferencia A , tal que $b_x \geq 1$. Es directo verificar que ℓ_2 interseca a B en $-b$ y que x está en el segmento $\overline{-bb}$.

Notemos que $-1 \leq 2b_y \leq 1$, entonces definimos $\phi = \text{sen}^{-1}(2b_y)$ como la preimagen en el conjunto $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Con esta definición de ϕ , tenemos que $b_y = \frac{\text{sen}(\phi)}{2}$. Más aún, como $b \in A$ entonces se cumple

$$(b_x - 1)^2 = \frac{1}{4} - b_y^2 = \frac{1}{4} - \frac{\text{sen}^2(x)}{4} = \frac{\text{cos}^2(x)}{4},$$

por lo tanto $b_x = \frac{\text{cos}(x)}{2} + 1$.

Consideremos la elipse γ_ϕ . Por la Proposición 3.1 los puntos b y $-b$ están en γ_ϕ ; de hecho son puntos de intersección de γ_ϕ con las circunferencias A y B . Como $x \in \overline{-bb}$ entonces $x \in E_\phi$, por lo tanto

$$F_2 \subset \bigcup_{\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} E_\phi.$$

Como $\text{conv}(A \cup B) = F_1 \cup F_2$, entonces

$$\text{conv}(A \cup B) \subset \bigcup_{\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} E_\phi.$$

□

Ahora probaremos la otra contención.

Lema 4.2. *Se tiene la siguiente inclusión de conjuntos*

$$\bigcup_{\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} E_\phi \subset \text{conv}(A \cup B).$$

Demostración. Probaremos este lema en dos pasos. Primero probaremos que las elipses están acotadas superior e inferiormente por las rectas $y = \pm \frac{1}{2}$. En el segundo paso probaremos que las elipses están acotadas a la derecha y a la izquierda por las circunferencias A y B .

Para el paso 1, como $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, por la Proposición 2.3 la ecuación de la elipse γ_ϕ es

$$x^2 + y^2(5 + 4 \cos(\phi)) - 4xy \text{sen}(\phi) - \left(\frac{1 + 2 \cos(\phi)}{2}\right)^2 = 0.$$

Con ayuda de la derivada implícita calcularemos el máximo y el mínimo de la elipse.

Si derivamos implícitamente tenemos

$$2x - 4 \text{sen}(\phi)(y + xy') + 2y \cdot y'[5 + 4 \cos(\phi)] = 0.$$

Como queremos calcular el máximo y mínimo, entonces asumiremos $y' = 0$, por lo tanto $2x - 4y \text{sen}(\phi) = 0$, lo que implica que $x = 2y \text{sen}(\phi)$.

Esto significa que el máximo y el mínimo de la elipse γ_ϕ se encuentra sobre la recta $x = 2y \text{sen}(\phi)$.

Para calcular las coordenadas del máximo y del mínimo, sustituimos $x = 2y \text{sen}(\phi)$ en la ecuación de la elipse.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2(5 + 4 \cos(\phi)) - 4xy \text{sen}(\phi) &= \left(\frac{1 + 2 \cos(\phi)}{2}\right)^2 \\ (2y \text{sen}(\phi))^2 + y^2(5 + 4 \cos(\phi)) - 4(2y \text{sen}(\phi))y \text{sen}(\phi) & \\ &= \left(\frac{1 + 2 \cos(\phi)}{2}\right)^2 \\ 4y^2 \text{sen}^2(\phi) + y^2(5 + 4 \cos(\phi)) - 8y^2 \text{sen}^2(\phi) & \\ &= \left(\frac{1 + 2 \cos(\phi)}{2}\right)^2 \\ -4y^2 \text{sen}^2(\phi) + y^2(5 + 4 \cos(\phi)) &= \left(\frac{1 + 2 \cos(\phi)}{2}\right)^2 \\ y^2(5 + 4 \cos(\phi) - 4 \text{sen}^2(\phi)) &= \left(\frac{1 + 2 \cos(\phi)}{2}\right)^2 \\ y^2(1 + 4 \cos(\phi) + 4 \cos^2(\phi)) &= \left(\frac{1 + 2 \cos(\phi)}{2}\right)^2 \\ y^2(1 + 2 \cos(\phi))^2 &= \left(\frac{1 + 2 \cos(\phi)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Como $1 + 2 \cos(\phi) > 0$ para todo $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, entonces dividiendo la última ecuación entre $(1 + 2 \cos(\phi))^2$ tenemos $y^2 = \frac{1}{4}$, lo que implica $y = \pm \frac{1}{2}$, es decir, los valores máximo y mínimo de las ordenadas de los puntos sobre la elipse γ_ϕ son $\pm \frac{1}{2}$.

Continuamos la prueba con el paso 2. De la Proposición 3.1, sabemos que la elipse γ_ϕ interseca a la circunferencia A en $P_1 = \left(\frac{\cos(\phi)}{2} + 1, \frac{\text{sen}(\phi)}{2}\right)$, y por la Observación 3.2 es el único punto en $\gamma_\phi \cap A$ que cae en el hemisferio derecho de A , es decir, el único punto de intersección con abscisa mayor o igual que 1.

Probaremos que la elipse está acotada a la derecha por la circunferencia A usando reducción al absurdo. Asumamos que la elipse γ_ϕ no está acotada a la derecha por la circunferencia A , entonces la elipse atraviesa la circunferencia A por el punto P_1 .

Veamos que la elipse cumple con las siguientes restricciones:

- por la Proposición 3.1, la intersección $\gamma_\phi \cap A$ consiste únicamente de tres puntos,
- por la Observación 3.2, los puntos P_2 y P_3 , definidos en la Proposición 3.1, están en el hemisferio izquierdo de A , mientras que el punto P_1 es el único que se encuentra en el hemisferio derecho de A ,
- y por el análisis en el paso 1, la elipse está encerrada por las rectas $y = \frac{1}{2}$ y $y = -\frac{1}{2}$, es decir, ningún punto de la elipse γ_ϕ está por arriba de la recta $y = \frac{1}{2}$, ni por debajo de la recta $y = -\frac{1}{2}$.

Las restricciones anteriores implican que si la elipse γ_ϕ atraviesa a la circunferencia A entonces necesariamente la elipse debe regresar por el punto $(1, \frac{1}{2})$ o por el punto $(1, -\frac{1}{2})$.

Asumamos que la elipse regresa por el punto $(1, \frac{1}{2})$, entonces, por el Corolario 2.4, el punto $(1, \frac{1}{2})$ debe coincidir con el punto $(\sin(\phi), \frac{1}{2})$, ya que la elipse solo puede tener un máximo. Esto implica que $\sin(\phi) = 1$, es decir, $\phi = \frac{\pi}{2}$.

Pero si $\phi = \frac{\pi}{2}$ entonces $P_1 = (1, \frac{1}{2})$, es decir, la elipse esta regresando por el mismo lugar de donde salio de la circunferencia lo que es absurdo. Por lo tanto la elipse no puede atravesar la circunferencia A .

Análogamente, si la elipse regresa por el punto $(1, -\frac{1}{2})$, entonces el ángulo ϕ sería igual a $-\frac{\pi}{2}$ y en este caso $P_1 = (1, -\frac{1}{2})$. Lo que contradice el hecho de que que la elipse atraviese a la circunferencia A .

De forma análoga se prueba que la elipse γ_ϕ está acotada a la izquierda por la circunferencia B .

□

En la Figura 3 se muestran los puntos máximo y mínimo (de color rojo), los puntos de intersección $\pm P_1$ de la elipse con las circunferencias A y B (de color azul).

Una propiedad geométrica notable es la siguiente: la elipse γ_ϕ y la circunferencia A (respectivamente, B) comparten recta tangente en el punto P_1 (respectivamente $-P_1$). Estas rectas se muestran en color verde en la figura 3. Como la prueba de esta propiedad no es necesaria para los propósitos del artículo, se deja como un ejercicio para el lector.

Demostración del teorema 1.2. La prueba se sigue del lema 4.1 y del lema 4.2. □

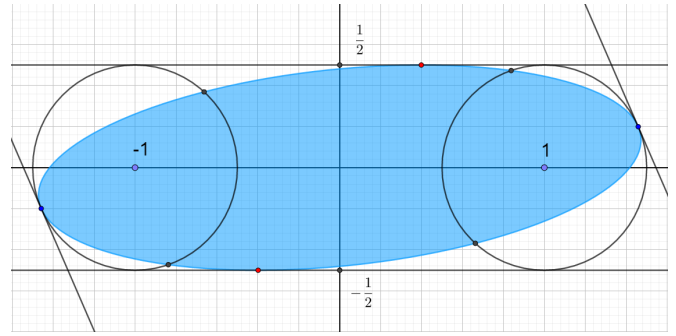


Figura 3: Algunos puntos de la elipse γ_ϕ

5. Conclusiones

En este trabajo se usan herramientas elementales para dar una demostración alternativa a la expresión de un conjunto convexo, la envolvente convexa de las circunferencias con centros en ± 1 y radio $1/2$, como la unión de una familia no-numerable de elipses. El resultado que se prueba aquí es, de hecho, un poco más general que el original, en donde se toma la cerradura de la envolvente convexa de la unión de las elipses.

Referencias

- Brown, A. and Carl, P. (1977). *Introduction to Operator Theory I: Elements of Functional Analysis*. Springer, New York.
- Hernández-Becerra, C. and Itzá-Ortiz, B. A. (2016). A class of tridiagonal operators associated to some subshifts. *Open Math.*, 14:352–360.
- Hillier, F. S. and Lieberman, G. J. (2015). *Introducción a la investigación de operaciones*. McGraw-Hill, New York, 10 edition.
- Itzá-Ortiz, B. A. and Martínez-Avenidaño, R. A. (2021). The numerical range of a class of periodic tridiagonal operators. *Linear and Multilinear Algebra*, 69:2830–2849.
- Leonard, E. and Lewis, J. E. (2015). *Geometry of Convex Sets*. Wiley, New Jersey.
- Martínez-Avenidaño, R. A. and Rosenthal, P. (2007). *An introduction to operators on the Hardy-Hilbert space*. Springer, New York.