DESDE 2013
https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/icbi/issue/archive
Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI

ISSN: 2007-6363

Publicación Semestral Pädi Vol. 10 No. Especial (2022) 9-13

De lo determinista a lo estocástico: el caso de la carrera a 20

From the deterministic to the stochastic: the case of the race to 20

M. Campos-Nava [a,*], A. A. Torres-Rodríguez [b], A. Reyes-Rodríguez [a,*], C. Soto-Campos [a]

[a] *Área Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México.*
[b] *Departamento de Ciencias Básicas, Tecnológico Nacional de México campus Atitalaquía, 42970 Atitalaquía, Hidalgo, México.*

Resumen

En el contexto de la Teoría de Situaciones Didácticas propuesta por Guy Brousseau, la tarea paradigmática de dicha teoría es un juego denominado *carrera a 20*, en el cual dos jugadores se enfrentan generando una secuencio de números naturales y el ganador es quien llega al número 20. La secuencia se inicia con el número uno o dos, a elección del primer jugador, y se construye recursivamente sumando uno o dos al número que dice el adversario. Se puede considerar que este juego es *determinista*, si los jugadores conocen la estrategia ganadora, pues en realidad es predecible lo que va a ocurrir. ¿Qué pasa cuando se modifica una de las variables? Específicamente, el número de jugadores. En el presente trabajo, se hace una propuesta didáctica que consiste en incluir un tercer jugador, con la intención de fomentar desde el punto de vista didáctico, la diferencia entre un sistema predecible o determinista, respecto de otro que resulta ser impredecible o *estocástico* y, por este medio, introducir desde la educación básica la noción de *aleatoriedad*.

Palabras Clave: Propuesta didáctica, sistema estocástico, sistema determinista, carrera al 20.

Abstract

In the context of the Theory of Didactic Situations proposed by Guy Brousseau, the paradigmatic task of such a theory is a game called race to 20, in which two players generate a sequence of natural numbers, and the winner is the player who obtain the number 20. The sequence begins with the number one or two, at the choice of the first player, and it is built recursively by adding one or two to the number said by the opponent. It can be considered that this game is deterministic, if the players know the winning strategy, because in reality what is going to happen is predictable. What happens when one of the variables is modified? Specifically, what happens when we modify the number of players? In this work, we described a didactic proposal based on including a third player in the race to 20, with the intention of promoting, from the didactic point of view, the difference between a predictable or deterministic system, with respect to another that turns out to be unpredictable or *stochastic* and, by this means, introduce from basic education the notion of *randomness*.

Keywords: Didactic proposal, stochastic system, deterministic system, race to 20.

1. Introducción

De acuerdo con Barrera y Reyes (2018), la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), que fue desarrollada por el educador francés Guy Brousseau en los años setenta el siglo pasado, se caracteriza porque presenta los contenidos a enseñar de forma lúdica, mediante tareas que involucran competencia y en las que no se explicita dicho contenido, las cuales se denominan como *situaciones a-didácticas*. Se espera con esto motivar en los estudiantes la reflexión y discusión de ideas sobre cómo resolver el problema, de modo que al identificar regularidades dentro de los diversos casos particulares se descubra el contenido matemático, el cual posteriormente es institucionalizado por el docente.

La idea central de la propuesta de Brousseau (1997) radica en que luego de introducir la situación a-didáctica de forma lúdica, se tienen que llevar a cabo las fases de formulación y validación, en las que los estudiantes pueden enunciar conjeturas y tratar de justificar teoremas a partir del juego previo.

Para ejemplificar esta idea, Brousseau (1997) propone un juego al que denomina *carrera a 20*, en el cual los niños participan por parejas (la actividad está pensada para ser trabajada con niños de educación básica), el objetivo es llegar

*Autor para la correspondencia: mcampos@uaeh.edu.mx
Correo electrónico: mcampos@uaeh.edu.mx (Marcos Campos-Nava), agustin.tr@atitalaquia.tecnm.mx (Agustín Alfredo Torres-Rodríguez), aaronr@uaeh.edu.mx (Aarón Víctor Reyes-Rodríguez), csoto@uaeh.edu.mx (Carlos Arturo Soto-Campos).

Fecha de recepción: 06/01/2022 Fecha de aceptación: 25/02/2022 Fecha de publicación: 22/04/2022
https://doi.org/10.29057/icbi.v10iEspecial.8561

al número 20, sumando uno o dos al número natural que dice el otro jugador de la pareja, y se espera que después de varios enfrentamientos, los estudiantes empiecen a reconocer algún patrón subyacente en las secuencias que resultan ganadoras. Barrera y Reyes (2018), explican de forma precisa la mecánica del juego:

> En la carrera a 20 compiten dos estudiantes. En una tabla con dos columnas se anotan los resultados del juego. Por medio de un volado, u otro mecanismo similar, se decide cuál de los dos jugadores inicia la partida. El primer participante debe elegir un número, que puede ser uno o dos. Una vez realizada su elección, dice el número en voz alta y lo anota en la tabla. El otro participante debe sumar uno o dos al número del primer participante, a continuación, dice el resultado de la suma en voz alta y lo anota en la tabla. El objetivo del juego es continuar este procedimiento hasta que uno de los dos jugadores obtenga como resultado 20. (p. 86)

En este sentido, cabe señalar que a diferencia de Barrera y Reyes (2018), en dónde se hace una revisión de la TSD, y por esa razón se analiza el juego de carrera a 20, orientado hacia el aprendizaje de la división, en este trabajo proponemos que, a partir del mismo juego, se puedan abordar nociones como aleatoriedad y azar con estudiantes de educación básica, al interactuar con dicho juego.

Una posible extensión de la carrera a 20 consiste en modificar algunas de las *condiciones iniciales*, por ejemplo, que en lugar de que el objetivo sea llegar a 20, se deba alcanzar cualquier otro número natural, por ejemplo, 33; o incluso cambiar lo que se puede denominar el "paso de la carrera" es decir, que en lugar de sumar uno o dos al número que dice el adversario, se pueda sumar uno, dos o tres, etcétera. Podríamos en general decir, que se permite jugar carrera a m, con paso n, donde m, n son números naturales, tales que $m > n$. Así, por ejemplo, se puede pedir a los estudiantes que en lugar de jugar "carrera a 20 con paso 2" (lo que se podría considerar el juego original), se juegue "carrera a 33 con paso 3" o cualquiera otra que se nos ocurra.

Los contenidos matemáticos implícitos en la carrera a 20, o en cualquier carrera generalizada "carrera a m con paso n" son progresiones aritméticas y el algoritmo de la división (Brousseau, 1997 citado por Barrera y Reyes, 2018).

En este trabajo se propone utilizar la "carrera a 20" como contexto para apoyar el entendimiento de un fenómeno no determinista o estocástico, al llevar a cabo una ligera modificación en una de las condiciones iniciales del juego.

2. Revisión de la literatura

Desde que Galileo propuso, durante el renacimiento, que la naturaleza puede entenderse y explicarse a través del lenguaje de las matemáticas y que, en consecuencia, el mundo es determinista, esto es, conociendo un conjunto de condiciones iniciales para un fenómeno natural, las matemáticas permiten predecir lo que ocurrirá en cualquier instante futuro de tiempo con ese fenómeno; por ejemplo, lo que ocurre con un objeto en caída libre (Restrepo, 2013). La postura de Galileo contribuyó a que la comunidad científica entrara en un estado de euforia, pues se consideró que el mundo es predecible y sólo faltaba conocer las condiciones iniciales de un fenómeno y las leyes matemáticas que lo rigen. Sin embargo, ya entrado el siglo veinte, la física cuántica vino a mostrarnos que era una ilusión considerar que el universo es determinista.

En este orden de ideas, son reconocidos los trabajos que llevaron a cabo Piaget e Inhelder (1951), en los que llevan a cabo experimentos con niños para tratar de determinar a partir de qué edad, ellos pueden identificar fenómenos relacionados con el azar. En concreto, estos autores concluyeron que los niños explican el azar como el resultado de varias causas, actuando de manera independiente. Estos trabajos fueron complementados un par de décadas después por Fischbein (1975), y arrojaron como conclusión que los niños pueden tener una intuición del azar y diferenciar fenómenos aleatorios y deterministas antes de los siete años.

En contraste con estas ideas, durante décadas han estado ausentes del currículum de educación básica, cursos, asignaturas, unidades temáticas relacionadas con el desarrollo del pensamiento aleatorio. Tradicionalmente, en el currículo básico se dio prioridad a contenidos relacionados con aritmética y geometría (Alsina, 2016). Así que la incorporación de contenidos, temas, tópicos, saberes esperados, etcétera, relacionados con el desarrollo del pensamiento aleatorio, desde edades tempranas, es relativamente reciente.

No es hasta la década de los ochenta del siglo pasado cuando el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos incluye «datos y azar» como área temática en *Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics*. La iniciativa anterior se refuerza a inicios del presente siglo, cuando en *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) se plantea que el alumnado debería abordar conocimientos relacionados con el análisis de datos y la probabilidad a partir de los tres años. (Alsina, 2016).

En la actualidad, existe consenso sobre la importancia de incluir contenidos relacionados con la estadística y probabilidad desde educación inicial, pues se considera un pilar necesario en la formación de los ciudadanos, lo que aún no es del todo claro, es qué tipo de contenidos y con qué periodicidad y frecuencia se debieran incorporar.

> De esta forma, desde finales del siglo pasado hay una tendencia a incorporar la estadística en la Educación Primaria en todos los países del mundo, dentro de los contenidos de la asignatura de Matemáticas. Quizá por esa novedad, existe un debate abierto acerca de cuándo es el momento adecuado para acercarse a la enseñanza de la estadística. (Ruiz, 2014, p. 104)

En su artículo, Ruiz (2014) concluye que, en países latinoamericanos como México, el porcentaje de tiempo que los docentes de primaria dedican a contenidos relacionados con la estadística, probabilidad y pensamiento aleatorio, es de apenas 16%, respecto a los demás tópicos de matemáticas.

Por su parte Elizarrarás (2014), llevó a cabo una investigación con estudiantes normalistas (futuros profesores de educación básica) a quienes se les aplicó un cuestionario exploratorio. Los resultados indican que es urgente reconocer la necesidad de que los futuros profesores de educación secundaria tengan una sólida formación para desarrollar el pensamiento probabilístico. Con base en lo anterior se puede intuir que, si los futuros profesores normalistas no tienen una sólida formación inicial en estos tópicos, difícilmente los considerarán importantes cuando estén ejerciendo sus funciones docentes.

En concordancia con lo anterior, actualmente en México, el estudio del azar y la probabilidad se lleva a cabo desde educación básica, de acuerdo con los denominados *Aprendizajes esperados*, declarados en el portal de la

Secretaría de Educación Pública en México (SEP)[1], los niños de educación primaria estudian tópicos de estadística desde primero a cuarto grado (6 a 10 años de edad), en los que se abarcan tópicos como recolección de datos estadísticos, lectura de tablas de datos estadísticos, lectura de pictogramas y gráficos de barras; es a partir del quinto grado de primaria (11 años de edad), en dónde además de seguir viendo tópicos de estadística, como lectura de gráficos de barra e interpretación de la moda, se introducen también tópicos de probabilidad, concretamente: *Identifica juegos dónde interviene o no el azar; y Registra resultados de experimentos aleatorios en tablas de frecuencias*[2].

En concordancia con esto, para iniciar el desarrollo de un pensamiento aleatorio formal en la escuela, los estudiantes deben discriminar por medio de actividades lúdicas, entre los fenómenos que dependen del azar, de los que no. Lo anterior es compatible con el programa de estudio de la SEP (2019), donde se afirma que: "[…] el pensamiento estocástico involucra diversos componentes: un razonamiento probabilístico que permita discriminar fenómenos aleatorios de fenómenos deterministas y argumentar en torno a ello […]" (p. 5).

En este orden de ideas es que proponemos al juego de la carrera a 20, como una actividad que puede resultar útil para introducir elementos que permitan distinguir procesos deterministas de procesos estocásticos e, incluso, acercar a los estudiantes a la noción de un sistema caótico. Si bien, algunos sistemas comúnmente considerados como caóticos, no lo son del todo, más bien, resulta complicado resolver las ecuaciones que permiten predecir su evolución en el tiempo; por ejemplo, el sistema mecánico denominado *péndulo doble*. Haciendo una aproximación razonable para la educación básica, consideramos al juego de la carrera a 20, como un sistema determinista, y puede asumirse con las reservas del caso, que se vuelve un sistema caótico al modificar la condición inicial del número de jugadores.

Cabe mencionar al respecto un posible paralelismo con la denominada *teoría del caos*, que estudia cierto tipo de sistemas complejos y sistemas dinámicos muy sensibles a variaciones en las condiciones iniciales. "Pequeñas variaciones en dichas condiciones iniciales pueden implicar grandes diferencias en el comportamiento futuro, imposibilitando la predicción a largo plazo" (Ortigoza y Lorandi, 2018, p.113).

3. Metodología

Este trabajo corresponde a una propuesta didáctica para apoyar a que los estudiantes de educación básica desarrollen capacidad para discriminar entre un fenómeno determinista y uno aleatorio. En este sentido, se propone una tarea de aprendizaje basada en el juego de la carrera a 20, el cual se debe jugar primero en condiciones normales (las reglas originales) y, posteriormente, hacer la modificación a una de las condiciones iniciales, en este caso, el número de jugadores.

En concordancia con Torres et al. (2022), una tarea de aprendizaje en matemáticas debe partir del objetivo de aprendizaje o competencia a desarrollar, en este caso el objetivo es que los estudiantes de educación básica, específicamente de quinto grado de primaria (grado en que, de acuerdo con la SEP, se deben introducir los tópicos del pensamiento aleatorio), puedan identificar en qué caso es predecible el resultado de un juego por medio de una estrategia ganadora infalible, y en qué casos no. La siguiente etapa del diseño de la tarea consiste en identificar qué elementos matemáticos y competencias previas se requieren para que los estudiantes puedan abordarla. En este caso, para el juego de la carrera a 20, en forma tradicional y aún con la modificación que se propone, se requiere que los estudiantes tengan un manejo adecuado de los números naturales y la adición. Como nuestro objetivo difiere al propuesto por Brousseau (1997), no se requiere el uso del algoritmo de la división.

Los siguientes elementos de la tarea son el enunciado o la forma en que será presentada a los estudiantes y la preparación del escenario de instrucción. En este caso se parte de la versión original del juego, se explican las reglas (Barrera y Reyes, 2018), se pide a los estudiantes que jueguen en binas y que vayan apuntando la secuencia de números que cada uno dijo, para tratar de identificar si existe algún patrón en las secuencias ganadoras, para el objetivo que se persigue, no se considera necesario modificar el paso de la carrera o el número al que se debe llegar.

El siguiente elemento de la tarea, de acuerdo con Torres et al. (2022), es la elaboración de posibles rutas hipotéticas de solución y la elaboración de preguntas guía que extiendan la actividad. Como parte de las posibles rutas hipotéticas, se espera que los estudiantes identifiquen, después de jugar varias partidas de carrera al 20 tradicional, que existe una estrategia infalible para ganar, o estrategia ganadora. El jugador que llegue al 17, gana el juego sin duda, pues su adversario a lo más podrá decir 18 o 19 en su siguiente turno, dejando libre el 20.

Entonces se puede considerar que la meta de la carrera al 20 no es llegar al 20, sino al 17, ¿cómo se alcanza el 17? Con un razonamiento similar, los niños pueden notar que para llegar al 17, hay que llegar al 14 antes, pues quien alcance el 14, no importa lo que diga el adversario, a lo más podrá llegar al 15 o 16, dejando libre el 17; entonces la clave es llegar al 14. Con un razonamiento análogo, se puede guiar a los niños para que construyan de forma gráfica o esquematizada la ruta para ganar el juego (Figura 1).

La identificación de la ruta ganadora permite saber que, para ganar el juego, es necesario tener el primer turno, y siempre elegir el dos, para continuar sumando tres consecutivamente, sin importar lo que vaya diciendo el rival. Dado que el turno inicial se decide por un volado tal vez, en caso de no ganar el derecho a ser el que inicie, se debe esperar a que el adversario deje libre algún número de la secuencia ganadora (suponiendo que no conoce la estrategia ganadora), y en cuanto sea posible elegir cualquier número de la secuencia (2,5,8,11,14,17). Por ejemplo, si el turno inicial lo tiene el adversario y empieza diciendo uno, de inmediato hay que elegir el dos, o si el rival tiene el primer turno, y dice dos, hay que esperar el momento en que no elija algún número de la secuencia ganadora para tomarlo y ganar de manera infalible.

Con esto se espera que los estudiantes identifiquen que dadas las condiciones iniciales deseadas (ser el primero en jugar), existe una estrategia 100% segura e infalible para ganar, si bien, existen diferentes secuencias que diga el adversario,

[1] https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/prim-intro-mate.html

[2] https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/prim-ae-pensamiento-mate5.html

son un número limitado de opciones las que él pueda seguir y en todas pierde, en la Figura 1 se muestran, a manera de ejemplo, dos secuencias perdedoras que podría seguir el rival, cuando uno de los jugadores conoce la secuencia ganadora y la pone en práctica.

Por lo anterior, este juego no depende del azar, al menos no si se gana el primer turno, entonces se propone a los estudiantes la extensión de la actividad, las reglas son las mismas, la carrera es a 20 y el paso es 2, pero ahora juegan tres niños, por algún mecanismo se decide el orden de los turnos y se empieza a jugar, en este caso se pide que ahora sean tablas con tres entradas, en las que se vayan apuntando las secuencias que dice cada uno de los jugadores ¿quién gana al final? ¿Existe una secuencia ganadora? ¿Se debe iniciar para ser el ganador o se debe empezar en el segundo o tercer turno? En la Figura 2 se ilustra un posible juego de carrera a 20 con 3 jugadores, el cual lo ganó el primer jugador.

En esta misma figura se aprecia que ahora no gana quien llega a 17, que en el ejemplo fue el jugador que tuvo el segundo turno, en todo caso, quien llega al 17, en este ejemplo casi seguro es que pierda, a menos que un adversario a propósito le cediera el triunfo, pero suponiendo que cada jugador trata de ganar el juego siguiendo las reglas establecidas, se debe evitar llegar al 17, pero ¿cómo se evita? Y, además, evitar caer en el 17 tampoco garantiza ser el ganador.

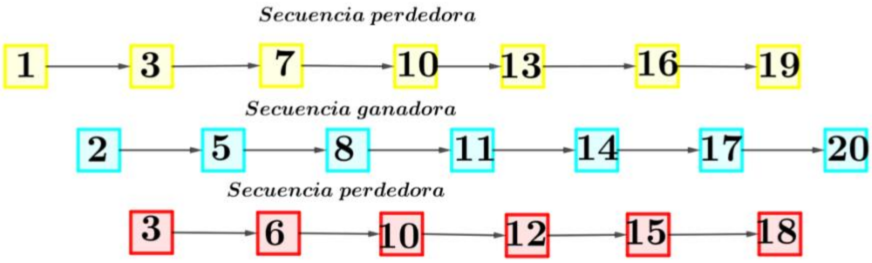

Figura 1: Secuencia ganadora y posibles secuencias perdedoras.

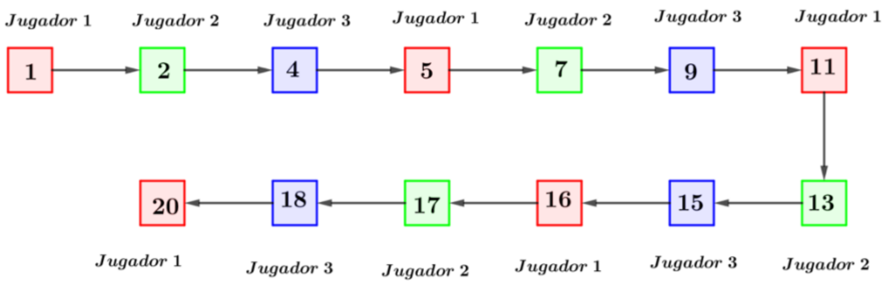

Figura 2: Una posible secuencia entre tres niños que jugaron carrera 20.

Si los estudiantes comparan varias secuencias de la carrera a 20 con tres jugadores, notarán que no es posible predecir quién ganará, no hay un número que se deba alcanzar antes del 20 para garantizar el triunfo, tampoco es claro si el triunfo depende de iniciar en el primer turno o no, en este caso, una simple modificación a una condición inicial da como resultado un sistema que no se puede predecir.

La intención de lo anterior es que los niños descubran que la carrera 20 original es un juego que podría considerarse como determinista, mientras que la carrera al 20 con tres jugadores pareciera ser un juego donde todo indica que el triunfo depende del azar.

La actividad se puede extender si luego de analizar el caso de la carrera 20 con 3 jugadores, ahora se propone a los niños que se incluya un jugador más ¿qué pasa en la carrera 20 cuatro jugadores? O incluso la actividad se puede extender hasta cinco, seis, jugadores ¿cómo se comporta el sistema? Se puede conjeturar que tal vez existe diferencia de comportamiento cuando se trata de un número par de jugadores respecto a un número impar, por ejemplo, la carrera 20 original parece comportarse como un sistema determinista, mientras que la carrera 20 con tres jugadores parece comportarse como un sistema caótico, los niños pudieran conjeturar por un lado, que al agregar un cuarto jugador, el sistema vuelve a ser determinista, en el sentido de que exista una estrategia ganadora infalible otra vez, o por el contrario, se puede conjeturar que mientras más jugadores tenga el juego, más complicado es tratar de establecer si existe una secuencia infalible que permita ganarlo.

4. Conclusiones

Existe consenso en la importancia de introducir conceptos relativos al azar y la probabilidad desde edades tempranas, además, diversos estudios refieren que es deseable introducirlos por medio de juegos y no como conceptos rígidos que se deben memorizar. El primer paso para iniciar el desarrollo del pensamiento estocástico en los niños, es que puedan diferenciar fenómenos deterministas de los que no lo son, el juego de la carrera al 20 con la ligera modificación de agregar un jugador adicional, permite a los estudiantes pasar de un juego que es predecible a partir de las condiciones iniciales, a uno que no lo es, con lo que se espera coadyuvar a un mejor entendimiento de los fenómenos que dependen del azar, el punto de partida para entender tópicos relacionados con el concepto de probabilidad.

5. Referencias

Alsina, A., (2016). La estadística y probabilidad en educación primaria ¿dónde estamos y hacia dónde vamos? Aula de… (251), 12-17.

Barrera-Mora, F., & Reyes-Rodríguez, A., (2018). Situaciones Didácticas en Educación Matemática. Pädi Boletín Científico De Ciencias Básicas E Ingenierías Del ICBI 5(10), 87-90. https://bit.ly/33OhTNi

Brousseau G., (1997) Theory of didactical situations in mathematics, Didactique des mathématiques 1970–1990 (eds and trans: Cooper M, Balacheff N, Sutherland R, Warfield V). Kluwer, Dordrecht.

Elizarrarás, B., (2014). El pensamiento estocástico y el pensamiento pedagógico en la formación de docentes para la educación básica: viabilidad, trascendencia y pertinencia. Trabajo presentado en el Segundo Congreso Internacional: Espacio Común de Formación Docente. México. Recuperado de: https://bit.ly/3sgyAtW.

Fischbein, E., (1975). The intuitive sources of probabilistic reasoning in children. Reidel, Dordrech.

NTCM. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. NCTM, Reston.

Ortigoza, G. y Lorandi, A. (2018). ¿Determinísticamente probable o probabilísticamente determinista? UVserva 5, 112-120.

Piaget, J. e Inhelder, B., (1951). La genése de l'idée de hasard chez l'enfant. Presses Universitaires de France, París.

Restrepo, A., (2013). Determinismo/ indeterminismo y determinación: implicaciones en el campo de la salud pública. Rev Fac. Nac. Salud Pública 31 (1), 42-46.

Ruiz, N. (2014). La enseñanza de la estadística en educación primaria en América Latina. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación 13(1), 103-121.

SEP (2019). Programa del Curso Pensamiento estocástico para la Licenciatura en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria. Recuperado de: https://bit.ly/3h9wdTp.

Torres-Rodríguez, A. A., Campos-Nava, M., Reyes-Rodríguez, A. V., & Soto-Campos, C. A., (2022). Diseño de tareas con tecnología: entre investigación y docencia. Pädi Boletín Científico De Ciencias Básicas E Ingenierías Del ICBI 9(18), 29-34. https://bit.ly/3LW9XuI.