

## Flujo global del problema colineal de Kepler con perturbación de mundos brana Global flow of Kepler's collinear problem with brana worlds perturbation

Arturo Criollo , Omar Pedraza 

Área Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México.

### Resumen

En este trabajo analizamos el problema colineal de Kepler bajo la influencia de una perturbación proveniente de Mundos Brana ( $\lambda \cos x)/x$ , para  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . En la primera parte, hacemos un análisis detallado del potencial perturbativo, posteriormente, se construyen los retratos fase para distintos valores del parámetro de perturbación  $\lambda$ . Empleando la técnica de la explosión, se regularizan las singularidades debidas a colisión y los escapes a infinito. Finalmente, se lleva a cabo una caracterización global del flujo.

*Palabras Clave:* Problema de Kepler, retrato fase, explosión, Mundos Brana.

### Abstract

In this work we analyze the Kepler collinear problem under the influence of a perturbation coming from Brane Worlds ( $\lambda \cos x)/x$ , for  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . In the first part, we make a detailed analysis of the perturbation potential, then, the phase portraits are constructed for different values of the perturbation parameter  $\lambda$ . Using the explosion technique, singularities due to collision and leaks to infinity are regularized. Finally, a global characterization of the flow is carried out.

*Keywords:* Kepler's problem, portrait phase, explosion, Brane worlds.

### 1. Introducción

El Problema de Kepler, cuyo potencial radial posee la forma  $1/r$ , (donde  $r$  es la distancia entre los cuerpos) ha sido sometido a múltiples perturbaciones, como ejemplo: el Problema de Gutzwiller (1973) que involucra una perturbación anisotrópica y se encuentra enmarcado dentro de la mecánica cuántica, de hecho es considerado un puente entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica, el Problema de Manev (1924), el cual contempla una perturbación  $1/r^2$ . Trabajos más recientes, como el desarrollado por Jimenez and Llibre (2011) incluyen potenciales Yang-Mills, el cual considera un término de oscilador armónico más un potencial homogéneo de cuarto orden. Particularmente estudian las órbitas periódicas de este sistema Hamiltoniano, así como sus niveles de energía. Por otra parte, Llibre and Jiménez-Lara (2011) estudian la dinámica de sistemas de Hénon-Heiles con la adición de un término gravitacional singular  $1/(x^2 + y^2)$ . Dicho potencial modificado permite describir el movimiento de partículas sin masa en las partes centrales de las galaxias y en particular, cerca de un agujero negro.

También se han considerados potenciales provenientes de

escenarios de dimensiones extras, Criollo and Pedraza (2020) estudian aspectos cualitativos en un escenario de mundo brana cinco dimensional encajado en un espacio tiempo  $5 + n$ -dimensional, donde consideran correcciones  $\frac{-2 \cos(x)}{x}$  al potencial gravitacional Newtoniano en una dimensión (donde se han considerado unidades de modo que las constantes toman el valor de uno). Particularmente en este trabajo se clasificaron las órbitas de la partícula de prueba de acuerdo al valor de la energía.

Siguiendo la idea de Criollo and Pedraza (2020), sería interesante considerar un potencial de la forma  $\frac{-\lambda \cos(x)}{x}$  (con  $\lambda$  un parámetro positivo) y realizar la clasificación de las órbitas de la partícula de prueba correspondientes. Particularmente sería interesante estudiar si ciertos valores de  $\lambda$  restringen cierto tipo de órbitas de la partícula de prueba. Por su puesto si  $\lambda = 2$  se debe de recuperar los resultados publicados. Correcciones al potencial Newtoniano de este tipo, deberían de modificar las órbitas de Kepler y si dichas modificaciones pudieran cuantificarse experimentalmente en algún momento, entonces podríamos tener evidencia de la existencia de las dimensiones extras, es por esto que es atractivo estudiar este tipo correcciones al potencial

\* Autor para correspondencia: [omarp@uaeh.edu.mx](mailto:omarp@uaeh.edu.mx).

Correo electrónico: [arturoc@uaeh.edu.mx](mailto:arturoc@uaeh.edu.mx) (Arturo Criollo-Pérez), [omarp@uaeh.edu.mx](mailto:omarp@uaeh.edu.mx) (Omar Pedraza-Ortega).

Newtoniano provenientes de mundos brana.

La estructura de este trabajo es la siguiente: En la sección 2, se revisa brevemente el potencial efectivo proveniente de mundos brana y además se realiza un análisis de los puntos críticos, en la sección 3, se muestran los retratos fase, mientras que en la sección 4 se realiza una caracterización topológica del flujo usando la técnica de la explosión. En la sección 5 se realiza una caracterización de los puntos de equilibrio y las órbitas de la partícula de prueba para valores específicos de  $\lambda$ . Finalmente en la sección 6 se presentan las conclusiones de este trabajo.

## 2. Problema de Kepler unidimensional considerando una perturbación proveniente de mundos brana

En este escenario descrito por Ito (2002), considera una  $(3+n)$ -brana con tensión positiva  $\sigma$ , encajada en un espacio-tiempo  $(4+n+1)$ -dimensional, con  $n$  dimensiones compactas (del orden de la longitud de Planck  $\sim 10^{-35}$  m) y una dimensión infinita.

Particularmente, para el caso de una dimensión compacta ( $n = 1$ ), el potencial efectivo gravitacional de interacción entre dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  separadas una distancia  $r$  puede escribirse como

$$U(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} \left( 1 + \frac{4L}{3\pi r} \left[ 1 - \frac{r}{L} \left\{ \sin\left(\frac{r}{L}\right) Ci\left(\frac{r}{L}\right) - \cos\left(\frac{r}{L}\right) Si\left(\frac{r}{L}\right) \right\} \right] \right), \quad (1)$$

donde  $Ci(x)$  es la integral coseno y  $Si(x)$  es la integral seno y con  $L$  es el radio de curvatura de anti-de Sitter ( $AdS_{5+1}$ ). En el límite  $r \gg L$ , el potencial efectivo gravitacional toma la forma

$$U(r) = -\frac{Gm_1 m_2}{r} - \frac{2Gm_1 m_2 \cos\left(\frac{r}{L}\right)}{r}. \quad (2)$$

Es conveniente elegir unidades en donde las masas y la constante de gravitación universal resulten iguales a uno, para así poder realizar un análisis cualitativo de (2). Sin embargo, desde el punto de vista cualitativo, el parámetro  $L$  toma el papel de un periodo de la función coseno y por lo tanto, se puede considerar  $L = 1$ .

Para un caso más general, se introduce el parámetro de perturbación  $\lambda > 0$  que afecta directamente la amplitud de la función coseno, finalmente, como se desarrolla el caso colineal, la posición la describimos con  $x > 0$ . Cabe mencionar que el problema de Kepler se ha estudiado en el espacio, en el plano y en una recta (donde los nombres asociados en cada caso son, espacial, planar y colineal). Para este último, el movimiento se lleva a cabo en una línea recta, concretamente el semieje positivo.

De esta forma (2), se puede expresar como

$$U(x) = -\frac{1}{x} (1 + \lambda \cos x). \quad (3)$$

El caso  $\lambda = 2$  se conoce como átomo gravitacional en mundos brana, el cual ha sido estudiado en Criollo and Pedraza (2020). Si denotamos a  $\dot{x} = y$  como la velocidad, entonces la energía cinética resulta  $T = \frac{y^2}{2}$ , y por lo tanto el Hamiltoniano de la

partícula de prueba toma la siguiente forma

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{x} (1 + \lambda \cos x), \quad (4)$$

donde, el sistema de ecuaciones de movimiento asociadas a (4), es

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\frac{1 + \lambda(x \sin x + \cos x)}{x^2}. \quad (5)$$

El potencial (3) tiene propiedades analíticas relevantes que se pueden describir en dos proposiciones y un corolario.

**Proposición 1.** *El potencial (3) tiene una cantidad infinita de puntos críticos, que consisten en máximos y mínimos.*

*Demostración.* Derivando (3) se obtiene

$$U'(x) = \frac{1 + \lambda(x \sin x + \cos x)}{x^2}, \quad (6)$$

y el problema de los puntos críticos es equivalente a resolver la siguiente expresión

$$1 + \lambda(x \sin x + \cos x) = 0. \quad (7)$$

Con  $\lambda > 0$ , el análisis de los puntos críticos, equivale a resolver la ecuación la cual se puede escribir como

$$x \sin x + \cos x + \frac{1}{\lambda} = 0. \quad (8)$$

Es conveniente considerar la siguiente función auxiliar

$$f(x) = x \sin x + \cos x + \frac{1}{\lambda}. \quad (9)$$

Donde su primera derivada  $f'(x) = x \cos x$  y se anula en los puntos  $x = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , la segunda derivada de la función auxiliar  $f$  resulta  $f''(x) = -x \sin x + \cos x$ , y al evaluar la segunda derivada en los puntos críticos tenemos dos casos:

- Si  $x_0 = \frac{\pi}{2}(4n + 1)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , entonces  $f''(x_0) < 0$ , es decir, tenemos máximos. Evaluando a la función  $f$  en  $x_0$ , se tiene

$$f(x_0) = \frac{\pi}{2} (4n + 1) + \frac{1}{\lambda}, \quad (10)$$

lo cual proporciona siempre un valor positivo.

- Si  $x_0 = \frac{\pi}{2}(4n + 3)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , entonces  $f''(x_0) > 0$ , es decir, tenemos mínimos. Nuevamente, evaluando a  $f$  en  $x_0$ , se obtiene

$$f(x_0) = -\frac{\pi}{2} (4n + 3) + \frac{1}{\lambda}, \quad (11)$$

el cual es siempre negativo para  $\lambda \geq 1$ , mientras que para valores de  $\lambda$  en el intervalo  $1 > \lambda > 0$  es posible obtener algunos valores positivos, pero a medida que  $n$  crece, se pueden obtener valores negativos.

Estos resultados obtenidos, muestran que la función auxiliar  $f$  posee una cantidad infinita de raíces, y por lo tanto también el potencial.  $\square$

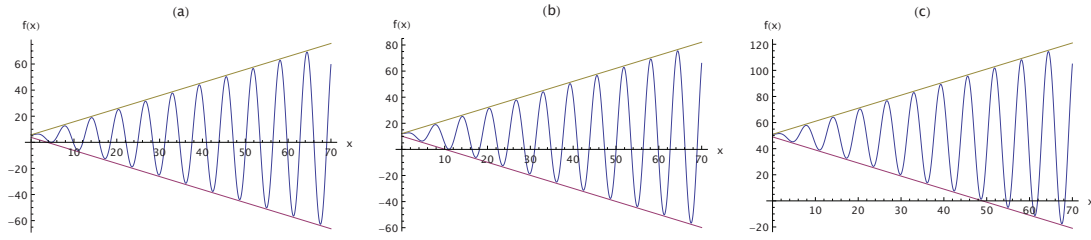


Figura 1: Desigualdad (12) para: (a)  $\lambda = 0.21$ , (b)  $\lambda = 0.09$  y (c)  $\lambda = 0.02$ .

Para valores positivos de  $\lambda$ , es posible acotar a la función  $f$ , mediante las siguientes desigualdades

$$-x - 1 + \frac{1}{\lambda} \leq x \sin x + \cos x + \frac{1}{\lambda} \leq x + 1 + \frac{1}{\lambda}, \quad (12)$$

esta desigualdad proporciona rectas con pendientes positiva y negativa que permiten acotar a la función  $f$ , para cada valor del parámetro  $\lambda$  (ver Figura 1).

Continuando con el análisis, se tiene que el potencial (3) tiene puntos de inflexión. Estos puntos de forman un conjunto de medida de Lebesgue cero en el espacio de parámetros.

**Proposición 2.** Para  $0 < \lambda < 1$  el potencial (3) tiene puntos de inflexión.

*Demostración.* Para esto, se calcula la derivada de (6), y la cual se puede reescribir como

$$U'''(x) = \frac{\lambda \cos x}{x} - \frac{2}{x^3}(1 + \lambda(x \sin x + \cos x)). \quad (13)$$

Donde se observa que para  $\lambda = \frac{2}{\pi(4n+3)}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , entonces, los puntos  $x_0 = (4n+3)\frac{\pi}{2}$ , son puntos de inflexión, pues  $U'(x_0) = 0 = U'''(x_0)$ . Además en una vecindad del punto  $x_0$  la primera derivada mantiene su signo  $U'(x_0 + \epsilon) > 0$ ,  $U'(x_0 - \epsilon) > 0$ , mientras que la segunda derivada experimenta un cambio de signo  $U''(x_0 + \epsilon) > 0$ ,  $U''(x_0 - \epsilon) < 0$ .  $\square$

Por otra parte, si  $\lambda \geq 1$  no hay puntos de inflexión, pero si  $0 < \lambda < 1$  se tendrá un punto de inflexión si para un valor de  $n$  se consideran el  $\lambda$  y  $x_0$  respectivos.

Es importante mencionar que a medida a medida que el parámetro se aproxima a cero  $\lambda \rightarrow 0^+$ , los puntos críticos del potencial que corresponden a mínimos se convierten en puntos de inflexión, conforme el parámetro  $\lambda$  toma los valores  $\frac{2}{(4n+3)\pi}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , después la función potencial se vuelve creciente en ese punto desapareciendo el punto crítico como se aprecia en la Figura 2.

El potencial (3) puede ser visto como una familia de potenciales de acuerdo a la elección del valor de  $\lambda$ , y todos los miembros de esta familia se intersectan en los puntos  $\left( (2n+1)\frac{\pi}{2}, \frac{-2}{(2n+1)\pi} \right)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  (ver Figura 2).

**Corolario 1.** El Hamiltoniano (4) tiene puntos críticos degenerados.

*Demostración.* Al evaluar la matriz hessiana del hamiltoniano (4) en los puntos críticos  $\left( (4n+3)\frac{\pi}{2}, 0 \right)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  se obtiene

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \end{pmatrix} \left( (4n+3)\frac{\pi}{2}, 0 \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

cuyos valores propios son 0 y 1.  $\square$

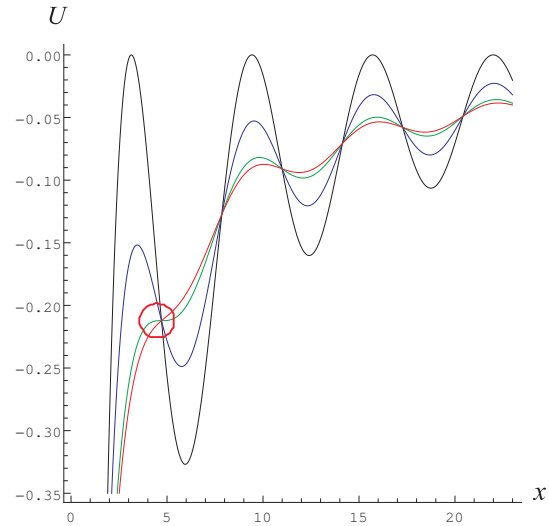


Figura 2: Potenciales para  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $\lambda = 0.2122$ ,  $\lambda = 0.15$ .

Otra propiedad del potencial (3), es que se intersecta en los puntos

$$\left( \frac{\pi}{2}(2n+1), -\frac{2}{(2n+1)\pi} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Por otra parte, se puede acotar al potencial mediante las desigualdades

$$\frac{1+\lambda}{-x} \leq \frac{1+\lambda \cos x}{-x} \leq \frac{1-\lambda}{-x}. \quad (16)$$

Dicha expresión tiene eu valor de bifurcación en  $\lambda = 1$ . De acuerdo a la Figura 3, se debe de estudiar los siguientes casos mostrados en la Tabla 1.

Tabla 1: Valores de $\lambda$ y de energía $h$ .			
$\lambda > 1$	$h > 0$	$h = 0$	$h < 0$
$\lambda = 1$	-	$h = 0$	$h < 0$
$0 < \lambda < 1$	-	-	$h < 0$

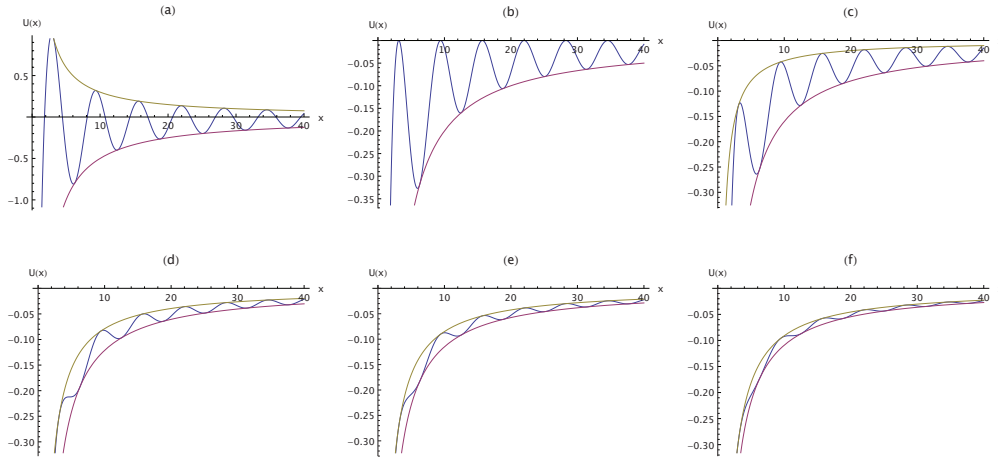


Figura 3: Desigualdad (16) para: (a)  $\lambda = 4$ , (b)  $\lambda = 1$ , (c)  $\lambda = 0.6$ , (d)  $\lambda = 0.2122$ , (e)  $\lambda = 0.15$  y (f)  $\lambda = 0.0909$ .

### 3. Retratos fase

En esta sección se construyen los retratos fase a partir de las gráficas del potencial. Es de interés mencionar que esta técnica se utiliza en el caso de sistemas mecánicos conservativos unidimensionales donde la energía cinética tiene la forma  $T = y^2/2$ . En primera instancia se observa que todos los puntos de equilibrio se encontrarán sobre el eje  $x$  del retrato fase y éstos serán puntos críticos del potencial  $U$ .

Del teorema de la función implícita se sigue que cada conjunto de nivel es una curva suave alrededor de cada uno de sus puntos que no son puntos de equilibrio. En particular, si el valor de energía  $H$  no es un valor crítico de la energía potencial, entonces el conjunto de nivel en el que la energía es igual a  $H$  es una curva suave. Entonces para estudiar la curva nivel de energía, debemos centrar nuestra atención en los valores críticos de  $H$  y cerca de ellos. Es importante notar que la energía cinética es no negativa. Ello significa que la energía potencial es menor o igual que la energía total Arnold et al. (2013).

La energía potencial más pequeña corresponde con la velocidad más grande. Notemos también que los puntos de máximos locales del potencial son inestables y corresponden a sillas en el retrato fase, mientras que los puntos mínimos son posiciones de equilibrio estables y corresponden con centros. Los puntos de inflexión corresponden a órbitas heteroclínicas. Una manera alternativa de hacer el retrato fase es graficar las curvas de nivel del hamiltoniano  $H(x, y) = h$  para distintos valores de energía  $h$  y luego agregar las direcciones usando el campo vectorial Robert L. Devaney et al. (2004).

Para  $\lambda > 1$  los retratos fase son equivalentes, en particular el caso del átomo gravitacional ( $\lambda = 2$ ) ha sido estudiado en Criollo and Pedraza (2020).

En las siguientes subsecciones, para cada valor del parámetro  $\lambda$  considerado en la Figura 2, se obtienen los puntos críticos del potencial ( $x_i, i = 1, 2, \dots, 6$ ) resolviendo la ecuación (7), posteriormente estos se evalúan en (3) para obtener los valores críticos del potencial ( $U(x_i), i = 1, 2, \dots, 6$ ). Estos resultados se colocan en las Tabla correspondientes y en la Figuras de cada subsección, se muestra la gráfica del potencial junto con su retrato fase.

Finalmente, al concluir cada caso, se muestra una guía que relaciona a cada color con un valor de energía, la cual facilita la interpretación de las Figuras correspondientes a cada caso.

#### 3.1. Retrato Fase para $\lambda = 1$

Tabla 2: Puntos de equilibrio y valores de energía potencial para  $\lambda = 1$ .

$i$	$x_i$	$U(x_i)$
1	$\pi$	0
2	5.95017	-0.32689
3	$3\pi$	0
4	12.40549	-0.16017
5	$5\pi$	0
6	18.74295	-0.10640

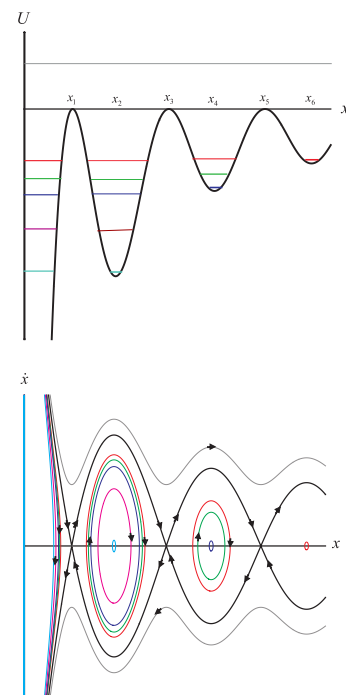


Figura 4: Energía Potencial y retrato fase para  $\lambda = 1$ .

Guía para la interpretación de la Figura 4.

Tabla 3: Guía de colores para  $\lambda = 1$ .

Color	Energía
gris	0.1
negro	0
rojo	-0.106
verde	-0.13
azul	-0.1595
magenta	-0.24
cyan	-0.326

Guía para la interpretación de la Figura 5.

Tabla 5: Guía de colores para  $\lambda = 0.5$ .

Color	Energía
negro	-0.015
gris	-0.032
rojo	-0.053
verde	-0.08
azul	-0.122
magenta	-0.1523
cyan	-0.25

3.2. Retrato Fase para  $\lambda = 0.5$

Tabla 4: Puntos de equilibrio y valores de energía potencial para  $\lambda = 0.5$ .

$i$	$x_i$	$U(x_i)$
1	3.44998	-0.15176
2	5.76234	-0.24880
3	9.53048	-0.05275
4	12.32291	-0.12052
5	15.77153	-0.03176
6	18.68903	-0.07991

3.3. Retrato Fase para  $\lambda = 2/3\pi \approx 0.2122$

Tabla 6: Puntos de equilibrio y valores de energía potencial para  $\lambda = 0.2122$ .

$i$	$x_i$	$U(x_i)$
1	4.71238	-0.212206
2	9.82095	-0.081889
3	12.08467	-0.098311
4	15.944748	-0.049779
5	18.539042	-0.064839
6	22.1601198	-0.035686

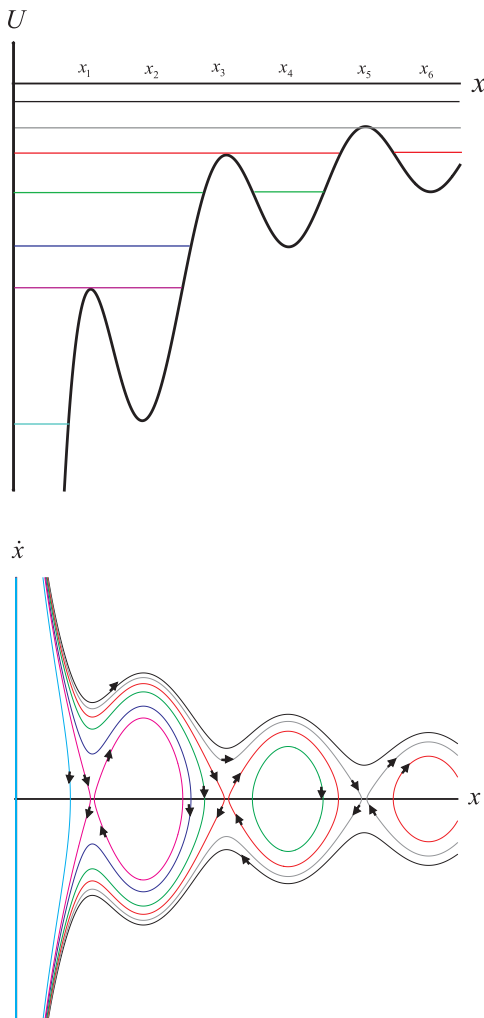


Figura 5: Energía Potencial y retrato fase para  $\lambda = 0.5$ .

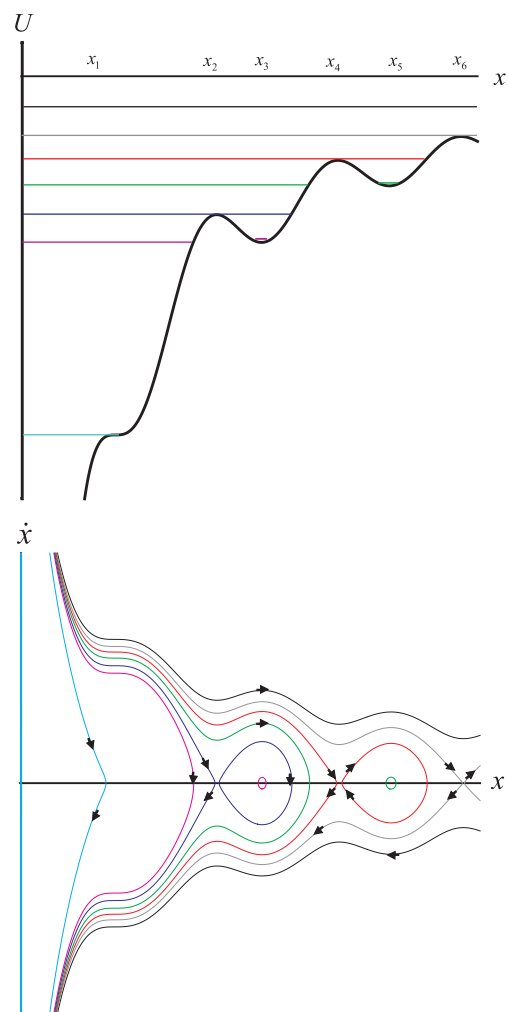


Figura 6: Energía Potencial y retrato fase para  $\lambda = 0.2122$ .

Guía para la interpretación de la Figura 6.

Tabla 7: Guía de colores para  $\lambda = 0.2122$ .

Color	Energía
negro	-0.017
gris	-0.0357
rojo	-0.0499
verde	-0.0645
azul	-0.082
magenta	-0.098
cyan	-0.213

3.4. Retrato Fase para  $\lambda = 0.15$

Tabla 8: Puntos de equilibrio y valores de energía potencial para  $\lambda = 0.15$ .

$i$	$x_i$	$U(x_i)$
1	10.0467875	-0.08740043
2	11.8895931	-0.09394259
3	16.0726509	-0.053498624
4	18.4256947	-0.06169244
5	22.2502157	-0.03842685

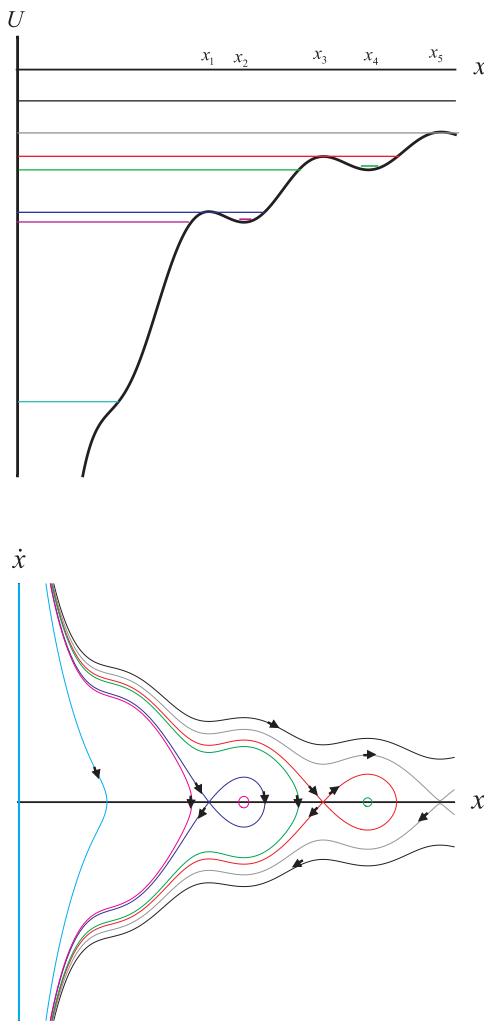


Figura 7: Energía Potencial y retrato fase para  $\lambda = 0.15$ .

Guía para la interpretación de la Figura 7.

Tabla 9: Guía de colores para  $\lambda = 0.15$ .

Color	Energía
negro	-0.019
gris	-0.0384
rojo	-0.0535
verde	-0.0615
azul	-0.0874
magenta	-0.0936
cyan	-0.213

4. Explosión

Para poder realizar una caracterización del flujo, es decir, las soluciones del Hamiltoniano dado por la ecuación (4), son soluciones que dependen del tiempo, así como de las condiciones iniciales  $x_0$ , por lo que a la función  $x(t, x_0)$  se le denomina flujo de la ecuación diferencial.

Para ello es necesario identificar las singularidades del campo vectorial, que en este caso corresponden al origen y al infinito. Para eliminar estas singularidades existen distintas técnicas, una de ellas es la explosión.

Ésta consiste en reemplazar la singularidad ( $r = 0$ ) debida a la colisión, por una variedad, mediante un cambio de coordenadas y una reparametrización del tiempo, esto permite hacer la caracterización del flujo McGehee (1974). En este caso, estas variedades se reducen a dos puntos o un punto por ser unidimensional.

4.1. Explosión del origen

El sistema (5) con Hamiltoniano (4), se observa que el campo vectorial tiene una singularidad en el origen. Introduciendo el cambio de variable  $v = \sqrt{xy}$  en el Hamiltoniano (4) se tiene

$$hx = \frac{v^2}{2} - 1 - \lambda \cos x. \tag{17}$$

Ahora aplicando el mismo cambio en las ecuaciones de movimiento (5) se obtiene

$$\dot{x} = \frac{v}{\sqrt{x}}, \quad \dot{v} = \frac{1}{x^{3/2}} \left( \frac{v^2}{2} - 1 - \lambda(x \sin x + \cos x) \right). \tag{18}$$

El sistema (18) continúa con la singularidad, por lo que aplicamos la reparametrización del tiempo  $\frac{dt}{d\tau} = x^{3/2}$ . Es de interés mencionar que esta reparametrización tiene una interpretación interesante, pues es equivalente a un frenado de la partícula, logrando que llegue a colisión en tiempo infinito, si denotamos el nuevo tiempo con  $x' = \frac{dx}{d\tau}$ , entonces el sistema (18) se puede escribir como

$$x' = vx, \quad v' = \frac{v^2}{2} - 1 - \lambda(x \sin x + \cos x). \tag{19}$$

Esta expresión es regular, y tiene los puntos de equilibrio  $(0, \sqrt{2(1+\lambda)})$ ,  $(0, -\sqrt{2(1+\lambda)})$ ,  $(x_0, 0)$ , donde  $x_0$  son las raíces de la ecuación  $1 + \lambda(x \sin x + \cos x) = 0$ , es decir, se preservaron los puntos de equilibrio del sistema original y ahora se han agregado los dos puntos correspondientes a la variedad de colisión, la cual denotamos como  $M_0 =$

$\{(0, \sqrt{2(1+\lambda)}), (0, -\sqrt{2(1+\lambda)})\}$ . El retrato fase para este sistema en el caso  $\lambda = 1$  se muestra en la Figura 8.

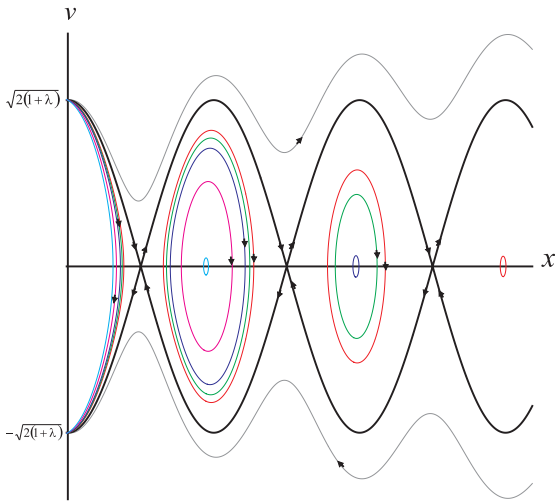


Figura 8: Retrato fase con explosión para  $\lambda = 1$ .

#### 4.2. Explosión del infinito

Considerando nuevamente el sistema de ecuaciones (5) junto con el Hamiltoniano (4), y haciendo el cambio  $z = \frac{1}{x}$  en el Hamiltoniano y en las ecuaciones de movimiento, obteniendo así

$$\frac{y^2}{2} = h + z \left( 1 + \lambda \cos \frac{1}{z} \right), \quad (20)$$

$$\dot{z} = -z^2 y, \quad \dot{y} = -z^2 - \lambda z \sin \frac{1}{z} - \lambda z^2 \cos \frac{1}{z}. \quad (21)$$

El campo vectorial de (21) presenta una singularidad en  $z = 0$ , pero como

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left( -z^2 - \lambda z \sin \frac{1}{z} - \lambda z^2 \cos \frac{1}{z} \right) = 0, \quad (22)$$

entonces, si se requiere que el campo vectorial sea de clase  $C^2$ , entonces se debe pedir una reparametrización del tiempo  $\frac{dt}{d\tau} = z^4$ , de tal modo que las ecuaciones de movimiento resultan

$$z' = -yz^6, \quad y' = f(z), \quad (23)$$

donde

$$f(z) = \begin{cases} -z^6 - \lambda z^5 \sin \frac{1}{z} - \lambda z^6 \cos \frac{1}{z}, & z \neq 0; \\ 0, & z = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Los puntos de equilibrio de (23) son  $(0, \pm \sqrt{2h})$ , y la variedad del infinito la obtenemos aplicando una traslación. Para  $h > 0$  tenemos que la variedad del infinito está integrada por dos puntos  $M_\infty = \{(1, \pm \sqrt{2h})\}$ , para  $h = 0$  un sólo punto  $M_\infty = \{(1, 0)\}$  y para  $h < 0$  no tenemos variedad del infinito.

### 5. Flujo Global

En esta sección se caracterizará el flujo global. Las curvas fase que aparecen en este trabajo son: puntos de equilibrio,

órbitas periódicas, órbitas heteroclinicas y órbitas homoclinicas. Dentro de los puntos de equilibrio tenemos; los mínimos del potencial que corresponden a centros en el retrato fase, los máximos del potencial que corresponden a sillas en el retrato fase, los puntos de inflexión del potencial que tienen asociadas órbitas heteroclinicas, los puntos de la variedad de colisión y los puntos de la variedad del infinito.

#### 5.1. Caso $\lambda = 1$

Para este caso, en principio se deben de considerar tres posibilidades para la energía. Pero para  $h > 0$  tenemos que el flujo es equivalente al problema colineal de Kepler con energía positiva, como se muestra en el trabajo de Criollo and Pedraza (2020). Entonces se consideraran sólo energía cero y energía negativa.

##### 5.1.1. $h = 0$

Para  $h = 0$  se tiene un número infinito de puntos de equilibrio de la forma  $(x_{2n-1}, 0), n \in \mathbb{N}$ , además de los dos puntos de la variedad de colisión y el de la variedad del infinito. Entre los puntos de la variedad de colisión se tiene una órbita heteroclinica. Entre cada par puntos de equilibrio  $(x_{2n-1}, 0)$  y  $(x_{2n+1}, 0), n \in \mathbb{N}$  hay dos órbitas heteroclinicas con direcciones opuestas.

##### 5.1.2. $h < 0$

- Para  $h < U(x_2)$  el flujo es equivalente al del Problema colineal de Kepler con energía negativa, es decir, tres curvas fase, dos puntos de equilibrio de la variedad de colisión y una órbita heteroclinica de expulsión-colisión entre ellos.
- Si  $h = U(x_2)$  se tienen cuatro curvas fase, tres puntos de equilibrio, dos de la variedad de colisión y el punto  $(x_2, 0)$ , y una órbita heteroclinica entre los puntos de la variedad de colisión.
- Cuando  $U(x_2) < h < U(x_4)$  se aprecia cuatro curvas fase, los dos puntos de equilibrio de la variedad de colisión, una órbita heteroclinica entre ellos, y una órbita periódica alrededor del punto  $(x_2, 0)$ .
- Para  $h = U(x_4)$  hay cinco curvas fase, tres puntos de equilibrio, dos de la variedad de colisión y el punto  $(x_4, 0)$ , una órbita heteroclinica entre los puntos de la variedad de colisión y una órbita periódica alrededor del punto  $(x_2, 0)$ .
- Mientras que para  $U(x_4) < h < U(x_6)$ , se cuenta con cinco curvas fase, los dos puntos de equilibrio de la variedad de colisión, una órbita heteroclinica entre ellos, y dos órbitas periódicas, una alrededor del punto  $(x_2, 0)$  y la otra alrededor del punto  $(x_4, 0)$ .

En los casos siguientes, donde el parámetro  $\lambda$  se encuentre en el intervalo  $0 < \lambda < 1$ , sólo se consideraran energía negativa. Donde, para cada valor del parámetro  $\lambda$ , se muestra el orden que guardan los valores del potencial.

5.2. Caso  $\lambda = 0.5$ 

Ordenando los valores del potencial, se tiene

$$U(x_2) < U(x_1) < U(x_4) < U(x_6) < U(x_3) < U(x_5). \quad (25)$$

De esta forma, de acuerdo al valor de  $h$ , se tiene que:

- Cuando  $h < U(x_2)$ , el flujo es equivalente al problema de Kepler con energía negativa.
- Para  $h = U(x_2)$ , se tiene cuatro curvas fase, dos puntos de equilibrio de la variedad de colisión, una órbita heteroclínica de expulsión-colisión entre ellos y el punto de equilibrio  $(x_2, 0)$ .
- Mientras que si  $U(x_2) < h < U(x_1)$ , entonces solo hay cuatro curvas fase, dos puntos de equilibrio de la variedad de colisión, una órbita heteroclínica de expulsión-colisión entre ellos y una órbita periódica alrededor del punto de equilibrio  $(x_2, 0)$ .
- Pero, si  $h = U(x_1)$  únicamente se tiene seis curvas fase, tres puntos de equilibrio, dos de la variedad de colisión y  $(x_1, 0)$ , dos órbitas heteroclínicas, una que inicia en un punto de la variedad de colisión y termina en  $(x_1, 0)$  y la otra que inicia en  $(x_1, 0)$  y termina en el otro punto de la variedad de colisión, y una órbita homoclínica que inicia y termina en  $(x_1, 0)$ .
- En el caso en el que  $U(x_1) < h < U(x_4)$ , el flujo es equivalente al problema de Kepler con energía negativa.
- Para  $h = U(x_4)$ , solo hay cuatro curvas fase, dos puntos de equilibrio de la variedad de colisión, una órbita heteroclínica de expulsión-colisión entre ellos y el punto de equilibrio  $(x_4, 0)$ .
- Si  $U(x_4) < h < U(x_6)$ , entonces hay cuatro curvas fase, dos puntos de equilibrio de la variedad de colisión, una órbita heteroclínica de expulsión-colisión entre ellos y una órbita periódica alrededor del punto de equilibrio  $(x_4, 0)$ .
- Dado que si  $h = U(x_6)$ , entonces solo se tienen cinco curvas fase, dos puntos de equilibrio de la variedad de colisión, una órbita heteroclínica de expulsión-colisión entre ellos, una órbita periódica alrededor del punto  $(x_4, 0)$  y el punto de equilibrio  $(x_6, 0)$ .
- Cuando se tiene que  $U(x_6) < h < U(x_3)$ , hay solamente cinco curvas fase, dos puntos de equilibrio de la variedad de colisión, una órbita heteroclínica de expulsión-colisión entre ellos, y dos órbitas periódicas, una alrededor del punto  $(x_4, 0)$  y la otra alrededor del punto  $(x_6, 0)$ .
- En el caso de que  $h = U(x_3)$ , simplemente se tiene siete curvas fase, tres puntos de equilibrio, dos de la variedad de colisión y  $(x_3, 0)$ , dos órbitas heteroclínicas, una que inicia en un punto de la variedad de colisión y termina en  $(x_3, 0)$  y la otra que inicia en  $(x_3, 0)$  y termina en el otro punto de la variedad de colisión, una órbita homoclínica que inicia y termina en  $(x_3, 0)$  y una órbita periódica alrededor del punto  $(x_6, 0)$ .

5.3. Caso  $\lambda = 0.2122$ 

Ordenando nuevamente los valores del potencial

$$U(x_1) < U(x_3) < U(x_2) < U(x_5) < U(x_4) < U(x_6). \quad (26)$$

Análogamente al caso anterior, se tiene que:

- Cuando  $h < U(x_1)$ , el flujo es equivalente al problema de Kepler con energía negativa.
- Para cuando  $h = U(x_1)$ , simplemente se presentan cinco curvas fase, tres puntos de equilibrio, dos de la variedad de colisión y  $(x_1, 0)$  que es un punto de inflexión, y dos órbitas heteroclínicas, una que inicia en un punto de la variedad de colisión y termina en  $(x_1, 0)$  y la otra que inicia en  $(x_1, 0)$  y termina en el otro punto de la variedad de colisión.
- Para el caso en el que  $U(x_1) < h < U(x_3)$ , el flujo es equivalente también al problema de Kepler con energía negativa.
- Si  $h = U(x_3)$ , simplemente se tienen cuatro curvas fase, dos puntos de equilibrio de la variedad de colisión, una órbita heteroclínica de expulsión-colisión entre ellos y el punto de equilibrio  $(x_3, 0)$ .
- En tanto  $h$  se encuentre en el intervalo  $U(x_3) < h < U(x_2)$  solo se presentan cuatro curvas fase, dos puntos de equilibrio de la variedad de colisión, una órbita heteroclínica de expulsión-colisión entre ellos y una órbita periódica alrededor del punto de equilibrio  $(x_3, 0)$ .
- Entretanto se satisfaga que  $h = U(x_2)$ , solo se tienen seis curvas fase, tres puntos de equilibrio, dos de la variedad de colisión y  $(x_2, 0)$ , dos órbitas heteroclínicas, una que inicia en un punto de la variedad de colisión y termina en  $(x_2, 0)$  y la otra que inicia en  $(x_2, 0)$  y termina en el otro punto de la variedad de colisión, y una órbita homoclínica que inicia y termina en  $(x_2, 0)$ .
- Si se tiene que  $U(x_2) < h < U(x_5)$ , el flujo es equivalente al problema de Kepler con energía negativa.
- En tanto se cumpla que  $h = U(x_5)$ , solamente hay cuatro curvas fase, dos puntos de equilibrio de la variedad de colisión, una órbita heteroclínica de expulsión-colisión entre ellos y el punto de equilibrio  $(x_5, 0)$ .
- Para  $U(x_5) < h < U(x_4)$ , se tienen cuatro curvas fase, dos puntos de equilibrio de la variedad de colisión, una órbita heteroclínica de expulsión-colisión entre ellos y una órbita periódica alrededor del punto de equilibrio  $(x_5, 0)$ .
- Si se satisface que  $h = U(x_4)$  solo seis curvas fase se consideran, tres puntos de equilibrio, dos de la variedad de colisión y  $(x_4, 0)$ , dos órbitas heteroclínicas, una que inicia en un punto de la variedad de colisión y termina en  $(x_4, 0)$  y la otra que inicia en  $(x_4, 0)$  y termina en el otro punto de la variedad de colisión, y una órbita homoclínica que inicia y termina en  $(x_4, 0)$ .
- Si  $U(x_4) < h < U(x_6)$ , nuevamente se tiene un flujo es equivalente al problema de Kepler, pero con energía negativa.



### 5.4. Caso $\lambda = 0.15$

En este caso, el ordenamiento los potenciales queda de la siguiente forma:

$$U(x_2) < U(x_1) < U(x_4) < U(x_3) < U(x_5). \quad (27)$$

Donde para cada valor de  $h$ , se tiene que:

- Cuando  $h < U(x_2)$ , el flujo es equivalente al problema de Kepler con energía negativa.
- Si se cumple que  $h = U(x_2)$ , entonces se tienen cuatro curvas fase, dos puntos de equilibrio de la variedad de colisión, una órbita heteroclínica de expulsión-colisión entre ellos y el punto de equilibrio  $(x_2, 0)$ .
- Para el caso en el que  $U(x_2) < h < U(x_1)$ , solo se tienen cuatro curvas fase, dos puntos de equilibrio de la variedad de colisión, una órbita heteroclínica de expulsión-colisión entre ellos y una órbita periódica alrededor del punto de equilibrio  $(x_2, 0)$ .
- Mientras  $h = U(x_1)$  se tienen seis curvas fase, tres puntos de equilibrio, dos de la variedad de colisión y  $(x_1, 0)$ , dos órbitas heteroclínicas, una que inicia en un punto de la variedad de colisión y termina en  $(x_1, 0)$  y la otra que inicia en  $(x_1, 0)$  y termina en el otro punto de la variedad de colisión, y una órbita homoclínica que inicia y termina en  $(x_1, 0)$ .
- Si  $h$  se encuentra en el intervalo  $U(x_1) < h < U(x_4)$ , el flujo es equivalente al problema de Kepler, pero con energía negativa.
- Si se cumple que  $h = U(x_4)$ , hay solo cuatro curvas fase, dos puntos de equilibrio de la variedad de colisión, una órbita heteroclínica de expulsión-colisión entre ellos y el punto de equilibrio  $(x_4, 0)$ .
- Cuando se cumple la siguiente relación  $U(x_4) < h < U(x_3)$ , se tienen cuatro curvas fase, dos puntos de equilibrio de la variedad de colisión, una órbita heteroclínica de expulsión-colisión entre ellos y una órbita periódica alrededor del punto de equilibrio  $(x_4, 0)$ .
- Dado que si  $h = U(x_3)$ , entonces se presentan seis curvas fase, tres puntos de equilibrio, dos de la variedad de colisión y  $(x_3, 0)$ , dos órbitas heteroclínicas, una que inicia en un punto de la variedad de colisión y termina en  $(x_3, 0)$  y la otra que inicia en  $(x_3, 0)$  y termina en el otro punto de la variedad de colisión, y una órbita homoclínica que inicia y termina en  $(x_3, 0)$ .
- Si  $U(x_3) < h < U(x_5)$ , el flujo es equivalente al problema de Kepler con energía negativa.

### 6. Conclusiones

El principal resultado de este trabajo es la caracterización del flujo para el problema colineal de Kepler bajo una perturbación proveniente de mundos brana. Una de las principales diferencias del problema estudiado en este trabajo, con el problema de Kepler clásico, son los puntos de equilibrio: máximos, mínimos e inflexiones, y la existencia de órbitas periódicas, homoclínicas y heteroclínicas.

Para  $\lambda > 1$  todos los flujos resultan equivalentes y el caso de  $\lambda = 1$ , resulta particularmente ser una separatriz. Para  $0 < \lambda < 1$ , se tienen puntos de inflexión del potencial cuando  $\lambda$  toma los valores  $\lambda = \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{7\pi}, \frac{2}{11\pi}, \dots, \frac{2}{\pi(4n+3)}, \dots, n \in \mathbb{N}$ , y estos son valores de bifurcación para el potencial, es decir, los retratos fase son equivalentes en los intervalos

$$\left(\frac{2}{3\pi}, 1\right), \left(\frac{2}{7\pi}, \frac{2}{3\pi}\right), \left(\frac{2}{11\pi}, \frac{2}{7\pi}\right), \dots, \left(\frac{2}{(4n+7)\pi}, \frac{2}{(4n+3)\pi}\right), \dots$$

con  $n \in \mathbb{N}$ .

A diferencia de otras perturbaciones, en este problema se tiene que para valores de energía mayores que el máximo absoluto del potencial y menores que el mínimo absoluto del potencial, el flujo es equivalente al problema de Kepler, es decir, no hay influencia de la perturbación, solo en el intervalo descrito, la perturbación se vuelve significativamente drástica.

### Agradecimientos

Los autores agradecen la invitación a participar en este número especial por el XX aniversario de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la UAEH y se unen a las felicitaciones por su aniversario.

### Referencias

- Arnold, V., Vogtmann, K., and Weinstein, A. (2013). *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York.
- Criollo, A. and Pedraza, O. (2020). Aspectos cualitativos del problema de kepler en mundos brana. *Páidi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, 7(14):1–9.
- Gutzwiller, M. C. (1973). The anisotropic kepler problem in two dimensions. *Journal of Mathematical Physics*, 14(1):139–152.
- Ito, M. (2002). Newton’s law in brane worlds with an infinite extra dimension. *Phys. Lett. B*, 528:269–273.
- Jimenez, L. and Llibre, J. (2011). Periodic orbits and nonintegrability of generalized classical yang–mills hamiltonian systems. *Journal of Mathematical Physics*, 52:032901–032901.
- Llibre, J. and Jiménez-Lara, L. (2011). Periodic orbits and non-integrability of hénon–heiles systems. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 44(20):205103.
- Manev, G. (1924). La gravitation et le principe de l’égalité de l’action et de la réaction. *comptes rendues*, 178:2159–2161.
- McGehee, R. (1974). Triple collision in the collinear three-body problem. *Inventiones mathematicae*, 27:191–227.
- Robert L. Devaney, S., Hirsch, M., Smale, S., and Devaney, R. (2004). *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Pure and Applied Mathematics - Academic Press. Elsevier Science.