

Propiedades homotópicas del operador de clanes en gráficas Homotopic properties of the clique operator in graphs

M. Islas-Gómez 

Área Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México.

Resumen

Este trabajo consiste en dar a conocer los resultados de mi tesis de licenciatura (Islas, 2021) en donde se abordan conceptos de topología combinatoria. Principalmente se trabaja con el complejo simplicial de completas de una gráfica al cual a su vez se le puede asociar un espacio topológico a través de su realización geométrica. De este modo se asocian conceptos topológicos a gráficas que son estructuras combinatorias, así, nos interesa el tipo de homotopía que tienen las gráficas. El operador de clanes K asocia a cada gráfica G otra gráfica que denotamos por $K(G)$ y se conoce como la gráfica de clanes de G . Cuando G es homotópica a $K(G)$ se dice que G es **homotópicamente invariante**. Hay clases “grandes” de gráficas que ya se sabe que son homotópicamente invariantes como lo son las clases de gráficas que cumplen la propiedad clan Helly o las clases de gráficas dismantelables. En este artículo se analizarán algunas condiciones que garanticen que las gráficas G que cumplen que $K(G)$ es clan Helly sean homotópicamente invariantes, todo esto haciendo uso de la herramienta de colapsos elementales. Dicha herramienta también es utilizada en este texto para dar pruebas alternativas conocidas en la literatura (por ejemplo, el teorema 13), y después de estudiarla con más detalle, nos motiva a pensar que podría ayudar a probar una conjetura que da condiciones para que una gráfica sea homotópicamente invariante.

Palabras Clave: Clan, Clan Helly, Colapso elemental, Gráfica, Homotopía, Homotópicamente invariante.

Abstract

This work shows the results obtained in my undergraduate thesis (Islas, 2021), where combinatorial topology concepts are addressed. Mainly we work with the simplicial complex of completas of a graph, which in turn, we can associate it a topological space through its geometric realization. In this way, topological concepts are associated with graphs that are combinatorial structures, thus, we are interested in the type of homotopy that the graphs have. The clique operator K associates to each graph G another graph that is denoted by $K(G)$ and which is known like the clique graph of G . When G is homotopic to $K(G)$ it says that G is homotopically invariant. There are “large” classes of graphs that already known to be **homotopically invariant**, such as those classes of graphs that satisfy the clique Helly property or the classes of dismantlable graphs. This article will analyze some conditions that guarantee that the graphs G that satisfy that $K(G)$ is clique Helly are homotopically invariant, all this making use of elementary collapses. This tool is also used in this paper to give alternative proofs which are known in the literature (for example, theorem 13), and after studying it in more detail, it motivates us to think that it could help to prove a conjecture that gives conditions for a graph to be homotopically invariant.

Keywords: Clique, Clique Helly, Elemental collapse, Graph, Homotopy, Homotopically invariant.

1. Introducción

Como ya se mencionó en el resumen, nos interesa buscar condiciones para que una gráfica sea homotópicamente invariante. Además, en este artículo se dan pruebas alternativas a resultados ya conocidos en la literatura, pero ahora haciendo uso de la herramienta de colapsos elementales. Las pruebas que

resultan de ello no requieren de herramientas demasiado sofisticadas como las que usualmente se usan en la literatura, esto debido a que los colapsos elementales son de las herramientas más elementales que hay en la topología combinatoria. Pero no solo eso, resulta que la homotopía que se obtiene de esta herramienta es el conocido tipo de homotopía simple, el cual tiene más propiedades que otros tipos de homotopía. Más aún,

*Autor para correspondencia: is294777@uaeh.edu.mx.

Correo electrónico: is294777@uaeh.edu.mx (Mauricio Islas-Gómez).

la herramienta de colapsos elementales en gráficas se presta para trabajarla en un software, lo cual puede ser de gran ayuda para ahorrarse algunos cálculos y hacer observaciones; este es un buen motivo para el desarrollo de software libre, pues en ocasiones es de gran utilidad tener ayuda computacional.

En la sección 2 se dan las definiciones elementales de gráficas que se requieren. En la sección 3 se introduce el concepto de gráfica de clanes y de gráfica clan Helly. El complejo simplicial con el que nos interesa trabajar es el complejo simplicial de completas de una gráfica, el cual se da en la sección 4. Algunos resultados importantes y ya conocidos sobre homotopía en gráficas se abordan en la sección 5. En la sección 6 presentamos la herramienta de colapsos elementales y se dan algunos ejemplos de esta para entender uno de los usos aplicado a las gráficas. La sección 7 contiene algunos resultados ya conocidos y útiles que se usan para mostrar algunas de nuestras aportaciones. Finalmente, en la sección 8 se tienen principalmente resultados de invariancia homotópica que se obtuvieron haciendo uso de colapsos elementales en gráficas que no son clan Helly.

2. Conceptos de gráficas

Una referencia para los conceptos de teoría de gráficas que se usarán es (Harary, 1969).

Una gráfica G consiste de un conjunto de vértices y un conjunto de aristas que denotaremos por $V(G)$ y $E(G)$ respectivamente donde $E(G)$ consiste de subconjuntos de dos elementos de $V(G)$. Así una arista de G es de la forma $\{x, y\}$, pero para simplificar la notación escribiremos simplemente xy o bien yx . Además, decimos que dos vértices x, y en una gráfica G son **vecinos** o **adyacentes** si $xy \in E(G)$. De forma similar, en ocasiones en vez de decir que un vértice x está en $V(G)$ simplemente escribiremos $x \in G$ en el entendido de que x es un vértice de G .

Todas las gráficas en este artículo se consideraran finitas, es decir, el conjunto de vértices es finito y en consecuencia el conjunto de aristas también lo es. Como es usual, se asociará un dibujo a una gráfica, donde los vértices los identificaremos con puntos o círculos y las aristas por líneas o arcos que unen a los vértices (figura 1).

Se dice que G es una **gráfica completa** si cualquier par de vértices distintos en G son vecinos. Si H es una gráfica tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$ para alguna gráfica G , se dice que H es una **subgráfica** de G ; además si H es una gráfica completa, entonces se dice que H es una **gráfica completa** de G .

Definición 1. Decimos que una subgráfica H de G es una **subgráfica inducida** si $x, y \in H$ son vecinos en H si y solo si x, y son vecinos en G . De esta forma, dado un subconjunto $A \subseteq V(G)$, este **induce** una subgráfica de G , la cual tiene como vértices el conjunto A y declaramos dos vértices vecinos si son vecinos en G , dicha subgráfica es una **subgráfica inducida** de G .

Por ejemplo, si G es la gráfica de la figura 1, el subconjunto $\{a, e, f\} \subseteq V(G)$ induce la subgráfica con $\{a, e, f\}$ como conjunto de vértices y $\{af, ef\}$ como conjunto de aristas.

Así, se define un **clan** q de G si $q \subseteq V(G)$ tal que q induce una subgráfica completa en G , y no existe otro vértice en $V(G) \setminus q$ que sea vecino de todos los vértices en q . Por ejemplo, si G es la gráfica de la figura 1, el subconjunto $\{a, b\} \subseteq V(G)$

es un clan de G , porque $\{a, b\}$ induce una subgráfica completa de G y ninguno de los vértices en $V(G) \setminus \{a, b\} = \{c, d, e, f\}$ es vecino de ambos vértices a y b .

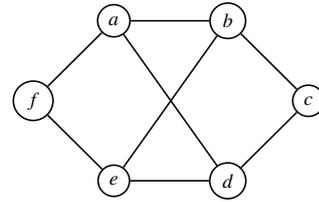


Figura 1: Dibujo de una gráfica con vértices $\{a, b, c, d, e, f\}$.

3. Operador de clanes

En esta sección se da la definición de operador de clanes como lo hace F. Harary en (Harary, 1969) y enunciaremos algunas propiedades de él. El operador de clanes ya ha sido bastante estudiado, como algunas referencias podemos tener (Bandelt and Prisner, 1991; Larión et al., 2001; Larión et al., 2008; Dourado et al., 2001; Frías-Armenta et al., 2004; Escalante, 1973; Dragan, 1989; Szwarcfiter, 1997; Prisner, 1992).

Definición 2. Dada una gráfica G , la **gráfica de clanes** de G se denota por $K(G)$ y es tal que

$$V(K(G)) = \{q : q \text{ es un clan de } G\}.$$

Donde declaramos dos vértices distintos $q_1, q_2 \in K(G)$ adyacentes si $q_1 \cap q_2 \neq \emptyset$.

Para cada n entero positivo definimos

$$K^n(G) = K(K^{n-1}(G)), \text{ donde } K^0(G) = G.$$

A K se le conoce como el **operador de clanes** en gráficas.

En la figura 2 se tiene un ejemplo de un dibujo de una gráfica G , su gráfica de clanes $K(G)$ y de $K^2(G)$.

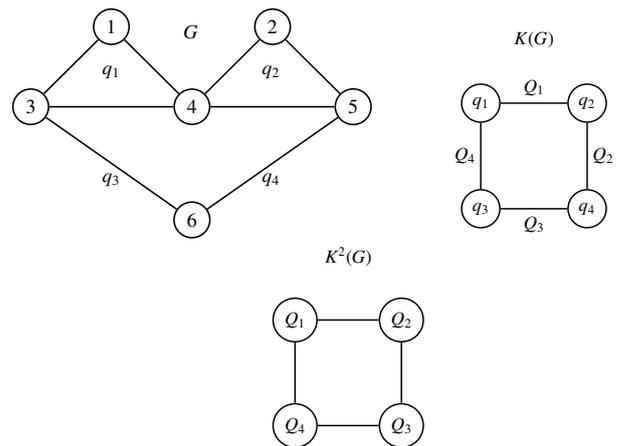


Figura 2: $G, K(G)$ y $K^2(G)$.

Una propiedad importante que usaremos es la llamada propiedad de Helly. Se dice que una colección \mathcal{F} de subconjuntos de un conjunto X es intersecante si cualesquiera dos elementos en \mathcal{F} tienen intersección no vacía. Una colección \mathcal{C} tiene la **propiedad de Helly** si toda subcolección intersecante $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ satisface $\bigcap \mathcal{C}' \neq \emptyset$.

Definición 3 (Gráfica clan Helly). *Se dice que una gráfica G es clan Helly si la colección de clanes de G tiene la propiedad de Helly.*

En mi tesis de licenciatura (Islas, 2021) aparece la demostración de que todas las gráficas con número de vértices menor o igual a cinco son clan Helly. La gráfica con menor número de vértices y menor número de aristas que no es clan Helly es la de la figura 3. No es clan Helly porque si consideramos la subcolección de clanes $C = \{q_1, q_2, q_4\}$, en donde $q_1 = \{a, b, c\}$, $q_2 = \{b, d, e\}$ y $q_4 = \{c, e, f\}$, se nota que C es una colección intersecante, pero $\bigcap C = \emptyset$.

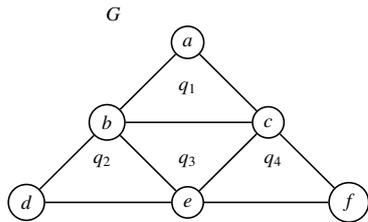


Figura 3: Gráfica con menor número de vértices y aristas que no es clan Helly.

La importante relación que tienen las gráficas clan Helly con el operador de clanes es el siguiente teorema que fue mostrado por (Escalante, 1973).

Teorema 1. *Si G es una gráfica clan Helly entonces $K(G)$ es clan Helly. Y como consecuencia $K^n(G)$ es clan Helly para toda $n \in \mathbb{N}$.*

4. Complejos simpliciales

Como ya se había anticipado en el resumen, nos interesa asociarles un espacio topológico a cada gráfica y para ello haremos uso de los complejos simpliciales. Hay una amplia literatura sobre el estudio de los complejos simpliciales, como referencias tenemos (Munkres, 1984; Kozlov, 2008).

Definición 4. *Un complejo simplicial abstracto Δ consta de*

1. *Un conjunto de vértices que se denota por $V(\Delta)$.*
2. *Un conjunto de simplejos $S(\Delta)$ que consta de subconjuntos finitos de $V(\Delta)$, tales que si $\sigma \in S(\Delta)$ y $\tau \subseteq \sigma$ entonces $\tau \in S(\Delta)$.*

Decimos que \mathcal{K} es un subcomplejo simplicial del complejo simplicial Δ y lo denotamos por $\mathcal{K} \subseteq \Delta$ si $V(\mathcal{K}) \subseteq V(\Delta)$ y $S(\mathcal{K}) \subseteq S(\Delta)$.

Nosotros nos enfocaremos en el siguiente complejo simplicial abstracto.

Definición 5. *Sea G una gráfica, el complejo simplicial de completas de G que denotamos por $\Delta(G)$ es aquel cuyo conjunto de vértices es $V(\Delta(G)) = V(G)$ y*

$$S(\Delta(G)) = \{c \subseteq V(G) : c \text{ induce una gráfica completa de } G\}.$$

Una vez que se asocia un complejo simplicial abstracto a una gráfica G , podemos asociarle también un espacio topológico a través de la **realización geométrica** de dicho complejo

simplicial que denotamos por $|\Delta(G)|$ (el cual resulta ser un subconjunto de \mathbb{R}^n con la topología heredada de la usual). Los detalles de esto los podemos encontrar en el libro (Munkres, 1984) o bien en mi tesis de licenciatura (Islas, 2021). En la figura 4 se muestra una gráfica con su respectivo espacio topológico asociado.

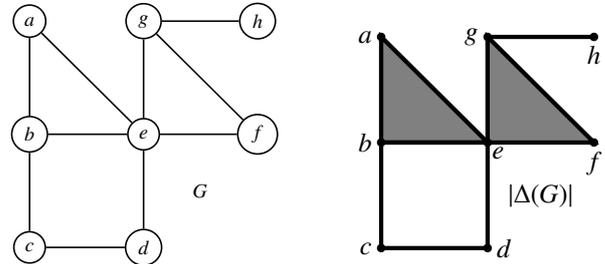


Figura 4: Una gráfica G y la realización geométrica $|\Delta(G)|$.

5. Homotopía en gráficas

Coloquialmente se dice que dos espacios topológicos X y Y son homotópicos si se puede deformar continuamente uno en el otro y se denota por $X \simeq Y$. Una definición más precisa se puede ver en (Munkres, 1984) o en (Islas, 2021).

Así entonces, se dice que dos gráficas G y H son homotópicas o que tienen el mismo tipo de homotopía (y denotamos $G \simeq H$) si $|\Delta(G)| \simeq |\Delta(H)|$. Lo mismo aplica para dos complejos simpliciales Δ y Σ , se dice que son homotópicos y lo denotamos por $\Delta \simeq \Sigma$ si $|\Delta| \simeq |\Sigma|$.

Definición 6. *Una gráfica B se dice que es bipartita si existen subconjuntos $X, Y \subseteq V(B)$ tal que todas las aristas de B tienen un vértice en X y otro en Y , además $X \cap Y = \emptyset$ y $X \cup Y = V(B)$. En tal caso, se denota $B = (X, Y)$.*

El siguiente resultado es el teorema de Dowker, el cual se usa para mostrar un resultado interesante en esta discusión. Una referencia de él es (Björner, 1995), teorema 10.9.

Teorema 2 (Teorema de Dowker). *Sea $B = (X, Y)$ una gráfica bipartita. Definimos los complejos simpliciales Δ_X y Δ_Y como sigue:*

1. *El conjunto de vértices de Δ_X es X , y un simplejo σ de Δ_X consiste de un subconjunto de X tal que existe un elemento $y \in Y$ con $xy \in E(B)$ para todo $x \in \sigma$.*
2. *El conjunto de vértices de Δ_Y es Y y un simplejo σ de Δ_Y consiste de un subconjunto de Y tal que existe un elemento $x \in X$ con $yx \in E(B)$ para todo $y \in \sigma$.*

Entonces, $\Delta_X \simeq \Delta_Y$, es decir, $|\Delta_X|$ y $|\Delta_Y|$ son homotópicos.

El siguiente resultado fue mostrado por Erich Prisner (Prisner, 1992).

Teorema 3. *Si G es una gráfica clan Helly entonces $G \simeq K(G)$.*

Este teorema es consecuencia del teorema de Dowker, para ello se considera la gráfica bipartita $B = (X, Y)$ considerando $X = V(G)$ y $Y = V(K(G))$ declarando dos vértices $x \in V(G)$ y $q \in V(K(G))$ adyacentes si $x \in q$, haciendo los detalles uno puede verificar que $\Delta_X = \Delta(G)$ y que $\Delta_Y = \Delta(K(G))$. En la prueba de este teorema la importancia de que G es clan Helly

radica en que Δ_Y coincide con $\Delta(K(G))$ (en el teorema de Dowker 2). Más adelante consideraremos casos en los que G no es necesariamente clan Helly y por tanto $\Delta_Y \neq \Delta(K(G))$.

En el resumen se mencionó que las gráficas G que tienen la propiedad de ser homotópica a su gráfica de clanes $K(G)$ las llamaríamos **homotópicamente invariantes**. Entonces las gráficas clan Helly son un ejemplo de ellas.

Teorema 4. *Si G es una gráfica clan Helly, entonces para todo entero $n \geq 1$ se cumple $G \simeq K^n(G)$.*

Demostración. Se sigue de forma inductiva por los teoremas 1 y 3. \square

6. Colapsos

Se dice que una gráfica G tiene **defecto Helly** n si n es el entero más pequeño tal que $K^n(G)$ es clan Helly. Las gráficas con defecto Helly 0 son las gráficas clan Helly, estas ya sabemos que son homotópicamente invariantes. Nos gustaría saber que pasa con las gráficas con defecto Helly 1, ya que se tiene la sospecha de que también son homotópicamente invariantes pues hasta ahora no se conoce una gráfica con defecto Helly 1 que no sea homotópicamente invariante, pero tampoco se tiene una demostración de este hecho. Sin embargo, se ha podido establecer su veracidad para gráficas de orden pequeño haciendo uso de una herramienta que se conoce como colapsos elementales; en esto es en lo que nos enfocaremos el resto del artículo y más específicamente en la sección 8.

Tomando como referencia (Kozlov, 2008), para una colección de subconjuntos $\mathcal{U} = \{X_i\}_{i \in I}$ de un conjunto X , se define el **nervio** de \mathcal{U} y se denota por $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ al complejo simplicial cuyo conjunto de vértices es \mathcal{U} , donde un subconjunto finito de $S \subseteq \mathcal{U}$ es un simplejo si y solo si $\bigcap S \neq \emptyset$.

Definición 7. *Si G es una gráfica, denotamos al **nervio** de G como $\mathcal{N}(G)$ y es el complejo simplicial dado por $\mathcal{N}(\mathcal{U})$, donde $\mathcal{U} = V(K(G))$.*

El siguiente resultado es consecuencia inmediata del teorema de Dowker, teorema 2 tomando la gráfica bipartita $B = (X, Y)$, donde $X = V(G)$ y $Y = V(K(G))$. Se declara a $x \in V(G)$ adyacente a $q \in V(K(G))$ si $x \in q$.

Corolario 1. *Sea G una gráfica. Entonces $\mathcal{N}(G) \subseteq \Delta(K(G))$, $\mathcal{N}(G) = \Delta(K(G))$ si y solo si G es clan Helly. Además $|\Delta(G)| \simeq |\mathcal{N}(G)|$.*

Definición 8. *Sea Δ un complejo simplicial. Decimos que $\tau \in \Delta$ es una **cara libre** si es una cara no maximal que está contenida en una sola cara maximal σ donde $\dim \tau = \dim \sigma - 1$. Donde $\dim \tau$ significa la dimensión del simplejo, la cual se define como la cardinalidad de τ menos 1.*

El siguiente teorema es conocido y usado por bastantes investigadores que estudian estos conceptos, sin embargo, no se encontró una referencia donde se demuestre. Así que en mi trabajo de tesis (Islas, 2021) se demuestra con detalle el teorema.

Teorema 5. *Si τ es una cara libre que solo está contenida en la cara maximal σ de un complejo simplicial Δ , entonces $|\Delta| \simeq |\Delta - \{\tau, \sigma\}|$. Esta operación de quitar una cara libre junto a la única cara maximal en la que está contenida se llama un **colapso elemental**.*

En el presente artículo usaremos colapsos elementales para probar varias equivalencias homotópicas, algunas nuevas y otras ya conocidas. La ventaja de los colapsos elementales sobre otras maneras de probar equivalencias homotópicas radica en que es una herramienta combinatoria y elemental, factible de ser comprobada computacionalmente.

Es directo mostrar que \simeq es una relación de equivalencia, por tanto cumple transitividad. La idea de usar los colapsos elementales para probar homotopía entre G y $K(G)$ es partir del hecho de que se sabe que $|\Delta(G)| \simeq |\mathcal{N}(G)|$ y de que $\mathcal{N}(G) \subseteq \Delta(K(G))$. Si se lograra mostrar que por medio de colapsos elementales se puede llegar del complejo de completas de $K(G)$ al nervio de G y, ya que los colapsos elementales no alteran el tipo de homotopía, entonces se tendría $|\mathcal{N}(G)| \simeq |\Delta(K(G))|$. Así, en tal caso por transitividad se seguiría que $|\Delta(G)| \simeq |\Delta(K(G))|$, es decir, G es homotópicamente invariante. En conclusión, si $\Delta(K(G))$ se puede colapsar a $\mathcal{N}(G)$ entonces $G \simeq K(G)$ (G es homotópicamente invariante).

Veamos un ejemplo con cierto detalle.

Consideremos la gráfica G de la figura 5, la cual no es clan Helly. Podemos ver que esta es homotópica a un punto observando su realización geométrica $|\Delta(G)|$ en la figura 5. Por otra parte, G tiene cinco clanes, los cuales son

$$\begin{aligned} q_1 &= \{a, b, c\}, & q_4 &= \{c, e, f\}, \\ q_2 &= \{b, d, e\}, & q_5 &= \{a, c, f\}, \\ q_3 &= \{b, c, e\}, \end{aligned}$$

Además se puede ver que los clanes q_1, q_2, q_3, q_4 forman un clan en la gráfica $K(G)$ igual que los clanes q_1, q_3, q_4, q_5 , entonces $K(G)$ tiene dos clanes de cuatro vértices (por lo tanto $K(G)$ es clan Helly). Esto nos indica que $|\Delta(K(G))|$ es un complejo simplicial formado por dos 3-simplejos y sus caras, además la intersección de estos dos simplejos es un 2-simplejo (Ver figura 6). Consideremos también el nervio $\mathcal{N}(G)$, notemos que

$$\begin{aligned} \bigcap \{q_1, q_3, q_4, q_5\} &= \{c\} \neq \emptyset \quad \text{y} \\ \bigcap \{q_1, q_2, q_3, q_4\} &= \bigcap \{q_1, q_2, q_4\} = \emptyset. \end{aligned}$$

Así, $\mathcal{N}(G)$ tiene caras maximales

$$\{q_1, q_3, q_4, q_5\}, \{q_2, q_3, q_4\}, \{q_1, q_2, q_3\},$$

de esta forma, haciendo un colapso elemental a $\Delta(K(G))$ con la cara $\tau = \{q_1, q_2, q_4\}$ y con $\sigma = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ se tiene

$$\Delta(K(G)) \simeq \Delta(K(G)) - \{\tau, \sigma\} = \mathcal{N}(G) \simeq \Delta(G),$$

por lo tanto $\Delta(K(G)) \simeq \Delta(G)$.

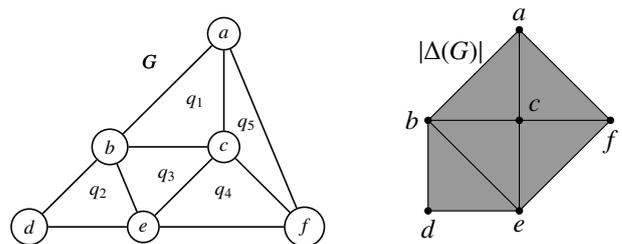


Figura 5: Gráfica G y su realización geométrica $|\Delta(G)|$.

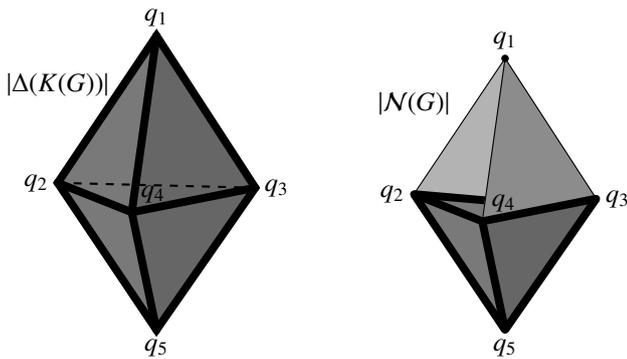


Figura 6: Realizaciones geométricas $|\Delta(K(G))|$ y $|N(G)|$.

7. Teoremas sobre invariancia de homotopía

En esta sección se mencionan algunos resultados sobre invariancia homotópica que serán utilizados para mostrar los resultados obtenidos.

Definición 9. Si G es una gráfica y x es un vértice de G entonces denotamos por $N(x)$ al conjunto de todos los vecinos de x en G . Además, decimos que una gráfica H es un **cono** si existe un vértice $a \in H$ tal que es vecino de todos los vértices en H distintos de a , en este caso a es llamado un **ápice** del cono H .

Por ejemplo, si una gráfica es completa, entonces es un cono y de hecho, todo vértice sería un ápice.

Definición 10. Un vértice x de una gráfica G es **dominado** si $N(x)$ es un cono. Suponiendo que a es un ápice de $N(x)$ decimos que a domina a x .

El siguiente es un teorema muy conocido el cual se muestra en (Prisner, 1992).

Teorema 6. (Prisner 1992). Si G es una gráfica y x es un vértice dominado de G entonces $G \simeq G - x$, es decir, quitar un vértice dominado no altera el tipo de homotopía de una gráfica.

Definición 11. Una gráfica G es **desmantelable** si podemos remover sucesivamente vértices dominados en lo que queda de la gráfica hasta llegar a la gráfica con un solo vértice.

Definición 12. Para una gráfica G y una subgráfica inducida H de G denotamos por $N_G(H)$ a todos los vértices de G que son vecinos de todos los vértices de H .

Los siguientes teoremas y proposiciones son casos particulares de algunos resultados que se demuestran en (Frías-Armenta et al., 2004).

Teorema 7. Si x es un vértice dominado de G , entonces $K(G - x)$ es isomorfa a alguna subgráfica inducida de $K(G)$.

Proposición 1. En el contexto del teorema 7, cualquier vértice de $K(G)$ que no está en $\Phi(K(G - x))$ es dominado por un vértice en $\Phi(K(G - x))$. Donde la función $\Phi : K(G - x) \rightarrow K(G)$ está dada por:

$$\Phi(q) = \begin{cases} q \cup \{x\} & \text{si } x \in N_G(q), \\ q & \text{otro caso.} \end{cases}$$

El siguiente teorema se sigue de forma inductiva usando el teorema 7 y la proposición 1.

Teorema 8. Si una gráfica G es desmantelable entonces $K(G)$ es desmantelable.

Recordemos que las gráficas G desmantelables son aquellas que sucesivamente se pueden quitar vértices dominados hasta quedarnos con un solo vértice y por el teorema 6 se sabe que quitar vértices dominados no altera el tipo de homotopía, así se tiene que las gráficas desmantelables son homotópicas a un punto. Luego, del teorema 8 se sigue que $K(G)$ también es desmantelable, por lo que es homotópica a un punto y entonces $G \simeq K(G)$, es decir, si G es desmantelable entonces es homotópicamente invariante.

Teorema 9. Si G es una gráfica con vértice dominado x , entonces $K(G - x) \simeq K(G)$.

Demostración. Por el teorema 7, la gráfica $K(G - x)$ es isomorfa a una subgráfica inducida de $K(G)$, luego por la proposición 1 todo vértice que no está en $K(G - x)$ es dominado en $K(G)$ por un vértice en $K(G - x)$, y por el teorema 6 sabemos que quitar vértices dominados no altera el tipo de homotopía de una gráfica, por lo tanto $K(G - x) \simeq K(G)$. \square

Definición 13. Sea T un triángulo en la gráfica G . El **triángulo extendido** \hat{T} se define como la subgráfica de G inducida por los vértices que son vecinos de al menos dos vértices de T .

A continuación se incluye un resultado que se demuestra en (Dragan, 1989), e independientemente, en (Szwarcfiter, 1997). Este resultado es conocido como el **criterio del triángulo extendido**.

Teorema 10. (Dragan 1989, Szwarcfiter 1997). Una gráfica G es clan Helly si y solo si todo triángulo T de G es tal que \hat{T} es un cono.

Lema 1. Si G es una gráfica clan Helly y x es un vértice dominado de G , entonces $G - x$ es clan Helly.

Demostración. Usaremos el criterio del triángulo extendido para probar este lema. Observemos que si T es un triángulo en $G - x$ entonces también es un triángulo en G . Consideremos el triángulo extendido \hat{T} en G , el cual tiene ápice, digamos u (pues G es clan Helly). Si u no es x , es inmediato que u es ápice del triángulo extendido en $G - x$. Pero si $u = x$, entonces, supongamos que x es dominado por y en G , como y es vecino de todos los vecinos de x , entonces y también es ápice del triángulo extendido en G y como $y \neq x$ entonces y es ápice del triángulo extendido en $G - x$, por lo tanto $G - x$ es clan Helly. \square

Teorema 11. Si G es una gráfica tal que $K(G)$ es clan Helly y x es un vértice dominado de G , entonces $K(G - x)$ es clan Helly.

Demostración. Por el teorema 7 y la proposición 1 se tiene que todo vértice en $K(G)$ que no está en $K(G - x)$ es dominado por un vértice en $K(G - x)$, es decir, podemos obtener la gráfica $K(G - x)$ quitando vértices dominados de $K(G)$, y por el lema 1 se sigue que $K(G - x)$ es clan Helly. \square

8. Resultados en gráficas no clan Helly

Ya se ha mostrado que las gráficas clan Helly, es decir, las gráficas con defecto Helly 0 son homotópicamente invariantes. Además se concen muchos ejemplos de gráficas con defecto Helly 1 que son homotópicamente invariantes, de hecho no se conoce hasta ahora ninguna gráfica con defecto Helly 1 que no sea homotópicamente invariante. De esto es que surge la siguiente conjetura.

Conjetura 1. *Todas la gráficas con defecto Helly 1 son homotópicamente invariantes.*

Proposición 2. *Supongamos que una gráfica G no es clan Helly y que C es la colección de clanes de G . Ya que G no es clan Helly, entonces existe una colección intersecante $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\} \subseteq C$ tal que $\bigcap Q = \emptyset$. Entonces pasa una de las siguientes cosas o ambas:*

1. Existe $q_{m+1} \in C - Q$ tal que $Q \cup \{q_{m+1}\}$ es una colección intersecante y se observa que $\bigcap(Q \cup \{q_{m+1}\}) = \emptyset$.
2. Existe al menos un $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ tal que $\bigcap(Q - \{q_i\}) = \emptyset$.

La proposición anterior está inspirada en que se trató de buscar una gráfica G que no fuese clan Helly, que $K(G)$ fuese una completa de cuatro vértices y que $\mathcal{N}(G)$ fuese igual a el complejo de completas de $K(G)$ pero sin la cara maximal de cuatro vértices. Sin embargo, eso no puede pasar, ya que si suponemos que el conjunto de clanes de G es $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$, que se intersecan dos a dos, que $\bigcap Q = \emptyset$ y que además

$$\begin{aligned} I_1 &= q_1 \cap q_2 \cap q_3 \neq \emptyset \\ I_2 &= q_1 \cap q_2 \cap q_4 \neq \emptyset \\ I_3 &= q_1 \cap q_3 \cap q_4 \neq \emptyset \\ I_4 &= q_2 \cap q_3 \cap q_4 \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Es decir, estamos suponiendo que no se cumple el punto 2 de la proposición anterior. Veamos que entonces deben existir $x \in I_1, y \in I_2, z \in I_3, w \in I_4$ distintos entre sí, deben ser distintos porque si por ejemplo pasase que $x = y$, entonces se tendría que $x \in \bigcap Q$ lo cual es una contradicción, similarmente se puede ver para el resto de los casos. Además se tiene que todos los vértices x, y, z, w son adyacentes entre sí, porque $x, y \in q_1, x, z \in q_1, x, w \in q_2, y, z \in q_1, y, w \in q_2, z, w \in q_3$, por lo tanto x, y, z, w están en un clan de G , pero este clan no puede ser ninguno de los q_i , por ejemplo, si $x, y, z, w \in q_1$, entonces $w \in q_1$ y por estar en I_4 se seguiría que $x \in \bigcap Q$ y esto es una contradicción. Los demás casos también nos llevan a una contradicción. Entonces, debe existir un clan $q \neq q_i$ que además interseca a todos los q_i , pero se suponía que G solo tenía cuatro clanes, entonces debe suceder que al menos uno de los conjuntos I_1, I_2, I_3, I_4 es vacío.

Concluimos así lo siguiente:

Teorema 12. *Si $\bigcap Q = \emptyset$ entonces al menos uno de los conjuntos I_1, I_2, I_3, I_4 es vacío, o bien existe un clan $q \in K(G) - Q$ tal que $Q \cup \{q\}$ es una colección intersecante tal que $\bigcap(Q \cup \{q\}) = \emptyset$.*

Demostración. (De la proposición 2) Si tenemos que $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ es una colección intersecante de clanes de G (es decir, Q es una completa de $K(G)$) tal que $\bigcap Q = \emptyset$ y pasara que $\bigcap(Q - \{q_i\}) \neq \emptyset$ para todo $i = 1, 2, \dots, m$. Se deduce que existen $x_1, x_2, \dots, x_m \in Q - \{q_1\}, Q - \{q_2\}, \dots, Q - \{q_m\}$ respectivamente distintos entre sí y que además son adyacentes entre ellos, por lo que se encuentran en algún clan que no puede ser ninguno de los q_i (pues si eso pasara se tendría que $\bigcap Q \neq \emptyset$), dicho clan, llamémoslo q , interseca a todos los q_i . Por lo tanto, $Q \cup \{q\}$ es una colección intersecante tal que $\bigcap(Q \cup \{q\}) = \emptyset$. Ahora, si Q fuese un clan de $K(G)$, puesto que no se le puede añadir un nuevo clan de tal manera que se forme una colección más grande, entonces al menos uno de los conjuntos $\bigcap(Q - \{q_i\})$ tiene que ser vacío. \square

Lema 2. *Supongamos que G es una gráfica tal que $K(G) = K_4$ y que G no es clan Helly, entonces podemos obtener a $\mathcal{N}(G)$ haciendo colapsos elementales a $\Delta(K(G))$.*

Demostración. Sean q_1, q_2, q_3, q_4 los vértices de $K(G)$. Como G no es clan Helly, entonces $\bigcap V(K(G)) = \emptyset$. De la proposición 2 podemos ver que existe al menos un clan de G tal que $\bigcap(V(K(G)) - q_i) = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad supongamos que dicho clan es q_4 , sabemos que existen $x \in q_1 \cap q_2, y \in q_1 \cap q_3, z \in q_2 \cap q_3$, observemos que x, y, z forman un triángulo T en G y que estos vértices deben ser distintos entre sí, pues si pasara que algunos de ellos fueran iguales entonces se tendría que $q_1 \cap q_2 \cap q_3 \neq \emptyset$ y estamos suponiendo que eso no pasa. Luego, dicho triángulo debe estar en algún clan, pero observemos que ese clan no puede ser ninguno de los q_i con $i = 1, 2, 3$, pues eso también nos llevaría a que $q_1 \cap q_2 \cap q_3 \neq \emptyset$, por lo que necesariamente T debe estar en q_4 , eso significa que los vértices x, y y z cumplen $x \in q_1 \cap q_2 \cap q_4, y \in q_1 \cap q_2 \cap q_3$ y $z \in q_2 \cap q_3 \cap q_4$. Por lo tanto, el nervio de G es necesariamente

$$\mathcal{N}(G) = \Delta(K(G)) - \{\{q_1, q_2, q_3\}, \{q_1, q_2, q_3, q_4\}\}.$$

Es decir, se pueden colapsar las caras $\{q_1, q_2, q_3\}, \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ del complejo $\Delta(K(G))$ y obtenemos el nervio $\mathcal{N}(G)$ justo como se quería mostrar. \square

8.1. Diferencia entre los complejos $\Delta(K(G))$ y $\mathcal{N}(G)$

En esta primera parte de la sección se mostró que existen casos en los que el complejo $\Delta(K(G))$ se puede colapsar al sub-complejo $\mathcal{N}(G)$ cuando la diferencia entre ellos no es complicada. En esta parte analizaremos con detalle la situación cuando esta diferencia tiene cardinalidad pequeña.

Corolario 2. *La cardinalidad $|\Delta(K(G)) - \mathcal{N}(G)| \neq 1$.*

Demostración. Se sigue directamente de la proposición 2. Puesto que si $Q \in \Delta(K(G)) - \mathcal{N}(G)$, entonces, si C es la colección de clanes de G , pasa alguna de las siguientes dos situaciones:

1. Existe $q \in C - Q$ tal que $Q \cup \{q\}$ es una colección intersecante con $\bigcap(Q \cup \{q\}) = \emptyset$, es decir, $Q \cup \{q\} \in \Delta(K(G)) - \mathcal{N}(G)$, por lo que, el conjunto $\Delta(K(G)) - \mathcal{N}(G)$ tendría al menos dos elementos.
2. Existe al menos un $q \in Q$ tal que $\bigcap(Q - \{q\}) = \emptyset$, es decir, $Q - \{q\} \in \Delta(K(G)) - \mathcal{N}(G)$, obteniendo que $\Delta(K(G)) - \mathcal{N}(G)$ tendría al menos dos elementos.

Con esto se tiene el resultado. \square

Proposición 3. Si G es una gráfica tal que $\mathcal{D} = \Delta(K(G)) - N(G)$, entonces la cardinalidad de \mathcal{D} no puede ser tres, es decir, $|\mathcal{D}| \neq 3$.

Demostración. Supongamos que X, Y y Z son completas de la gráfica $K(G)$ tal que $\bigcap X = \bigcap Y = \bigcap Z = \emptyset$. Podría pasar que $X \subset Y \subset Z$, entonces existe $q \in Z \setminus Y$, así $X \cup \{q\} \not\subseteq Y$ y $\bigcap(X \cup \{q\}) = \emptyset$ entonces \mathcal{D} tiene al menos cuatro elementos.

También podría pasar que $X \subseteq Y$ y $X \subseteq Z$ con $Y \not\subseteq Z$ y $Z \not\subseteq Y$, esto quiere decir que X no es maximal y además existen $q_1 \neq q_2$ con $q_1 \in Y$ y $q_2 \in Z$, en ese caso $Y_1 = X \cup \{q_1\}$ y $Z_1 = X \cup \{q_2\}$ son completas de $K(G)$ y $\bigcap Y_1 = \bigcap Z_1 = \emptyset$ si $Z_1 \neq Z$ o $Y_1 \neq Y$ entonces se tendrían más de tres elementos en \mathcal{D} . Entonces, supongamos que $Y = Y_1$ y $Z = Z_1$, en ese caso Z y Y solo difieren entre sí por los elementos q_1 y q_2 y deben ser maximales pues en caso de no serlo podríamos tener más elementos en \mathcal{D} . Además, si suponemos que solamente \mathcal{D} tiene tres elementos, entonces existe $x_i \in \bigcap(X - q'_i)$ para cada elemento $q'_i \in X$, observemos que los x_i forman una completa de G , la cual debe estar en algún clan q de G , este clan no puede ser ninguno de los elementos de X , pero interseca a todos ellos, si dicho clan no fuese q_1 o q_2 se tendría un elemento más en \mathcal{D} . Ahora, sin pérdida de generalidad supongamos que $q = q_1$, si $q_1 \sim q_2$ esto nos llevaría a una contradicción, entonces supongamos que $q_1 \not\sim q_2$. Como X, Y, Z son los únicos elementos en \mathcal{D} entonces existen $w_i \in \bigcap((X - q'_i) \cup q_2)$, para cada $q'_i \in X$, pero los vértices w_i no pueden ser iguales a los x_i , pues si al menos uno de ellos fuese igual a algún x_i se tendría $q_1 \sim q_2$, lo cual estamos suponiendo que no pasa. Pero observemos que la unión de los x_i con los w_i forman una completa y está contenida tanto en q_1 como en q_2 , esto implicaría que $q_1 = q_2$, lo cual es una contradicción que viene de suponer que \mathcal{D} tiene tres elementos.

Otro caso más que pudiese ocurrir es que $X, Y \subseteq Z$, donde sin pérdida de generalidad podemos suponer que Z es maximal, que la cardinalidad de X y Y es la misma y la cardinalidad de Z es igual a la de X más uno (en caso de no ser así se puede ver que existirían más elementos en \mathcal{D}). Supongamos entonces que $Z = \{q_1, q_2, \dots, q_m, q_y, q_x\}$ y que $Y = Z - \{q_z\}$, $X = Z - q_y$. Ahora, definamos $x_i \in \bigcap(X - \{q_i\})$, para $i = 1, 2, \dots, m, x$, se tiene que los x_i forman una completa de G y que deben estar en algún clan que no puede ser ninguno de los elementos de X , en ese caso necesariamente deberían estar en q_y , pero si eso pasa, entonces $x_x \in \bigcap\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ y $x_x \in q_y$. Es decir, se tendría que $\bigcap Y \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción, la contradicción viene de suponer que \mathcal{D} tiene solamente tres elementos.

Finalmente, si se tuviese al menos una cara aislada de las otras dos, es decir, que no estuviera contenida o que no contuviera a alguna de las otras dos, por la proposición 2 se tendría al menos una cara más que la contuviera o que estuviese contenida en ella, concluyendo así que \mathcal{D} no puede tener tres elementos. \square

De las demostraciones anteriores, se observan ciertas construcciones que se pueden usar en demostraciones futuras.

Proposición 4. Si G es una gráfica que no es clan Helly y se tienen $X, Y, Z \in \mathcal{D}$, donde $\mathcal{D} = \Delta(K(G)) - N(G)$ y $X \subset Y \subset Z$, entonces existe al menos otro elemento en \mathcal{D} de la cardinalidad de Y .

Demostración. Supongamos que $|Y| = m$ y $|X| = \ell$, observemos que si $m > \ell + 1$, podemos extender a X añadiendo elementos en $Y - X$ tal que el nuevo conjunto que llamaremos X' sea tal que $|X'| = m - 1$ y que $X' \subset Y$, ahora, como la contención de Y a Z es propia, existe $q \in Z - Y$, este q es vecino de todos los elementos de X' y además $\bigcap(X' \cup \{q\}) = \emptyset$. Además $|X' \cup \{q\}| = m$, es decir, $X' \cup \{q\}$ es un elemento de \mathcal{D} de la cardinalidad de Y distinto de X, Y y Z . \square

8.2. Colapsos en gráficas

Como ya se mencionó, se conjetura que las gráficas con defecto Helly 1 son homotópicamente invariantes, pero esta conjetura bien podría ser falsa y sería bueno tratar de buscar un contraejemplo.

Proposición 5. Si existe G una gráfica “mínima” con defecto Helly 1 tal que no es homotópicamente invariante (es decir, cualquier otra gráfica con defecto Helly 1 y con menor número de vértices que G es homotópicamente invariante) entonces G no tiene vértices dominados.

Demostración. Supongamos que si existe al menos una gráfica G tal que no es clan Helly, $K(G)$ es clan Helly, que además x es un vértice dominado de G y que G no es homotópica a $K(G)$, podemos suponer que G es la más pequeña de las gráficas que tienen todas las propiedades anteriores, excepto la de ser homotópica a $K(G)$.

Podría suceder que $G - x$ fuese clan Helly, en ese caso sabemos que

$$G \simeq G - x \simeq K(G - x).$$

Además también es cierto que $K(G) \simeq K(G - x)$ (por teorema 9), por lo tanto, $G \simeq K(G)$ lo cual es una contradicción, pues se supuso que G y $K(G)$ no son homotópicas.

También podría pasar que $G - x$ no fuera clan Helly, pero como $K(G)$ si es clan Helly, entonces $K(G - x)$ también es clan Helly (por teorema 11). Además se supuso que G era la gráfica más pequeña que cumple no ser homotópica a $K(G)$, por lo tanto $G - x \simeq K(G - x)$ y además se tiene que $G \simeq G - x$ y $K(G) \simeq K(G - x)$, todo ello implica que $G \simeq K(G)$, esto es una contradicción.

En cualquier caso se llega a una contradicción, por lo tanto, al tratar de buscar un contraejemplo mínimo, podemos excluir a las gráficas con vértices dominados. \square

Ahora, observemos lo siguiente: ya hemos visto que la conjetura de que una gráfica G tal que $K(G)$ es clan Helly entonces $G \simeq K(G)$ se cumple al menos hasta el caso donde G tiene seis vértices. Si tratáramos de buscar un contraejemplo o seguir verificando que las gráficas de siete vértices también cumplen la conjetura, observemos que podríamos ignorar, primero las gráficas que sí son clan Helly, ya que dichas gráficas conocemos que en efecto $G \simeq K(G)$ (por teorema 1), también podríamos excluir las gráficas que son desmantelables, ya que también se conoce que dichas gráficas son homotópicamente invariantes. Por la proposición 5 podríamos ignorar a las gráficas con vértices dominados (en particular las que son desmantelables). Por lo tanto, nos tendríamos que fijar en todas las gráficas de siete vértices tal que no son clan Helly, su gráfica de clanes es clan Helly, y que no tienen vértices dominados. Usando el lenguaje Python, la librería `pyclicques` (la cual

está siendo desarrollada por el Dr. Rafael Villarroel, <https://github.com/rvf0068/pycliques> y la librería networkx (<https://networkx.org/>) se pudo encontrar que hay exactamente dos gráficas de siete vértices que tendríamos que verificar que cumplen o no la conjetura, antes de obtener la proposición 5 se hubiesen tenido que verificar 13 gráficas. Se puede verificar que en efecto dichas dos gráficas son homotópicamente invariantes, con esto hemos mostrado que la conjetura es cierta para todas las gráficas de siete vértices.

Para el caso de las gráficas de ocho vértices, sin tener la proposición 5 y haciendo uso del software **Python** se obtuvo que tendríamos que verificar 731 gráficas, pero usando dicha proposición se redujo a verificar solamente 34 gráficas.

De observar todos éstos ejemplos que arrojó el software de **Python** se conjeturaron y demostraron las siguientes proposiciones.

Proposición 6. Sea $\mathcal{D} = \Delta(K(G)) - \mathcal{N}(G)$, donde G es una gráfica tal que cumple $|\mathcal{D}| = 2$ (donde $|\mathcal{D}|$ denota la cardinalidad del conjunto \mathcal{D}), entonces $\Delta(K(G))$ se puede colapsar a $\mathcal{N}(G)$.

Demostración. Recordemos que $|\mathcal{D}| = 0$ si y sólo si G es clan Helly, por lo que estamos considerando gráficas que no son clan Helly. Sea $\mathcal{D} = \{X, Y\}$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que Y es una cara maximal en $\Delta(K(G))$, pues si ambas caras X y Y no fuesen maximales se podrían extender a una maximal y esta cumpliría estar en \mathcal{D} , lo cual no pasa porque $|\mathcal{D}| = 2$. Luego, como Y es maximal por la proposición 2 debe contener una cara Y_1 cuya cardinalidad es uno menos que la de Y tal que $Y \cap Y_1 = \emptyset$, como $|\mathcal{D}| = 2$ entonces necesariamente $Y_1 = X$, además X es una cara libre, pues si estuviese en otra cara maximal dicha cara también estaría en \mathcal{D} , y eso es una contradicción. Por lo tanto, podemos realizar un colapso elemental quitando a X y a Y de $\Delta(K(G))$ y eso es justamente $\mathcal{N}(G)$. \square

Lema 3. Si $X, Y, Z \in \mathcal{D} = \Delta(K(G)) - \mathcal{N}(G)$, donde G es una gráfica entonces no puede pasar que Y y Z sean maximales, $X \subset Y$, $X \subset Z$, $|Z| = |Y| = |X| + 1$ y que el resto de las caras de Z y de Y tengan intersección no vacía.

Definición 14. Una superficie es un espacio topológico tal que todo punto tiene una vecindad homeomorfa a \mathbb{R}^2 . Una gráfica G es una triangulación de la superficie S si $|\Delta(G)| \cong S$.

Se puede demostrar que una gráfica es una triangulación de una superficie si y sólo si la vecindad abierta de todo vértice es un ciclo de longitud mayor o igual a 4.

En la figura 7 tenemos la gráfica O_3 conocida como el octaedro y la gráfica G conocida como la suspensión de C_5 , ambas gráficas se puede mostrar que son homeomorfas a una esfera S^2 .

En el artículo (Larrión et al., 2001) Larrión, Neumann-Lara, Pizaña demuestran que las triangulaciones de superficies diferentes al octaedro son homotópicamente invariantes. A continuación se da una demostración de este hecho usando las herramientas del presente capítulo.

Teorema 13. Si G es una triangulación de una superficie entonces podemos colapsar $\Delta(K(G))$ al nervio $\mathcal{N}(G)$, en particular $G \simeq K(G)$.

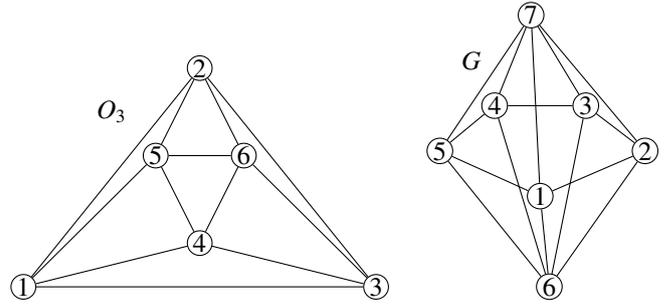


Figura 7: O_3 y suspensión de C_5 .

Demostración. Observemos que una triangulación de una superficie que no es el octaedro, se puede ver en cada parte como en la figura 8. Entonces, cuando se tiene un conjunto de tres clanes de G que se intersecan dos a dos y cuya intersección de los tres es vacía necesariamente se ven de la forma en que se ven q_1, q_3, q_5 en la figura 8, y esa completa de tres se puede extender solo con un clan más, que en este caso es el q_4 , pues como la superficie no es el octaedro no puede haber otro clan más con quién extender a la completa de tres. Además q_1, q_3, q_4, q_5 ya es un clan, observemos entonces que como q_1, q_3, q_5 solo está en en la completa maximal q_1, q_3, q_4, q_5 , es una cara libre y entonces podemos colapsar estas dos caras, y esto lo podemos hacer con cada completa de tres clanes cuya intersección sea vacía, por lo tanto, concluimos que en efecto podemos colapsar $\Delta(K(G))$ al nervio $\mathcal{N}(G)$. \square

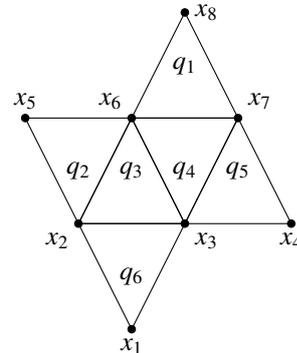


Figura 8: Parte de una triangulación de una superficie.

9. Conclusiones

El presente trabajo sugiere que tal vez la conjetura 1 se pueda mostrar a través de colapsos elementales, ya que se verificaron todos los posibles casos hasta gráficas de ocho vértices y en todos resultó ser cierto. Además con ayuda de algunos resultados mostrados se lograron reducir un buen número de casos. Cabe notar que también pudimos aplicar la herramienta de colapsos elementales para demostrar equivalencias homotópicas que ya habían sido demostradas usando otros métodos. Resulta relevante, pues los colapsos son una herramienta que se puede manejar computacionalmente, a diferencia de otros teoremas usuales de la topología combinatoria. Por otro lado, los colapsos determinan la llamada relación de homotopía simple, la cual es más estricta que la homotopía usual de espacios topológicos.

Existe una conjetura más fuerte que dice que todas las gráficas con defecto Helly finito son homotópicamente invariantes. No es un problema sencillo ya que ni para el caso $n = 1$ se conoce una respuesta. Pero si dicha conjetura más fuerte resultara ser cierta, esta sería una clase de gráficas homotópicamente invariantes que contiene tanto las gráficas clan Helly como a las desmantelables.

Referencias

- Bandelt, H. J. and Prisner, E. (1991). Clique graphs and Helly graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 51(1):34–45.
- Björner, A. (1995). Topological methods. *Handbook of combinatorics*, 2:1819–1872.
- Dourado, M. C., Protti, F., and Swarcfiter, J. L. (2001). On the Helly defect of a graph. *SciELO Analytics*, 7(3):48–52.
- Dragan, F. F. (1989). Centers of graphs and the Helly property. *Ph. D. Thesis, Moldova State University*.
- Escalante, F. (1973). Über iterierte clique-graphen. *Abh. Math. sem. Univ. Hamburg*, 39:59–68.
- Frias-Armenta, M. E., Neumann-Lara, V., and Pizaña, M. A. (2004). Dis-mantlings and iterated clique graphs. *Discrete Mathematics*, 282:263–265.
- Harary, F. (1969). *Graph theory*. Addison-Wesley.
- Islas, M. (2021). Propiedades homotópicas del operador de clanes en gráficas. *Tesis, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo*, <https://github.com/MauricioIslas/tlphocg.git>.
- Kozlov, D. (2008). *Combinatorial algebraic topology*, volume 21. Springer Science & Business Media.
- Larrión, F., Pizaña, M. A., and Villarroel-Flores, R. (2008). Contractibility and the clique graph operator. *Discrete Math.*, 308(16):3461–3469.
- Larrión, F., Neumann-Lara, V., and Pizaña, M. A. (2001). On the homotopy type of the clique graph. *Journal of the Brazilian Computer Society*, 7:69 – 73.
- Munkres, J. R. (1984). *Homology Groups of a Simplicial Complex*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Prisner, E. (1992). Convergence of iterated clique graphs. *Discrete Math*, 103(2):199–207.
- Szwarcfiter, J. L. (1997). Recognizing clique-Helly graphs. *Ars Combin.*, 45:29–32.