DESDE 2013
https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/icbi/issue/archive
Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI
ISSN: 2007-6363

Publicación Semestral Pädi Vol. 10 No. Especial (2022) 102–107

Sobre $\omega_{\mathcal{I}}$–cubiertas
On $\omega_{\mathcal{I}}$–covers

C. López-Callejas [a,*], R. Cruz-Castillo [b]

[a] *Centro de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, 58089, Morelia, Michoacán, México.*
[b] *Área Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México.*

Resumen

Este trabajo se centra en presentar lo que hemos llamado $\omega_{\mathcal{I}}$-cubiertas, donde $\mathcal{I}$ es un ideal no principal sobre algún espacio topológico X. Estas cubiertas son una generalización de lo que en la literatura se conoce como ω-cubiertas y resulta que las $\omega_{\mathcal{I}}$-cubiertas satisfacen algunas propiedades análogas a éstas. En particular, demostramos que un espacio X satisface cierto principio de selección en términos de las $\omega_{\mathcal{I}}$-cubiertas si y sólo si satisface una relación tipo Ramsey, lo que generaliza un resultado clásico para las ω-cubiertas que fue demostrado por Scheepers (1996) y por Just et al. (1996).

Palabras Clave: Espacios topológicos, cubiertas abiertas, principios de selección, ideales, teoría de Ramsey.

Abstract

This work focuses on presenting what we have called $\omega_{\mathcal{I}}$-covers, where $\mathcal{I}$ is a non-principal ideal on some topological space X. These covers are a generalization of what is known in the literature as ω-covers and it turns out that the $\omega_{\mathcal{I}}$-covers satisfy some properties analogous to these. In particular, we show that a space X satisfies an specific selection principle in terms of the $\omega_{\mathcal{I}}$-covers if and only if it satisfies a Ramsey type relation, which generalizes a classic result for the ω-covers that was proved in Scheepers (1996) and in Just et al. (1996).

Keywords: Topological spaces, open covers, selection principles, ideals, Ramsey theory.

1. Introducción

La combinatoria de las cubiertas abiertas es un tema que ha sido ampliamente estudiado en la literatura y que ha permitido que aumentemos nuestro entendimiento de los espacios topológicos en general. Para esto se han desarrollado técnicas propias que tienen una relación muy estrecha con juegos topológicos y también con principios de selección.

Por otro lado, los ideales son también una noción fuertemente estudiada en la teoría de conjuntos moderna. Implícitamente en diversos conceptos siempre está detrás alguna propiedad que involucra el ideal de los conjuntos finitos, lo cual a su vez permite que dichos conceptos sean susceptibles de una generalización *natural* para ideales arbitrarios. Esto es lo que nosotros hemos hecho en este trabajo, para el concepto de las ω-cubiertas, generalizándolo a lo que nosotros hemos denominado $\omega_{\mathcal{I}}$-cubiertas, donde $\mathcal{I}$ es un ideal propio no principal. Mostramos que esta generalización es adecuada en el sentido de que algunos de los resultados clásicos para ω-cubiertas son también ciertos para $\omega_{\mathcal{I}}$-cubiertas y por lo tanto de los resultado aquí presentados se puede deducir, como caso particular, los respectivos para las ω-cubiertas.

El presente trabajo busca entonces mostrar que algunos teoremas que involucran la combinatoria de las ω-cubiertas realmente en su esencia sólo están empleando, implícitamente, el hecho de que la familia de los subconjuntos finitos de un espacio dado (infinito) es un ideal.

2. Cubiertas, ideales y relaciones flecha

A lo largo de todo el trabajo, utilizamos la siguiente notación, que es de uso estándar dentro del área (ver Hernández-Hernández (1998)). Representamos el conjunto de los números naturales como ω. El número natural 2, como conjunto, es igual a $\{0, 1\}$. Por otro lado, dado un conjunto A, su conjunto potencia lo denotamos por $\mathcal{P}(A)$ y su cardinalidad por $|A|$; además $[A]^n$ es la familia de todos los subconjuntos de A con exactamente n

[*] Autor para correspondencia: carloscallejas.math@gmail.com.
Correo electrónico: carloscallejas.math@gmail.com (Carlos López-Callejas), rcruzc@uaeh.edu.mx (Ricardo Cruz-Castillo).

Fecha de recepción: 04/01/2022 Fecha de aceptación: 14/03/2022 Fecha de publicación: 22/04/2022
https://doi.org/10.29057/icbi.v10iEspecial.8554

elementos (con $n \in \omega$) y $[A]^{<\omega}$ es la familia de todos los subconjuntos finitos de A. Por último, decimos que dos conjuntos son equipotentes si existe una función biyectiva entre ellos.

2.1. Ideales

El concepto de ideal en teoría de conjuntos se ha estudiado ampliamente (ver Bartoszyński and Judah (1995)). Aunque la definición es completamente conjuntista, ésta tiene sus orígenes en la teoría de anillos. Particularmente se puede notar que los ideales en el sentido conjuntista son exactamente los ideales en el sentido algebraico del anillo booleano $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ (ver 4.10 y 4.11 de López-Callejas (2018)).

Definición 2.1. *Un ideal sobre un conjunto X es una familia $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ que satisface:*

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$.
2. *Si $A, B \in \mathcal{I}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{I}$.*
3. *Si $A \in \mathcal{I}$ y $B \subseteq A$ entonces $B \in \mathcal{I}$.*

Si $\bigcup \mathcal{I} = X$, diremos que el ideal es no principal. Si además sucede que $X \notin \mathcal{I}$, decimos que el ideal $\mathcal{I}$ es propio.

Nota 2.2. *Un ideal $\mathcal{I}$ sobre X es no principal si y sólo si $[X]^{<\omega} \subseteq \mathcal{I}$.*

En el resto del artículo siempre que hablemos de un ideal vamos a suponer que es propio.

Observemos que lo que trata de capturar un ideal es la noción de *pequeñez*. En ese sentido, las condiciones de la Definición 2.1 se pueden interpretar como que el vacío es pequeño y el total no lo es; la unión de dos conjuntos pequeños es pequeño y si alguien es pequeño entonces todos sus subconjuntos lo son. Para un conjunto infinito X un ejemplo de un ideal sobre X es la familia de los subconjuntos finitos de X, $[X]^{<\omega}$. Sobre $\mathbb{R}$ la familia de los subconjuntos de medida cero según Lebesgue forman un ideal $\mathcal{N}$ y sobre cualquier espacio topológico X la familia de todos los subconjuntos nunca densos y la de los subconjuntos magros forman cada una un ideal. Al ideal formado por los conjuntos magros de $\mathbb{R}$ con la topología usual lo denotamos por $\mathcal{M}$. Claramente todos estos ideales son no principales.

Cada ideal tiene asociados varios invariantes cardinales que expresan algunas de sus características, dos de los más importantes son los siguientes:

Definición 2.3. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal no principal sobre X. Definimos los invariantes $add(\mathcal{I})$ y $non(\mathcal{I})$ como:*

$$add(\mathcal{I}) = \text{mín}\{|\mathcal{F}| \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{I} \text{ y } \cup\mathcal{F} \notin \mathcal{I}\}$$

y

$$non(\mathcal{I}) = \text{mín}\{|Y| \mid Y \subseteq X \text{ y } Y \notin \mathcal{I}\}.$$

Nota 2.4. *Si $\mathcal{I}$ es un ideal no principal entonces*

$$\omega \leq add(\mathcal{I}) \leq non(\mathcal{I}).$$

Las relaciones entre algunos de los invariantes asociados a los ideales $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$ antes mencionados son temas de estudio importantes para la rama de la combinatoria infinita (ver por ejemplo Blass (2010)) y en particular son tema central en el desarrollo de la técnica de forcing (por ejemplo en Bartoszyński and Judah (1995)).

2.2. Cubiertas

Definición 2.5. *Una topología sobre un conjunto X es una familia de subconjuntos de X, $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ que satisface tres condiciones: $\emptyset, X \in \tau$, τ es cerrada bajo uniones arbitrarias y es cerrada bajo intersecciones finitas. Si τ es una topología sobre X, diremos que (X, τ) es un espacio topológico y sus elementos se llamarán conjuntos abiertos.*

Definición 2.6. *Una cubierta abierta de un espacio topológico (X, τ) es una familia de conjuntos (abiertos) $C \subseteq \tau$ que cumple $\bigcup C = X$. A la familia de todas las cubiertas abiertas la denotamos por $\mathscr{O}$.*

En topología, el concepto de cubierta abierta ha sido ampliamente estudiado, dando lugar a propiedades muy interesantes que un espacio puede tener, como la compacidad, el ser Lindelöf, compacidad numerable, etcétera (ver Engelking (1989)). Además, algunas aplicaciones muy interesantes se han dado en la teoría de juegos infinitos (topológicos), principios de selección y combinatoria infinita.

En los trabajos de Scheepers y sus colaboradores (tales como Scheepers (1996) y Just et al. (1996)), se han introducido varios tipos de cubiertas y se ha probado un gran número de resultados importantes respecto a éstas. Por ejemplo, es de particular interés la noción de ω-cubierta, la cual consiste en cubiertas abiertas que satisfacen una propiedad adicional, como vemos en la siguiente definición.

Definición 2.7. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X es una ω-cubierta si $X \notin \mathcal{U}$ y para todo $F \in [X]^{<\omega}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $F \subseteq U$. A la familia de todas las ω-cubiertas de X la denotamos por Ω.*

Note que la familia de los conjuntos finitos forman un ideal no principal, esto motiva la definición de $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta que introducimos en la Sección 3, y que generaliza de manera natural la definición de ω-cubierta.

Por otro lado, una línea de investigación de interés es el de los principios de selección. Particularmente, estamos interesados en el principio S_{fin}, que a continuación se enuncia.

Definición 2.8. *Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son familias de conjuntos entonces el principio de selección $S_{fin}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ significa que para toda sucesión $(\mathcal{U}_n)_{n\in\omega}$ de elementos de $\mathscr{A}$ podemos elegir $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ finito tal que $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{V}_n \in \mathscr{B}$.*

En el caso particular del principio de selección $S_{fin}(\mathscr{O}, \mathscr{O})$, nos referimos a éste como el principio de Menger, el cual fue introducido por Menger (1924) y después reformulado por Hurewicz (1926), y en el caso de que un espacio X lo satisfaga decimos que X es de Menger. La propiedad de Menger ha sido ampliamente estudiada y se han obtenido resultados interesantes en términos de estrategias ganadoras en juegos topológicos (Pawlikowski (1994)), entre otras aplicaciones.

2.3. Teoría de Ramsey

La Teoría de Ramsey infinita tiene su origen en el artículo *On a problem of formal logic* (Ramsey (1930)), el cual es uno de los más influyentes en la historia de la teoría de conjuntos y la combinatoria. Esta teoría y las técnicas desarrolladas en su estudio han tenido diversas aplicaciones dentro de muchas áreas de las matemáticas, como por ejemplo en el análisis funcional (Gowers (2002)) y la topología (Scheepers (1996)). El primer teorema importante es el teorema de Ramsey infinito (ver Ramsey (1930)):

Teorema 2.9. *Sea $f : [\omega]^2 \to 2$, entonces existe $B \subseteq \omega$ infinito e $i \in 2$ tal que para todo $u, v \in B$ distintos $f(\{u, v\}) = i$.*

A la función f del teorema anterior se le suele llamar una coloración, esto es porque podemos interpretar a f como una función que a cada arista de la gráfica completa con ω vértices, le asigna el color 0 o el color 1. En efecto, si consideramos la gráfica completa[1] cuyo conjunto de vértices es ω, entonces el conjunto de aristas de dicha gráfica es $[\omega]^2$.

El enunciado del Teorema 2.9 se denota como $\omega \to (\omega)^2_2$. En general, una relación flecha del tipo $A \to (B)^2_2$ significa que para toda función $f : [A]^2 \to 2$, existe un conjunto $C \subseteq A$ que es equipotente a B y un $i \in 2$ tal que para todos $u, v \in C$ distintos $f(\{u, v\}) = i$. Este tipo de relaciones flecha se han generalizado de diversas formas en distintos contextos. Por ejemplo, restringiendo a una clase específica de coloraciones o a que el conjunto C buscado tenga alguna relación de *isomorfismo* más fuerte con B, además de ser equipotentes (ver Halbeisen (2012)). En particular las relaciones flecha se han introducido en el estudio combinatorio de las cubiertas abiertas.

Definición 2.10. *Sean S un conjunto, $f : [S]^2 \to 2$ una función e $i \in 2$. Decimos que $R \subseteq S$ es eventualmente i-homogéneo, si existe una función $\phi : R \to \omega$ finito a uno[2] tal que si $u, v \in R$ son tales que $\phi(u) \neq \phi(v)$, entonces $f(\{u, v\}) = i$. Además, R es eventualmente homogéneo si es eventualmente i-homogéneo para algún $i \in 2$.*

Note que R es eventualmente homogéneo si existe $i \in 2$ fija y podemos particionar a R como $R = \bigcup_{n\in\omega} R_n$, donde cada R_n es finito y además, si $u \in R_n$ y $v \in R_m$ para $n \neq m$, entonces $f(\{u, v\}) = i$. Además, todo conjunto eventualmente homogéneo es numerable por ser la unión numerable de conjuntos finitos.

Proposición 2.11. *No existen conjuntos que sean a la vez eventualmente 0-homogéneos y eventualmente 1-homogéneos.*

Demostración. Supongamos que R es eventualmente 0-homogéneo y también eventualmente 1-homogéneo y sean $\{R_n \mid n \in \omega\}$ y $\{S_n \mid n \in \omega\}$ las particiones de R que atestiguan ésto, es decir, $R = \bigcup_{n\in\omega} R_n$ y $R = \bigcup_{n\in\omega} S_n$ y satisfacen que:

1. Cada R_n y cada S_n son finitos.
2. Si u y v son tales que $u \in R_n$ y $v \in R_m$ para $n, m \in \omega$ distintos, entonces $f(\{u, v\}) = 0$.
3. Si u y v son tales que $u \in S_n$ y $v \in S_m$ para $n, m \in \omega$ distintos, entonces $f(\{u, v\}) = 1$.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que para todo $n \in \omega$, $R_n \neq \emptyset$. Para cada $n \in \omega$, sea $u_n \in R_n$ y considere $B = \{u_n \mid n \in \omega\}$. Claramente para cada par en B la función f les asigna el color 0, pero entonces no puede ser que para $u, v \in B$ distintos, $u \in S_n$ y $v \in S_m$ para $n \neq m$ (pues en ese caso f les asignaría el color 1). Luego B tiene que estar contenido en algún S_n y esto es imposible pues cada S_n es finito. □

Una parte central en el desarrollo de la teoría de Ramsey consiste en estudiar cuáles son las estructuras que cumplen que, para cualquier coloración, podemos extraer subestructuras *homogéneas* en algún sentido. Resulta entonces natural desde ese punto de vista la siguiente definición.

Definición 2.12. *Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son dos colecciones de familias de conjuntos, entonces $\mathscr{A} \to \lfloor \mathscr{B} \rfloor^2_2$ significa que siempre que $\mathcal{U} \in \mathscr{A}$ y $f : [\mathcal{U}]^2 \to 2$, existe un $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $\mathcal{V} \in \mathscr{B}$ y $\mathcal{V}$ es eventualmente homogéneo.*

Podemos interpretar la Definición 2.12 de la siguiente manera: los elementos de la clase $\mathscr{A}$ son *lo suficientemente grandes*, de modo que para todo conjunto $\mathcal{U}$ en $\mathscr{A}$ y cualquier coloración de la gráfica completa con vértices en $\mathcal{U}$ en dos colores, se puede extraer un subconjunto $\mathcal{V} \in \mathscr{B}$, que es eventualmente homogéneo.

3. Resultados principales

En esta sección introducimos el concepto de $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta y probamos, en el Teorema 3.7, que existe una relación estrecha entre un principio tipo Ramsey y un principio de selección en términos de $\omega_{\mathcal{I}}$-cubiertas.

Definición 3.1. *Sean (X, τ) un espacio topológico e $\mathcal{I}$ un ideal no principal sobre X. Decimos que una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X es una $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta si $X \notin \mathcal{U}$ y para todo $F \in \mathcal{I}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $F \subseteq U$. A la familia de todas las $\omega_{\mathcal{I}}$-cubiertas de X la denotamos por $\Omega_{\mathcal{I}}$.*

En el caso particular en que el ideal $\mathcal{I}$ es la familia de los subconjuntos finitos de X, es decir $\mathcal{I} = [X]^{<\omega}$, una $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta es precisamente una ω-cubierta. Por otro lado, para todo ideal no principal $\mathcal{I}$, en vista de la Nota 2.2, toda $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta sobre X es una ω-cubierta; sin embargo existen, para algunos ideales $\mathcal{I}$, ω-cubiertas que no son $\omega_{\mathcal{I}}$-cubiertas, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2. *Para cada $F \in [\mathbb{R}]^{<\omega}$, denotemos por U_F al conjunto $\bigcup_{x\in F}(x-1, x+1)$ y sea $\mathcal{U} = \{U_F \mid F \in [\mathbb{R}]^{<\omega}\}$. Se tiene que $\mathcal{U}$ es una ω-cubierta de $\mathbb{R}$. Por otro lado, si $\mathcal{I}$ es el ideal sobre $\mathbb{R}$ formado por los subconjuntos de $\mathbb{R}$ a lo más numerables, entonces $\mathcal{U}$ no es una $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta de $\mathbb{R}$. En efecto, es suficiente notar que $\mathbb{Z} \in \mathcal{I}$.*

Lema 3.3. *Sean $\mathcal{I}$ un ideal no principal, $\mathcal{U} \in \Omega_{\mathcal{I}}$ y κ un cardinal tal que $\kappa < add(\mathcal{I})$. Entonces si particionamos a $\mathcal{U}$ en κ familias, alguna de ellas es nuevamente una $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta.*

[1] Una gráfica se dice completa si entre cualquier par de vértices existe una arista.

[2] Una función $\phi : R \to \omega$ se dice *finito a uno* si para todo $n \in \omega$ se cumple que $f^{-1}(\{n\})$ es finito.

Demostración. Supongamos que hemos particionado a $\mathcal{U}$ como

$$\mathcal{U} = \bigcup_{\alpha\in\kappa} \mathcal{U}_\alpha$$

y supongamos que ningún $\mathcal{U}_\alpha$ es $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta. Así, para cada $\alpha \in \kappa$, existe $F_\alpha \in \mathcal{I}$ de modo que no existe $C \in \mathcal{U}_\alpha$ tal que $F_\alpha \subseteq C$. Pero entonces tampoco existe $C \in \mathcal{U}$ tal que $\bigcup_{\alpha\in\kappa} F_\alpha \subseteq C$ y, como $\kappa < add(\mathcal{I})$, $\bigcup_{\alpha\in\kappa} F_\alpha \in \mathcal{I}$, esto es una contradicción con el hecho de que $\mathcal{U} \in \Omega_{\mathcal{I}}$. □

Corolario 3.4. *Si $\mathcal{I}$ es un ideal no principal y $\mathcal{U} \in \Omega_{\mathcal{I}}$, entonces si particionamos a $\mathcal{U}$ en un número finito de familias, alguna de ellas es una $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta.*

Corolario 3.5. *Ninguna $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta es finita.*

Demostración. Si $\mathcal{U}$ fuese una $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta finita entonces, si particionamos a $\mathcal{U}$ en elementos singulares, es decir

$$\mathcal{U} = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} \{U\},$$

por el Corolario 3.4, alguna de esas familias tendría que ser cubierta, pero entonces para alguno de los $U \in \mathcal{U}$ debería suceder que $U = X$, lo cual implica que $X \in \mathcal{U}$, lo que contradice que $\mathcal{U}$ es $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta. □

Lema 3.6. *Sean X un conjunto y $\mathscr{A}$ una colección de familias de subconjuntos de X. Supongamos que sucede alguna de las siguientes propiedades: o bien $S_{fin}(\mathscr{A}, \mathscr{A})$, o bien $\mathscr{A} \to \lfloor \mathscr{A} \rfloor^2_2$. Entonces para toda $\mathcal{U} \in \mathscr{A}$, existe $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ numerable tal que $\mathcal{V} \in \mathscr{A}$.*

Demostración. Primero asumamos $\mathscr{A} \to \lfloor \mathscr{A} \rfloor^2_2$ y suponga que $\mathcal{U} \in \mathscr{A}$ y $f : [\mathcal{U}]^2 \to 2$. Entonces, en vista de la Definición 2.12, existe $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ eventualmente homogéneo tal que $\mathcal{V} \in \mathscr{A}$. En particular $\mathcal{V}$ (al ser eventualmente homogéneo) es numerable, como se requiere.

Por otro lado, asumamos $S_{fin}(\mathscr{A}, \mathscr{A})$. Si consideramos la sucesión $(\mathcal{U}_n)_{n\in\omega}$ dada por $\mathcal{U}_n = \mathcal{U}$ para todo $n \in \omega$ (es decir, la sucesión constante) entonces, aplicando $S_{fin}(\mathscr{A}, \mathscr{A})$, tenemos que para cada $n \in \omega$, existe $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}_n = \mathcal{U}$ finito tal que $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{V}_n \in \mathscr{A}$. En particular, $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}$ y es numerable por ser la unión numerable de conjuntos finitos. □

Teorema 3.7. *Sean X un espacio topológico e $\mathcal{I}$ un ideal no principal sobre él. Entonces son equivalentes:*

(i) X cumple $S_{fin}(\Omega_{\mathcal{I}}, \Omega_{\mathcal{I}})$.
(ii) X satisface $\Omega_{\mathcal{I}} \to \lfloor \Omega_{\mathcal{I}} \rfloor^2_2$.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Sea $\mathcal{U} \in \Omega_{\mathcal{I}}$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que es numerable (ver el Lema 3.6). Supongamos que $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \omega\}$. Ahora sea $f : [\mathcal{U}]^2 \to 2$ una coloración dada. Queremos encontrar un subconjunto de $\mathcal{U}$, que esté en $\Omega_{\mathcal{I}}$ y que sea eventualmente homogéneo.

Definamos recursivamente una sucesión de parejas $(\mathcal{U}_n, i_n)$ con las siguientes condiciones:

1. $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$.
2. Para todo $n \in \omega$ se tiene que $\mathcal{U}_n \in \Omega_{\mathcal{I}}$.
3. Para todo $n \in \omega$ se tiene que $\mathcal{U}_{n+1} \subseteq \mathcal{U}_n$.
4. Para todo $n \in \omega$ se cumple que:
$$\forall V \in \mathcal{U}_n (f(\{V, U_n\}) = i_n).$$

La recursión se hace como sigue.

Podemos particionar a $\mathcal{U}$ como:

$$\mathcal{U} = \{U_0\} \cup \{V \in \mathcal{U} \mid f(\{V, U_0\}) = 0\} \cup \{V \in \mathcal{U} \mid f(\{V, U_0\}) = 1\},$$

y por el Corolario 3.4, alguno de los tres uniendos es una $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta. Claramente $\{U_0\}$ no lo es, por lo tanto alguna entre $\{V \in \mathcal{U} \mid f(\{V, U_0\}) = 0\}$ y $\{V \in \mathcal{U} \mid f(\{V, U_0\}) = 1\}$ es $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta. Llamemos i_0 a un elemento en $\{0, 1\}$ tal que $\{V \in \mathcal{U} \mid f(\{V, U_0\}) = i_0\}$ es $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta y denotemos por $\mathcal{U}_0$ es esta colección. Así, hemos conseguido tener la condición 1 y las condiciones 2 y 4 para el caso $n = 0$.

Supongamos que tenemos definido $(\mathcal{U}_0, i_0), \ldots, (\mathcal{U}_n, i_n)$ y que satisfacen las condiciones 1, 2, 3 y 4.

Podemos particionar a $\mathcal{U}_n \cup \{U_{n+1}\}$ como:

$$\{U_{n+1}\} \cup \{V \in \mathcal{U}_n \mid f(\{V, U_{n+1}\}) = 0\} \cup \{V \in \mathcal{U}_n \mid f(\{V, U_{n+1}\}) = 1\},$$

y por el Corolario 3.4, como $\mathcal{U}_n \cup \{U_{n+1}\}$ es una $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta, entonces alguno de los tres uniendos es una $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta. Claramente $\{U_{n+1}\}$ no lo es, por lo tanto alguna entre $\{V \in \mathcal{U}_n \mid f(\{V, U_{n+1}\}) = 0\}$ y $\{V \in \mathcal{U}_n \mid f(\{V, U_{n+1}\}) = 1\}$ es $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta. Llamemos i_{n+1} a un elemento en $\{0, 1\}$ tal que $\{V \in \mathcal{U}_n \mid f(\{V, U_{n+1}\}) = i_{n+1}\}$ es $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta y elijamos a $\mathcal{U}_{n+1}$ como esta $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta. Así, hemos conseguido tener las condiciones 2, 3 y 4 para $n + 1$, lo cual termina la construcción de la sucesión de parejas $((\mathcal{U}_n, i_n))_{n\in\omega}$.

Así, tenemos una sucesión de $\omega_{\mathcal{I}}$-cubiertas $(\mathcal{U}_n)_{n\in\omega}$, y como el espacio X satisface $S_{fin}(\Omega_{\mathcal{I}}, \Omega_{\mathcal{I}})$, entonces para cada $n \in \omega$, existe $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ finito tal que $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{V}_n \in \Omega_{\mathcal{I}}$. Podemos suponer además, sin pérdida de generalidad, que los $\mathcal{V}_n$ son disjuntos dos a dos (pues en otro caso consideramos $\mathcal{V}'_n = \mathcal{V}_n \setminus \bigcup_{m<n} \mathcal{V}_m$).

Sea $A = \{m \in \omega \mid \exists n \in \omega \text{ tal que } U_m \in \mathcal{V}_n\}$, es decir $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{V}_n = \{U_m \mid m \in A\}$, así

$$\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{V}_n = \{U_m \mid m \in A \text{ e } i_m = 0\} \cup \{U_m \mid m \in A \text{ e } i_m = 1\}.$$

Nuevamente, por el Corolario 3.4 alguno de estos dos últimos uniendos es una $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta. Llamemos $\tilde{i}$ al elemento en $\{0, 1\}$ tal que $\{U_m \mid m \in A \text{ e } i_n = \tilde{i}\}$ es una $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta. Sea $B = \{m \in A \mid i_m = \tilde{i}\}$, notemos que por el Corolario 3.5, B es infinito. Así, $\{U_m \mid m \in B\} \in \Omega_{\mathcal{I}}$. Si llamamos $\mathcal{W}_n = \mathcal{V}_n \cap \{U_m \mid m \in B\}$, tenemos que $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{W}_n = \{U_m \mid m \in B\}$.

Vamos a construir recursivamente ahora una sucesión creciente $(k_m)_{m\in\omega}$ de números naturales tal que

$$U_j \in \mathcal{V}_m \Rightarrow j \leq k_m. \tag{1}$$

Como $\mathcal{V}_0$ es un subconjunto finito de $\mathcal{U}_0$, entonces lo es de $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \omega\}$. Por lo tanto, existe un número natural k_0 tal que si $j > k_0$ entonces $U_j \notin \mathcal{V}_0$. Así, tenemos la propiedad (1) para el caso $m = 0$. Ahora supongamos definidos $k_0, \ldots, k_m \in \omega$ de manera creciente tal que cumplen la propiedad (1). Como $\mathcal{V}_{m+1}$ es un conjunto finito de $\mathcal{U}_{m+1}$, entonces lo es de $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \omega\}$. Por lo tanto, existe un número natural k_{m+1} tal que si $j > k_{m+1}$, entonces $U_j \notin \mathcal{V}_{m+1}$, y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $k_{m+1} > k_m$. Así, tenemos la propiedad (1) para el caso $m+1$, lo cual termina la construcción de la sucesión $(k_m)_{m\in\omega}$.

Ahora vamos a construir recursivamente otra sucesión creciente $(l_m)_{m\in\omega}$ de números naturales tal que cumplen que:

$$j \geq l_0 \Longrightarrow \mathcal{V}_j \subseteq \mathcal{U}_{k_0} \tag{2}$$

y

$$j \geq l_{m+1} \Longrightarrow \mathcal{V}_j \subseteq \mathcal{U}_{k_{l_m}}. \tag{3}$$

Note que si $j \geq k_0$ entonces $\mathcal{V}_j \subseteq \mathcal{U}_j \subseteq \mathcal{U}_{k_0}$, así que l_0 igual a k_0 atestigua que se satisface la propiedad (2).

Ahora supongamos definidos $l_0 < \ldots < l_m$. Si $j \geq k_{l_m}$, entonces $\mathcal{V}_j \subseteq \mathcal{U}_j \subseteq \mathcal{U}_{k_{l_m}}$, así que podemos tomar l_{m+1} igual a k_{l_m} y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $l_{m+1} > l_m$. Esto termina la construcción de la sucesión $(l_n)_{n\in\omega}$.

Ahora para cada $n \in \omega$, sea:

$$\mathcal{P}_n = \bigcup_{l_n \leq j < l_{n+1}} \mathcal{W}_j.$$

Note que claramente $\mathcal{P}_n$ es una unión finita de conjuntos finitos y por lo tanto es finito, además note que:

$$\bigcup_{m\in\omega} \mathcal{W}_n = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}_n = \left(\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}_{2n}\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}_{2n+1}\right).$$

Luego, como $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{W}_n$ es una $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta entonces alguna de las familias entre $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}_{2n}$ y $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}_{2n+1}$ es una $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta, digamos sin pérdida de generalidad que $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}_{2n}$ lo es.

Afirmamos que si $a, b \in \omega$ cumplen que $a < b$ y $U_p \in \mathcal{P}_{2a}$ y $U_q \in \mathcal{P}_{2b}$, entonces $f(\{(U_p, U_q)\}) = \tilde{i}$.

En efecto, notemos que $U_p \in \mathcal{W}_{j_0}$ para algún $j_0 \in \{l_{2a}, \ldots, l_{2a+1} - 1\}$ y $U_q \in \mathcal{W}_{j_1}$ para algún $j_1 \in \{l_{2b}, \ldots l_{2b+1} - 1\}$. Además, como $a < b$, entonces $2a + 1 < 2b$. De todo esto tenemos:

$$l_{2a} \leq j_0 < l_{2a+1} < l_{2(a+1)} \leq l_{2b} \leq j_1 < l_{2b+1}.$$

Además, como $U_p \in \mathcal{W}_{j_0}$ y $U_q \in \mathcal{W}_{j_1}$, entonces $p \leq k_{j_0}$ y $q \leq k_{j_1}$, por la condición (1).

Como $j_1 \geq l_{(2a+1)+1}$, entonces $\mathcal{W}_{j_1} \subseteq \mathcal{U}_{k_{l_{2a+1}}}$, por la condición (3), se obtiene $U_q \in \mathcal{U}_{k_{l_{2a+1}}}$.

Además, note que como $j_0 \leq l_{2a+1}$, entonces $k_{j_0} \leq k_{l_{2a+1}}$. Pero así, $k_{l_{2a+1}} \geq p$ y consecuentemente $\mathcal{U}_{k_{l_{2a+1}}} \subseteq \mathcal{U}_p$. Luego, como $U_q \in \mathcal{U}_{k_{l_{2a+1}}}$, tenemos $U_q \in \mathcal{U}_p$. Como sabemos que $p \in B$, obtenemos que $i_p = \tilde{i}$ y por lo tanto se concluye que $f(\{U_p, U_q\}) = \tilde{i}$.

Así, hemos conseguido particionar la $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}_{2n}$ en familias finitas (precisamente los $\mathcal{P}_{2n}$), de modo que si tomamos dos elementos cualesquiera en subfamilias cualesquiera distintas, la función f en esa pareja toma valor $\tilde{i}$. Luego, $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}_{2n}$ es eventualmente homogéneo, que es lo que buscábamos.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sea $(\mathcal{U}_n)_{n\in\omega}$ una sucesión de $\omega_{\mathcal{I}}$-cubiertas. Por el Lema 3.6, podemos suponer que cada $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta es numerable y tomar $\mathcal{U}_n = \{U_m^n \mid m \in \omega\}$.

Afirmación: La familia $\mathcal{U} = \{U_k^0 \cap U_l^k \mid k, l \in \omega\}$ es una $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta. En efecto, notemos primero que como $U_l^k \neq X$, para cada par de índices $k, l \in \omega$, se tiene que $X \notin \mathcal{U}$. Por otro lado, si $F \in \mathcal{I}$, existe $k \in \omega$ tal que $F \subseteq U_k^0$ ya que $\mathcal{U}_0$ es una $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta. Por otro lado, como también $\mathcal{U}_k$ es una $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta, existe $l \in \omega$ tal que $F \subseteq U_l^k$. Así, tenemos $F \subseteq U_k^0 \cap U_l^k \in \mathcal{U}$.

Por otro lado, es claro que dado un elemento $U \in \mathcal{U}$, éste podría escribirse como $U = U_k^0 \cap U_l^k = U_j^0 \cap U_i^j$ para algunos $i, j, k, l \in \omega$. En tal caso asumimos que para cada $U \in \mathcal{U}$ se ha seleccionado un único par de índices k y l tales que $U = U_k^0 \cap U_l^k$. Ahora, utilizamos esta representación única de cada elemento en $\mathcal{U}$ para definir una coloración $f : [\mathcal{U}]^2 \to 2$ de la siguiente manera:

$$f\left(\left\{U_{k_0}^0 \cap U_{l_0}^{k_0}, U_{k_1}^0 \cap U_{l_1}^{k_1}\right\}\right) = \begin{cases} 0 & si \quad k_0 = k_1 \\ \\ 1 & si \quad k_0 \neq k_1. \end{cases}$$

Aplicando la condición $\Omega_{\mathcal{I}} \to \lfloor \Omega_{\mathcal{I}} \rfloor_2^2$ a la coloración f, existe una $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta de X, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, eventualmente homogénea. Por lo tanto hay dos casos, o bien, $\mathcal{V}$ es eventualmente 0-homogénea, o bien $\mathcal{V}$ es eventualmente 1-homogénea.

En el primer caso, se tiene que existe una sucesión de parejas de índices $((k_i, l_i))_{i\in\omega}$ y una función finito-a-uno $q : \omega \to \omega$ de tal manera que $\mathcal{V} = \left\{U_{k_i}^0 \cap U_{l_i}^{k_i} \mid i \in \omega\right\}$ y para cualesquiera $i, j \in \omega$, si $q(i) \neq q(j)$, entonces $f\left(\left\{U_{k_i}^0 \cap U_{l_i}^{k_i}, U_{k_j}^0 \cap U_{l_j}^{k_j}\right\}\right) = 0$, es decir $k_i = k_j$. Pero esto no es posible, pues al ser q una función finito-a-uno, se tendría que para cualesquiera $i, j \in \omega$, $k_i = k_j$ y por ende, todo elemento en $\mathcal{V}$ estaría contenido en $U_{k_0}^0$ y por lo tanto $\mathcal{V}$ no podría cubrir a X.

Así, concluimos que $\mathcal{V}$ es eventualmente 1-homogénea. Para finalizar, definamos $\mathcal{W} = \left\{U_{l_i}^{k_i} \mid i \in \omega\right\}$ y $\mathcal{W}_n = \left\{U_{l_i}^{k_i} \mid k_i = n\right\}$. Ahora veamos que $\mathcal{W}_n$ es un subconjunto finito de $\mathcal{U}_n$. En efecto, supongamos que algún $\mathcal{W}_n$ es infinito, entones el conjunto $A = \{i \in \omega \mid k_i = n\}$ es infinito y como q es finito-a-uno, deben existir $i, j \in A$, distintos entre sí, tales que $q(i) \neq q(j)$. Entonces, por un lado $f\left(\left\{U_{k_i}^0 \cap U_{l_i}^{k_i}, U_{k_j}^0 \cap U_{l_j}^{k_j}\right\}\right) = 1$ (pues la familia es eventualmente 1-homogénea y $q(i) \neq q(j)$) y por otro lado, al ser $k_i = k_j$, $f\left(\left\{U_{k_i}^0 \cap U_{l_i}^{k_i}, U_{k_j}^0 \cap U_{l_j}^{k_j}\right\}\right) = 0$, esto es una contradicción.

Como $X \notin \mathcal{W}$ y todo elemento de $\mathcal{V}$ está contenido en un elemento de $\mathcal{W}$, se concluye que $\mathcal{W}$ es una $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta de X. Además, se tiene que $\mathcal{W} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{W}_n$. En conclusión, se cumple $S_{fin}(\Omega_{\mathcal{I}}, \Omega_{\mathcal{I}})$. $\square$

Como una consecuencia directa del teorema anterior, se obtiene el siguiente corolario, demostrado en dos implicaciones: $(i) \Rightarrow (ii)$ en Scheepers (1996) y $(ii) \Rightarrow (i)$ en Just et al. (1996).

Corolario 3.8. *Para un espacio X son equivalentes:*

(i) X cumple $S_{fin}(\Omega, \Omega)$.
(ii) X satisface $\Omega \to \lfloor \Omega \rfloor_2^2$.

4. Conclusiones

El concepto de $\omega_{\mathcal{I}}$-cubierta es una noción que generaliza el concepto de ω-cubierta y que se establece de manera natural, notando que la familia de los conjuntos finitos forman un ideal. Esto hace que se puedan enunciar versiones de teoremas clásicos sobre ω-cubiertas para $\omega_{\mathcal{I}}$-cubiertas. Una pregunta interesante a explorar es qué otros resultados conocidos para ω-cubiertas, además del Teorema 3.7, se pueden extender a $\omega_{\mathcal{I}}$-cubiertas y de ser necesario, qué propiedades debe tener el ideal $\mathcal{I}$ para que dichas propiedades se cumplan.

Referencias

Bartoszyński, T. and Judah, H. (1995). *Set theory*. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA. On the structure of the real line.

Blass, A. (2010). *Combinatorial cardinal characteristics of the continuum*, pages 395–489. Springer Netherlands, Dordrecht.

Engelking, R. (1989). *General topology*, volume 6 of *Sigma Series in Pure Mathematics*. Heldermann Verlag, Berlin, second edition. Translated from the Polish by the author.

Gowers, W. T. (2002). An infinite Ramsey theorem and some Banach-space dichotomies. *Annals of Mathematics*, 156(3):797–833.

Halbeisen, L. J. (2012). *Combinatorial set theory*. Springer London.

Hernández-Hernández, F. (1998). *Teoría de conjuntos*. Sociedad Matemática Mexicana.

Hurewicz, W. (1926). Über eine Verallgemeinerung des Borelschen Theorems. *Mathematische Zeitschrift*, 24(1):401–421.

Just, W., Miller, A. W., Scheepers, M., and Szeptycki, P. J. (1996). The combinatorics of open covers II. *Topology and its Applications*, 73(3):241–266.

López-Callejas, C. (2018). Familias independientes: cardinalidad y estructura. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Tesis de Licenciatura.

Menger, K. (1924). Einige Überdeckungssätze der Punktmengenlehre. *Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, 133:421–444.

Pawlikowski, J. (1994). Undetermined sets of point-open games. *Fundamenta Mathematicae*, 144(3):279–285.

Ramsey, F. P. (1930). On a problem of formal logic. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-30(1):264–286.

Scheepers, M. (1996). Combinatorics of open covers I: Ramsey theory. *Topology and its Applications*, 69(1):31–62.