

Una colección infinita de parejas de gráficas isoespectrales An infinite collection of pairs of isospectral graphs

Federico Menéndez–Conde Lara 

Área Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México.

Resumen

Se construye una familia infinita de parejas de gráficas isoespectrales, es decir, parejas de gráficas no isomorfas cuyos laplacianos tienen los mismos eigenvalores. Las gráficas consideradas son un caso particular de las gráficas isoespectrales con eigenvalores enteros que pueden obtenerse con un método desarrollado en Merris (1997). En este trabajo los espectros de las parejas de gráficas isoespectrales que se presentan son calculados de manera directa, usando métodos elementales.

Palabras Clave: Laplaciano en gráficas, teoría espectral, eigenvalores enteros, gráficas isoespectrales.

Abstract

An infinite family of isospectral graphs, i.e. non-isomorphic pairs of graphs with the same Laplace spectrum, is constructed. The graphs considered, are a particular case of the isospectral graphs with integer spectrum that can be constructed with the method developed in Merris (1997). In this work, the spectra of the isospectral pairs of graphs are computed directly, by elementary methods.

Keywords: Graph Laplacian, spectral theory, integer eigenvalues, isospectral graphs.

A la memoria de Salvador Cruz García

1. Introducción

¿Pueden los laplacianos de dos gráficas no isomorfas tener el mismo espectro? Esta pregunta fue planteada hace más de cincuenta años en Fisher (1966). La pregunta fue motivada de manera directa por el célebre artículo en que M. Kac lanzó la pregunta sobre si es posible «escuchar la forma de un tambor» (Kac (1966)). En términos físicos, el tono que produce un tambor corresponde a la frecuencia de vibración de su membrana. Así, la pregunta de Kac puede plantearse en la forma: si conocemos todas sus frecuencias de vibración ¿podemos determinar la forma de la membrana? A su vez, entendiendo a la membrana como un subconjunto abierto y acotado del plano, sus frecuencias de vibración corresponden a los eigenvalores del laplaciano de Dirichlet de la misma; esto es, los valores λ tales que existe solución para el problema

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u & \text{en el interior de la membrana} \\ u = 0 & \text{en la frontera.} \end{cases}$$

Es un hecho muy conocido que, bajo condiciones muy generales, el problema anterior tiene solución para un conjunto infinito sin puntos de acumulación de eigenvalores positivos e.g. Courant and Hilbert (1989); Evans (2010). Estos eigenvalores constituyen el *espectro* del laplaciano con condiciones de Dirichlet en la frontera; el espectro determina algunas características de la membrana, entre las que se encuentran su área y el perímetro de su frontera. Este hecho se conoce desde hace más de cien años, siendo consecuencia inmediata de un resultado conocido como la *fórmula asintótica de Weyl*, que apareció por primera vez en Weyl (1911). La pregunta planteada por Kac es si, más allá de determinar muchas de sus características, los eigenvalores determinan a la membrana por completo. Claro, salvo por movimientos rígidos del plano (traslaciones, rotaciones y reflexiones).

En Gordon et al. (1992), Carolyn Gordon, David Webb y Scott Wolpert, mostraron el primer ejemplo de membranas isoespectrales en el plano, es decir membranas no congruentes entre sí, que tienen el mismo espectro. La pregunta de Kac había

*Autor para correspondencia: fmclara@uaeh.edu.mx.

Correo electrónico: fmclara@uaeh.edu.mx (Federico Menéndez-Conde Lara).

sido respondida negativamente: no podemos, en general, escuchar la forma de los tambores, ya que existen tambores distintos que producen exactamente los mismos sonidos. El primer ejemplo mostrado en Gordon et al. (1992), así como muchos ejemplos análogos que pueden ser contruidos por sus mismos métodos, consisten en parejas de polígonos cóncavos. El método en cuestión está basado en un teorema que apareció por primera vez en Sunada (1985); previo al resultado de existencia de membranas isoespectrales, el teorema de Sunada había probado ser una muy útil herramienta para construir de manera sistemática parejas de variedades Riemannianas isoespectrales, respecto al operador de Laplace–Beltrami. Poco más tarde, en Berard (1992) se reprodujeron los mismos ejemplos, además de otros nuevos, aplicando al caso de membranas planares un «método de trasplante» que fue desarrollado anteriormente en Buser (1986) para construir parejas de variedades Riemannianas isoespectrales.

A partir del planteamiento de Kac, se ha dado por décadas una intensa exploración en búsqueda de *dominios isoespectrales*: parejas de dominios distintos, cuyos laplacianos tienen el mismo espectro. El problema se ha planteado en contextos de lo más diversos, que incluyen situaciones tanto de naturaleza continua como discreta; por mencionar algunas ejemplos: en variedades de Riemann e.g. Gordon et al. (2005), en gráficas cuánticas e.g. Gutkin and Smilansky (2001), en membranas fractales e.g. Lapidus (1991). Un punto curioso en la historia, es que el problema de encontrar dominios isoespectrales en \mathbb{R}^n ya había sido resuelto para $n = 16$, antes incluso de que Kac propusiera su pregunta sobre tambores: en Milnor (1964) se muestra la existencia de dos toros de esa dimensión, cuyos laplacianos tienen los mismos eigenvalores. Como hemos ya señalado, el problema para $n = 2$ tomó bastante más tiempo en ser respondido.

El caso que nos aquí nos ocupa, corresponde a laplacianos discretos en gráficas. Esta cuestión, como mencionamos al inicio de este artículo, ha sido planteada desde Fisher (1966). Ahí, se propone que la pregunta acerca de la existencia de membranas isoespectrales pudiera tal vez ser respondida discretizando las membranas en mallas, considerando los laplacianos discretos de estas, y buscando mallas isoespectrales que aproximen a la membrana. Sugiere Fisher que pudiera ser posible construir membranas isoespectrales a partir de mallas isoespectrales. En el mismo trabajo, se dieron ejemplos de gráficas con el mismo espectro para el operador de adyacencia, aunque no para el laplaciano. Sin embargo, pronto fue claro que el problema discreto de encontrar gráficas isoespectrales resultó ser mucho más sencillo que el equivalente continuo para las membranas de un tambor. De hecho, resulta ser que existen muchas parejas así: se demuestra en McKay (1977) que la proporción de árboles (gráficas sin ciclos) de n vértices que están determinados por sus eigenvalores, tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$. Podríamos decir que no podemos escuchar la forma de la «gran mayoría de los árboles», sobre todo si son muy grandes.

Se han publicado numerosos ejemplos de parejas de gráficas que son isoespectrales. En un principio, la mayoría de esos ejemplos fueron contruidos de manera ad hoc, sin mucha relación entre los distintos ejemplos propuestos. Sin embargo, a partir de la última década del siglo pasado, se han desarrollado diversos métodos para generar no solo ejemplos sueltos, sino

familias infinitas de gráficas isoespectrales. Uno de ellos, propuesto en Merris (1997), produce parejas de gráficas isoespectrales con la característica particular de que todos sus eigenvalores son números enteros. En Seress (2000) se construyó una familia infinita de gráficas isoespectrales de grado 8 (es decir, gráficas en que todos sus vértices están conectados con otros ocho vértices). Otros métodos para generar familias de gráficas isoespectrales, pueden encontrarse en Tan (1998) y Fujii and Katsuda (1999). En Halbeisen and Hungerbühler (1999) se presenta una adaptación del teorema de Sunada aplicada al caso del laplaciano en gráficas. Un método para construir de manera sistemática gráficas cuyas matrices de adyacencia tienen el mismo espectro, es el conocido como *intercambio de Seidel*; cuando las gráficas obtenidas son regulares, las gráficas son isoespectrales (ver e.g. Brooks (1999)). Referimos a Van Dam and Haemers (2003); Brouwer and Haemers (2012), donde pueden encontrarse descripciones detalladas de algunas de las construcciones de gráficas isoespectrales que mencionamos, así como un panorama histórico sobre el tema.

En relación directa y complementaria con el problema de encontrar parejas de gráficas isoespectrales, está la cuestión de si una gráfica dada está determinada por el espectro de su laplaciano. Mencionamos antes que casi todos los árboles tienen una pareja isoespectral, o lo que es lo mismo no están determinados por su espectro. Sin embargo, para gráficas con ciclos, en muy pocos casos se conoce la respuesta sobre si están o no determinadas por su espectro; en Van Dam and Haemers (2003) se conjetura que para gráficas ocurre lo opuesto que en árboles, y que la proporción de gráficas con n vértices que están determinadas por su espectro tiende a 1 cuando $n \rightarrow \infty$. Esta conjetura es todavía un problema abierto. Sí se sabe que todas las gráficas regulares de hasta nueve vértices están determinadas por su espectro, y se conocen ejemplos explícitos de parejas isoespectrales de gráficas regulares con diez vértices Godsil and McKay (1982). También se han dado ejemplos de clases infinitas de gráficas determinadas por su espectro; por mencionar algunos de ellos: los árboles de tipo estrella Omid and Tajbakhsh (2007), los rehiletes Liu et al. (2008), las rosas (ciclos que comparten un vértice) excepto por un par de casos He and van Dam (2018), y los dientes de león rotos Yang and Wang (2020).

En este trabajo, abordamos la situación en el caso que mencionamos al principio: la existencia de dominios isoespectrales para laplacianos discretos en gráficas. Hemos señalado en el párrafo anterior que la pregunta de la existencia de gráficas isoespectrales está no solo respondida, sino que existen numerosos métodos para construir tanto parejas aisladas como familias infinitas de tales parejas. En este trabajo presentamos en detalle una familia infinita de gráficas isoespectrales. Cabe señalar que la familia que mostramos aquí es un caso particular de entre la colección mucho más grande de gráficas isoespectrales que pueden construirse con el método de Merris (1997); en particular, el espectro de todas esas gráficas está formado por números enteros. Para nuestra presentación, no haremos uso de la maquinaria de Merris, sino que determinamos el espectro directamente mediante consideraciones elementales.

En la sección 2, presentamos algunos conceptos básicos de teoría espectral de gráficas, en particular referentes al laplaciano, que es nuestro operador de interés. En la sección 3 enlistamos algunos invariantes espectrales básicos, que resultan

útiles para el problema complementario de descartar existencia de parejas isoespectrales en ciertos conjuntos de gráficas. La construcción de nuestra familia ejemplo de parejas de gráficas isoespectrales se presenta en la sección 4.

2. El operador de Laplace en gráficas

2.1. Preliminares y notación

Mencionamos a continuación, de manera breve, algunas definiciones básicas en la teoría de gráficas, a modo de referencia y para establecer la notación que usaremos.

Una *gráfica* Γ , también conocida como *grafo*, es una pareja de un conjunto finito $V(\Gamma)$ de *vértices* o *nodos* y un conjunto $E(\Gamma)$ de *aristas*. Una arista es una pareja no ordenada de vértices. Cuando sea claro por el contexto cuál es la gráfica en cuestión, escribiremos V y E para representar a los conjuntos de vértices y aristas. La expresión $x_i \sim x_j$, significa que la arista $\{x_i, x_j\}$ está en E . En ese caso, diremos que los vértices x_i y x_j son *vecinos* o *adyacentes* o que están *conectados* entre sí, y que la arista $\{x_i, x_j\}$ es *incidente* o que *toca* a los vértices x_i y x_j . Una gráfica puede representarse por un dibujo, donde los vértices son puntos o pequeños círculos, mientras que las aristas son líneas que unen a los vértices que tocan (ver ejemplo en la figura 1).

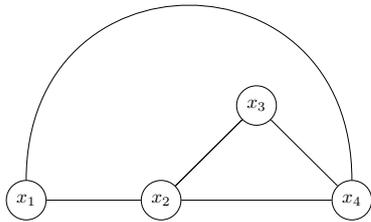


Figura 1: Gráfica con vértices $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y aristas $E = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\}, \{x_3, x_4\}\}$.

El *grado* de un vértice x , es la cantidad de aristas que lo tocan; lo denotamos por $\text{Deg}(x)$. Una gráfica es *conexa* si dados dos vértices x_r y x_s , existe una secuencia ordenada de vértices $\{y_i\}_{i=1}^m$ tal que $y_i \sim y_{i+1}$ para todo $i = 1, \dots, m - 1$ y con $x_r = y_1$ y $x_s = y_m$. Un *isomorfismo de gráficas* es una biyección $\phi : V(\Gamma_1) \rightarrow V(\Gamma_2)$ entre los vértices de dos gráficas, que preserva aristas; es decir, tal que $\{\phi(x), \phi(y)\} \in E(\Gamma_2) \iff \{x, y\} \in E(\Gamma_1)$. Dos gráficas son *isomorfas* si existe un isomorfismo entre ellas; si dos gráficas son isomorfas, se considera que son en realidad la misma gráfica.

Dada una gráfica Γ con vértices $V = \{x_1, \dots, x_n\}$, se define su *matriz de adyacencia* como la matriz de tamaño $n \times n$ con entrada $a_{i,j} = 1$ cuando $x_i \sim x_j$, y 0 en caso contrario. Se sigue de la definición que la matriz de adyacencia es real simétrica, y por lo tanto ortogonalmente diagonalizable. De manera recíproca se tiene: si 0 y 1 son los únicos valores que toma una matriz simétrica, y tiene puros ceros en la diagonal, entonces es la matriz de adyacencia de una gráfica; esta gráfica es única, salvo claro por isomorfismos.

El *complemento* de una gráfica Γ , denotado por Γ^c , está definido como una gráfica con los mismos vértices que Γ y tal

que una arista $\{x_i, x_j\}$ está en $E(\Gamma^c)$ si y solamente si no está en $E(\Gamma)$. Un resultado básico que usaremos es el hecho de que el complemento de una gráfica desconexa es conexo: en efecto, supongamos que Γ es desconexa. Si dos vértices x, y están en distintos componentes conexas de Γ la arista $\{x, y\}$ no está en $E(\Gamma)$, por lo que sí está en $E(\Gamma^c)$; en caso contrario, si están en el mismo componente conexo de Γ , basta tomar un vértice z en otro componente conexo, de modo que tanto $\{x, z\}$ como $\{y, z\}$ van a ser aristas de Γ^c .

2.2. El operador de Laplace

Definición 2.1. Sea Γ una gráfica con conjunto de vértices V . Denotamos por $\ell(V)$ al espacio vectorial de funciones con valores reales y dominio V . El operador de Laplace o laplaciano de Γ se define como

$$L(\Gamma) : \ell(V) \rightarrow \ell(V) \quad (Lu)(x) = \sum_{y \sim x} (u(x) - u(y)).$$

Cuando no exista ambigüedad sobre cuál es la gráfica que se está considerando, escribiremos L en vez de $L(\Gamma)$.

Dados un vector $u \in V$ y una arista $\{x, y\}$, a la cantidad $u(x) - u(y)$ se le suele interpretar como un «flujo» entre los vértices x y y , y se denota por $I_u(x, y)$. En esta interpretación, cuando $I_u(x, y) > 0$, se considera que el flujo sale de x hacia y ; si es negativo, se considera que llega a x desde y . Desde ese punto de vista, el laplaciano de u indica la cantidad neta de flujo que sale de un vértice (cuando es positivo) o que llega a este (cuando es negativo).

Observemos que también se puede escribir al laplaciano en la forma

$$(Lf)(x) = \text{Deg}(x)f(x) - \sum_{y \sim x} f(y). \quad (1)$$

Consideramos bases de $\ell(V)$ de la forma $\{u_1, \dots, u_n\}$ con $u_i(x_j) = \delta_{i,j}$, donde $\{x_1, \dots, x_n\}$ son los vértices de Γ ordenados de alguna manera. A dichas bases, les llamamos *bases naturales* de $\ell(V)$. Se observa que las bases naturales son ortonormales con respecto al producto usual de $\ell(V)$

$$\langle u, v \rangle_{\ell(V)} = \sum_{x \in V} u(x)v(x).$$

La *matriz laplaciana* de la gráfica Γ , es la representación matricial del operador de Laplace respecto a una base natural. Es claro que la matriz laplaciana de una gráfica cambia si permutamos los vértices de la misma. Sin embargo, este cambio corresponde sólo a una permutación de la base ortonormal, por lo que la matriz laplaciana es única hasta equivalencia unitaria. De manera más precisa, el intercambio en el orden de los vértices x_i y x_j de la gráfica, corresponde a un intercambio en los renglones y columnas i -ésimos y j -ésimos de la matriz.

De la igualdad (1), se observa que la matriz laplaciana puede escribirse en la forma

$$L = D - A,$$

con D la matriz diagonal con los grados de los vértices en la diagonal principal y A la matriz de adyacencia.

2.3. El espectro del laplaciano

La matriz laplaciana es real simétrica, y por lo tanto el operador de Laplace es un operador auto-adjunto. Aún más, para toda gráfica ocurre que el laplaciano es también un operador semi-positivo definido: esto significa que, para todo $v \in \ell(V)$ se tiene que $\langle Lv, v \rangle \geq 0$. Este hecho fundamental sobre el laplaciano, es muy bien conocido. Una forma de ver el por qué de esto, es la siguiente identidad para la forma cuadrática asociada al operador L

$$\langle Lu, u \rangle_{\ell(V)} = \sum_{\{x,y\} \in E} (u(x) - u(y))^2, \quad (2)$$

que puede verificarse reacomodando términos.

Así pues, si una gráfica tiene n vértices, su laplaciano asociado tiene n eigenvalores, y todos ellos son no-negativos. Los denotamos por

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

repetiéndolos de acuerdo a su multiplicidad. El cero es siempre eigenvalor del laplaciano, puesto que como puede verse de (2) (o también directamente de la definición) las funciones constantes están en el kernel de L . También se sigue de (2) que la dimensión del kernel es igual al número de componentes conexas de la gráfica.

Los eigenvalores del laplaciano en gráficas son, desde hace décadas, objeto de intenso estudio. Existen numerosas motivaciones tanto teóricas como aplicadas para ello. Por mencionar un par de ejemplos: el eigenvalor λ_2 , conocido como la *conectividad algebraica* o *valor Fiedler* de la gráfica, ha sido estudiado desde Fiedler (1973) como un parámetro relacionado con la pregunta sobre « qué tan conectados entre sí se encuentran los vértices de la gráfica ». El método conocido como *agrupamiento espectral* ha sido ampliamente usado en estadística multivariada y en análisis de datos, y constituye una poderosa herramienta para clasificar objetos de acuerdo a sus similitudes. En términos generales, el agrupamiento espectral consiste en clasificar los vértices de una gráfica, que en ese contexto representan variables de una base de datos, de acuerdo a los valores que toman eigenvectores del laplaciano. Podemos referir, por ejemplo a von Luxburg (2007), para una discusión en detalle sobre este tema.

3. Invariantes espectrales

Por *invariante espectral*, nos referimos a una propiedad de la gráfica que está determinada por el espectro de la misma. En particular, si los valores de un invariante espectral para dos gráficas son distintos, las gráficas no pueden tener el mismo espectro. Algunos invariantes espectrales, resultan bastante más sencillos de calcular que los eigenvalores de la gráfica. Es por ello que suelen resultar útiles para mostrar de forma rápida, en muchos casos, que parejas de gráficas dadas no pueden ser isoespectrales.

A continuación, enlistamos algunos ejemplos invariantes isoespectrales fundamentales.

- *Cantidad de vértices.*

Esto corresponde a la dimensión del espacio $\ell(V)$, es decir al número de eigenvalores de la gráfica. Dos gráficas

con distinto número de vértices tienen distinta cantidad de eigenvalores.

- *Cantidad de aristas.*

Dado que cada arista toca a dos vértices, la cantidad de aristas de una gráfica es igual a la mitad de la suma de los grados de sus vértices. Dicha suma es igual a la *traza* (suma de los valores en la diagonal principal) de la matriz laplaciana de la gráfica. Un resultado bien conocido de álgebra lineal nos dice que la traza es invariante bajo semejanza de matrices (ver por ejemplo Lax (2007); Nering (1977); Strang (2006)). En particular, la traza de una matriz diagonalizable es igual a la suma de sus eigenvalores:

$$\text{Traza}(L) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n.$$

Se concluye que los laplacianos de gráficas con distinta cantidad de aristas tienen distinta traza, y por lo tanto no pueden tener los mismos eigenvalores.

- *Componentes conexas.*

El número de componentes conexas de una gráfica es igual a la multiplicidad del eigenvalor 0, esto es la dimensión del kernel del laplaciano de la gráfica. En efecto, si Γ_i es una componente conexa de una gráfica Γ , la función indicadora

$$f_i(v) = \begin{cases} 1, & v \in V_i \\ 0, & v \notin V_i \end{cases}$$

donde V_i es el conjunto de vértices de Γ_i , está en el kernel de $L(\Gamma)$; se sigue de esto que la dimensión del kernel debe ser mayor o igual que la cantidad de componentes conexas. Por otra parte, supongamos que una función $g \in \ell(V)$ no es constante en una componente conexa γ_i . Entonces, podemos tomar $u \in \Gamma_i$ tal que $g(u) \geq g(v)$ para todo $v \in V_i$ con la desigualdad estricta para al menos un vecino de u . Es claro que en esa situación, $(Lg)(u) > 0$, por lo que g no puede estar en el kernel del laplaciano. Se concluye que las funciones f_i generan al kernel de L , y por lo tanto son una base del mismo.

- *El índice de Kirchhoff*

Dados $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ los eigenvalores del laplaciano de una gráfica conexa Γ , se define el *índice de Kirchhoff* por

$$K(\Gamma) = \sum_{i=2}^n \frac{1}{\lambda_i}.$$

Es inmediato de la definición, que dos gráficas isoespectrales tienen el mismo índice de Kirchhoff. Resulta ser que este índice puede encontrarse de manera indirecta, sin conocer de forma explícita los eigenvalores por separado. Para esto, puede hacerse uso de la llamada *métrica de resistencia efectiva*, que es una métrica definida en los vértices de la gráfica. De manera más precisa, si denotamos por $\rho_\Gamma(u, v)$ a la distancia entre los vértices de u y v (con respecto a la métrica de resistencia) se tiene la igualdad (Klein and Randić (1993)):

$$K(\Gamma) = n \sum_{u \neq v \in V} \rho_\Gamma(u, v).$$

donde n es la cantidad de vértices de la gráfica. Para la definición de la métrica de resistencia y detalles sobre la misma, referimos a Bapat et al. (2003); Doyle and Snell (1984); Jorgensen and Pearse (2009).

Existen, desde luego, muchos otros invariantes espectrales además de los mencionados. Sin embargo, esos pocos bastan para descartar, para una gran cantidad de colecciones de gráficas, la posibilidad de existencia de parejas isoespectrales. Como una muestra muy simple de ello, esos invariantes son suficientes para verificar que no existe ninguna pareja de gráficas conexas de cuatro vértices que sean isoespectrales; ilustramos eso en las figura 2.



Figura 2: Las únicas dos gráficas conexas con cuatro vértices y el mismo número de aristas. La gráfica de la izquierda, el ciclo C_4 , tiene índice de Kirchhoff $K = 5/4$, mientras que para la de la derecha es $K = 19/12$.

Como consecuencia inmediata del corolario 4.2, que presentamos en la siguiente sección, podremos agregar a nuestra lista: el número de componentes conexas del complemento de la gráfica.

4. Colecciones de gráficas isoespectrales

En esta sección, presentamos la construcción de una familia infinita de parejas de gráficas isoespectrales. Las gráficas involucradas se construyen mediante uniones disjuntas de gráficas simples, para las que resulta sencillo encontrar el espectro de manera explícita. De este modo, las gráficas que se obtienen tienen dos componentes conexas. Para obtener parejas de gráficas isoespectrales conexas, bastará con tomar los complementos de aquellas, ya que el complemento de una gráfica desconexa es siempre conexo.

4.1. Gráficas isoespectrales desconexas

Presentamos en este apartado, nuestros «bloques de construcción»: una pequeña lista de las gráficas con mucha estructura. Para estas gráficas, determinamos el espectro de forma explícita. Uniones apropiadas de estas gráficas, resultarán en parejas de gráficas isoespectrales.

Antes de enlistar las gráficas, enunciemos el siguiente lema que resultará conveniente para determinar el espectro de algunas de ellas.

Lema 4.1. *Supongamos que y es un vértice que está conectado con todos los demás vértices de una gráfica Γ . Sea u un eigenvector de L , no constante, y tal que $u(y) \neq 0$. Entonces $Lu = nu$.*

Demostración. Denotamos por $\mathbf{1} \in \ell(V)$ a la función constante 1, que es un eigenvector para $\lambda_1 = 0$. Como u es eigenvector con eigenvalor distinto de cero, se tiene que u está en el espacio ortogonal $\mathbf{1}^\perp$, por ser L auto-adjunto. Esto es lo mismo que decir que

$$\sum_{x \in V} u(x) = 0.$$

Para el vértice $y \in V$ que está conectado a los demás, se sigue entonces que

$$(Lu)(y) = (n - 1)u(y) - \sum_{x \neq y} u(x) = nu(y).$$

Necesariamente, el eigenvalor asociado a u , tiene que ser n , que es lo que se quería demostrar. \square

A continuación, enlistamos los bloques de construcción mencionados arriba.

■ *La gráfica completa K_n .*

Se denota por K_n a la gráfica de n vértices, con todos ellos conectados entre sí. Es bien sabido que el espectro de $L = L(K_n)$ consiste de solo dos eigenvalores: $\lambda_1 = 0$, con multiplicidad 1; y $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = n$ con multiplicidad $n - 1$. Notemos que este hecho se sigue de forma inmediata del lema 4.1: cualquier eigenvector no constante, necesariamente tiene que tener eigenvalor igual a 1. Es decir, el eigenespacio asociado a n es el más grande posible: todo $\mathbf{1}^\perp$, que tiene dimensión $n - 1$.

■ *K_n más un vértice con grado 1.*

Usaremos la notación K'_n para denotar a la gráfica con $n + 1$ vértices que se obtiene al agregar a K_n un vértice conectado a exactamente uno de los vértices de K_n . Estas son un caso particular de «gráficas paleta»; en concreto, a K'_n se le conoce como la $(n, 1)$ -lollipop graph (ver figura 3).

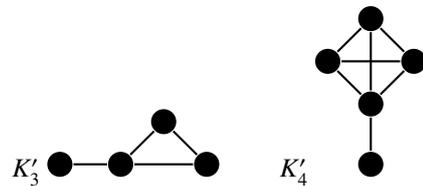


Figura 3: Ejemplos pequeños de gráficas K'_n

Afirmamos que el espectro de $L = L(K'_n)$ está formado por los eigenvalores 0, 1 y $n + 1$, cada uno de ellos con multiplicidad 1, además del eigenvalor n con multiplicidad $n - 2$.

Ordenemos los vértices de K'_n en la forma $\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$, de modo que x_{n+1} sea el vértice de grado 1, y que x_1 sea el único vértice de K_n conectado a x_{n+1} . Por el lema 4.1, sabemos que si u es un eigenvector con $u(x_1) \neq 0$, tiene que tener eigenvalor igual a $n + 1$. Un cálculo directo permite ver que

$$u(x) = \begin{cases} n & \text{para } x = x_1 \\ -1 & \text{para } x \neq x_1 \end{cases} \quad (3)$$

es tal que $Lu = (n + 1)u$. Notemos ahora que si $v(x_1) = 0$, entonces $(Lv)(x_{n+1}) = v(x_{n+1})$; esto implica que si v es un eigenvector que se anula en x_1 pero no en x_{n+1} , el único eigenvalor posible es $\lambda = 1$. Otra vez, podemos obtener el eigenvector de forma explícita:

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x = x_1, \\ -1 & \text{para } x \in \{x_2, \dots, x_n\}, \\ n - 1 & \text{para } x = x_{n+1}. \end{cases}$$

Falta solo ver que n es también eigenvalor de L , con multiplicidad $n - 2$. Sea W el subespacio de $\ell(V)$ dado por

$$W = \left\{ w \mid w(x_1) = w(x_{n+1}) = \sum_{j=2}^n w(x_j) = 0 \right\}.$$

Es claro que W tiene dimensión $n - 2$: por ejemplo, observando que es el complemento ortogonal del espacio de funciones constantes en la gráfica completa con vértices $\{x_2, \dots, x_n\}$. Si $w \in W$. Entonces se tiene que

$$(Lw)(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x = x_1, x_{n+1}, \\ nw(x) & \text{para } x \in \{x_2, \dots, x_n\}. \end{cases}$$

Tenemos que W es eigenspacio para $\lambda = n$, y hemos entonces determinado ya a todo el espectro de $L(K'_n)$.

■ **Gráficas de tipo-estrella.**

Denotemos por E_n a la gráfica con n vértices $\{x_1, \dots, x_n\}$, con el vértice x_1 conectado a todos los demás, y sin ninguna otra arista. Es decir, el vértice x_1 tiene grado máximo $n - 1$, mientras que todos los otros vértices tienen grado 1 (ver figura 4). Una vez más, el lema 4.1 nos dice que si un eigenvector no se anula en x_1 , necesariamente el eigenvalor es igual a n .

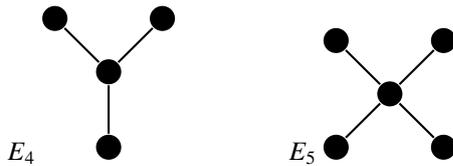


Figura 4: Dos ejemplos de gráficas de tipo-estrella.

La función u definida por

$$u(x) = \begin{cases} n - 1 & \text{para } x = x_1 \\ -1 & \text{para } x \neq x_1 \end{cases} \quad (4)$$

es eigenvector para $\lambda = n$, como debería ser por el lema 4.1. Ahora, si w es un vector tal que $w(x_1) = 0$ y

$$\sum_{j=2}^n w(x_j) = 0$$

se tiene que w es punto fijo de $L = L(E_n)$. Tenemos entonces que hemos determinado el espectro de E_n : 0 y n , ambos con multiplicidad 1; y $\lambda = 1$ con multiplicidad igual a $n - 2$.

Una vez que hemos obtenido los espectros de las gráficas anteriores, resultará sencillo construir parejas de gráficas isoespectrales, cada una de las gráficas involucradas con dos componentes conexas. Para ello usaremos el siguiente resultado elemental:

Teorema 4.1. *Dadas dos gráficas G y H sin vértices en común, denotamos por $G + H$ a la gráfica formada por la unión de G y H . Se tiene siempre que:*

(a) *El número de componentes conexas de la gráfica $G + H$ es igual a la suma de las cantidades de componentes conexas de G y de H .*

(b) *$\sigma(G + H)$ es igual a la unión disjunta de $\sigma(G)$ y $\sigma(H)$. En otras palabras:*

Si $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_m$ son los eigenvalores de $L(G)$, y $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta_r$ son los eigenvalores de $L(H)$ (en ambos casos repetidos de acuerdo a su multiplicidad), entonces $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_r\}$ son los eigenvalores de $L(G + H)$ también repetidos por multiplicidad.

Demostración. El primer inciso es inmediato de la definición de $G + H$. Para probar el segundo inciso, tomemos f eigenvector de $L(G)$, arbitrario, digamos con $L(G)f = \alpha_k f$. Definimos $\tilde{f} \in \ell(G + H)$ como la función que es igual a f en los vértices de $G + H$ correspondientes a G , e igual a cero en los vértices que corresponden a H . Al estar dichas partes desconectadas entre sí en $G + H$, se tiene que $L(G + H)\tilde{f} = \alpha_k \tilde{f}$. De este modo, todos los eigenvalores de $L(G)$ son eigenvalores de $L(G + H)$, con al menos la misma multiplicidad. De manera análoga, lo mismo pasa con todos los eigenvalores de $L(H)$. Como la dimensión de $\ell(G + H)$ es igual a $m + r$, no puede haber más eigenvalores de $L(G + H)$ que los ya señalados. Eso completa la demostración. □

Corolario 4.1. *Para todo n , se tiene que las gráficas $K_n + E_{n+1}$ y $K'_n + E_n$, son isoespectrales entre sí.*

Demostración. Del teorema anterior y de los espectros de K_n , K'_n y E_n calculados arriba, se tiene que tanto para $K_n + E_{n+1}$ como para $K'_n + E_n$, el espectro está dado por:

- 0 con multiplicidad 2
- 1 con multiplicidad $n - 1$
- n con multiplicidad $n - 1$
- $n + 1$ con multiplicidad 1

□

Tenemos entonces, para cada $n \geq 3$, una pareja de gráficas isoespectrales $K_n + E_{n+1}$ y $K'_n + E_n$; ocurre que para $n = 2$, las gráficas en cuestión son en realidad la misma. De este modo, tenemos un ejemplo de parejas isoespectrales de gráficas con n vértices, para todo impar $n \geq 7$.

4.2. **Gráficas isoespectrales conexas**

Siempre que se tiene una pareja isoespectral de gráficas disconexas, se puede obtener una pareja isoespectral de gráficas conexas. Basta tomar el complemento de las anteriores. Por un lado, es fácil ver que el complemento de una gráfica disconexa es una gráfica conexas. Por otro lado, el siguiente resultado nos garantiza que si dos gráficas son isoespectrales entonces sus complementos también lo son. El resultado es bien conocido en teoría espectral de gráficas; para una demostración podemos referir, por ejemplo a Cvetkovic et al. (2009).

Teorema 4.2. *Sea G una gráfica cualquiera con n vértices. Si u es un eigenvector del laplaciano $L(G)$, y u es ortogonal a las funciones constantes, entonces u es también eigenvector de $L(G^c)$. Más aún:*

$$L(G)u = \lambda u \iff L(G^c)u = (n - \lambda)u.$$

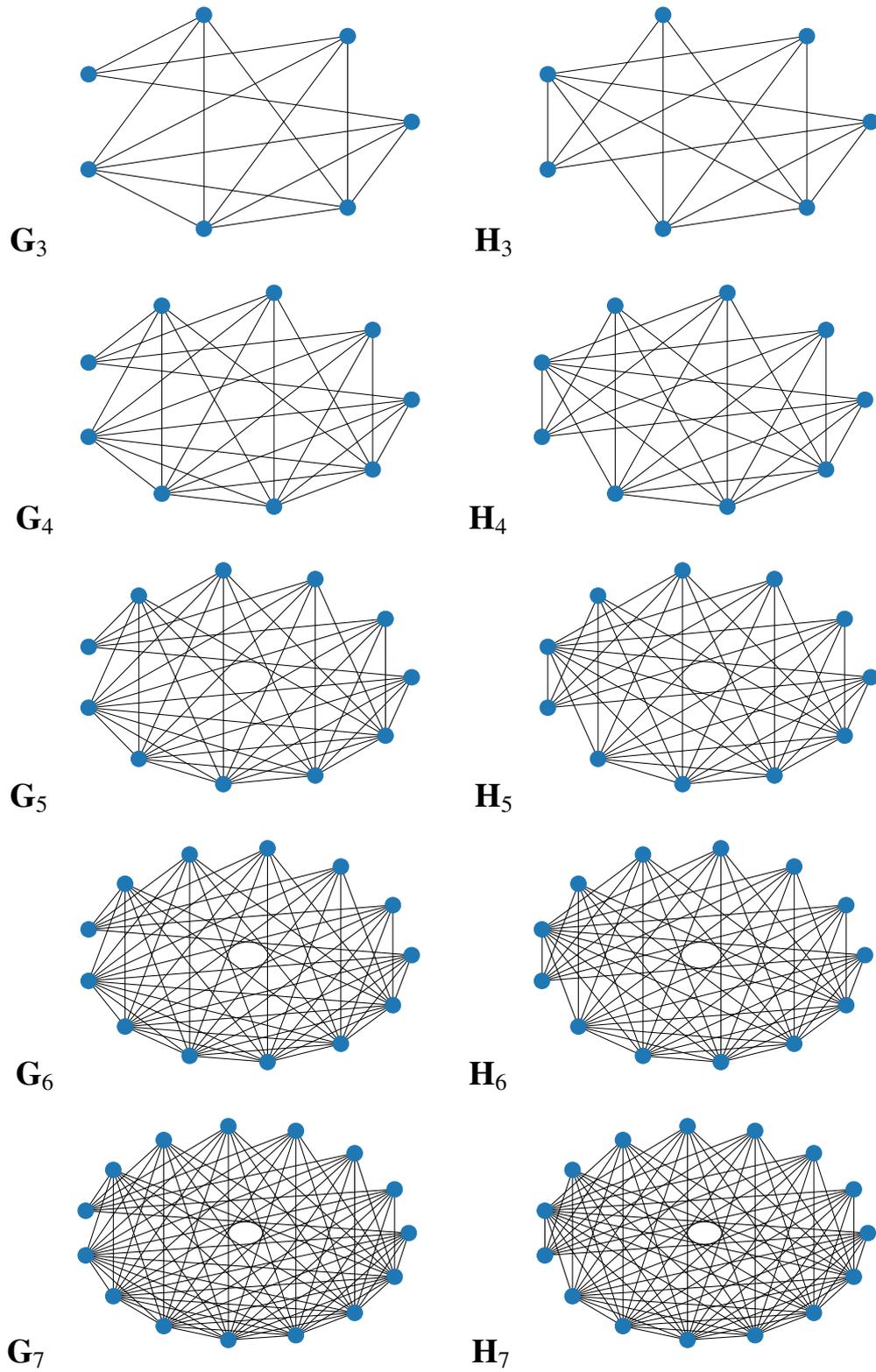


Figura 5: Parejas de gráficas isoespectrales

Corolario 4.2. Si $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ son los eigenvalores del laplaciano $L(G)$, entonces $0 \leq n - \lambda_n \leq \dots \leq n - \lambda_2$, son los eigenvalores de $L(G^c)$.

De este modo, tenemos una colección infinita de gráficas conexas

$$\mathbf{G}_n = (K_n + E_{n+1})^c \quad \mathbf{H}_n = (K'_n + E_n)^c$$

Como consecuencia de los corolarios 4.1 y 4.2, el espectro de las gráficas \mathbf{G}_n y \mathbf{H}_n está dado en ambos casos por

- 0 con multiplicidad 1
- n con multiplicidad 1
- $n + 1$ con multiplicidad $n - 1$
- $2n$ con multiplicidad $n - 1$
- $2n + 1$ con multiplicidad 1

En la figura 5, se ilustran los cinco casos más pequeños de dichas parejas. Estas figuras se generaron con el lenguaje de programación Python, y haciendo uso de la biblioteca networkx (<https://networkx.org/>).

5. Conclusiones

El problema de encontrar y construir ejemplos de gráficas isoespectrales ha sido objeto de intensas búsquedas, desde hace décadas. Teóricamente, esto se inscribe dentro de la cuestión más general de buscar dominios isoespectrales para laplacianos y otros operadores. Se trata de problemas con importantes motivaciones tanto teóricas como aplicadas. En este trabajo, se muestra con un ejemplo concreto, que es posible encontrar colecciones infinitas de gráficas isoespectrales, haciendo uso exclusivo de métodos elementales.

Agradecimientos

Salvador Cruz García, egresado de la primera generación de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la UAEH (LIMA), se tituló de la licenciatura con el trabajo de tesis Cruz-García (2007). En esa tesis se describe en detalle el método de Berard para construir ejemplos de membranas isoespectrales, y se muestran algunos ejemplos propios construidos con dicho método. A principios de 2021, meses antes del 20 aniversario del ingreso a la LIMA de esa primera generación, nos enteramos de la triste noticia del fallecimiento de Salvador. Dedicar a su memoria un escrito relacionado con su trabajo de tesis, fue mi principal motivación para escribir estas páginas.

Agradezco a los revisores por sus útiles observaciones que contribuyeron al mejoramiento de este artículo.

Referencias

Bapat, R. B., Gutman, I., and Xiao, W. (2003). A simple method for computing resistance distance. *Z. Naturforsch.*, pages 494–498.

Berard, P. (1992). Transplantation et isospectralité. *Math. Ann.*, 292:547–559.

Brooks, R. (1999). Non-Sunada graphs. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 49(2):707–725.

Brouwer, A. E. and Haemers, W. H. (2012). *Spectra of Graphs*. Springer, New York, NY.

Buser, P. (1986). Isospectral Riemann surfaces. *Annales de l'institut Fourier*, 36(2):167–192.

Courant, R. and Hilbert, D. (1989). *Methods of Mathematical Physics*, volume 1. Wiley, New York.

Cruz-García, S. (2007). Construcción de dominios isoespectrales. Tesis de licenciatura, UAEH.

Cvetkovic, D., Rowlinson, P., and Simić, S. (2009). *Introduction to the Theory of Graph Spectra*, volume 75 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press.

Doyle, P. and Snell, J. L. (1984). Random walks and electric networks. *American Mathematical Monthly*, 94:202.

Evans, L. (2010). *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

Fiedler, M. (1973). Algebraic connectivity of graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 23:298–305.

Fisher, M. (1966). On hearing the shape of a drum. *Journal of Combinatorial Theory*, 1:105–125.

Fujii, H. and Katsuda, A. (1999). Isospectral graphs and isoperimetric constants. *Discret. Math.*, 207:33–52.

Godsil, C. and McKay, B. (1982). Constructing cospectral graphs. *Aequationes Mathematicae*, 25:257–268.

Gordon, C., Perry, P., and Schueth, D. (2005). Isospectral and isoscattering manifolds: a survey of techniques and examples. *Geometry, Spectral Theory, Groups, and Dynamics, Contemporary Mathematics*, pages 157–179.

Gordon, C., Webb, D., and Wolpert, S. (1992). One cannot hear the shape of a drum. *Bull Am Math Soc*, 27:134–138.

Gutkin, B. and Smilansky, U. (2001). Can one hear the shape of a graph? *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 34(31):6061–6068.

Halbeisen, L. and Hungerbühler, N. (1999). Generation of isospectral graphs. *Journal of Graph Theory*, 31:255–265.

He, C. and van Dam, E. R. (2018). Laplacian spectral characterization of roses. *Linear Algebra and its Applications*, 536:19–30.

Jorgensen, P. E. T. and Pearse, E. P. J. (2009). Operator theory of electrical resistance networks.

Kac, M. (1966). Can one hear the shape of a drum? *American Mathematical Monthly*, 73(4:2):1–23.

Klein, D. and Randić, M. (1993). Resistance distance. *Journal of Mathematical Chemistry*, 12(1):81–95.

Lapidus, M. L. (1991). Can one hear the shape of a fractal drum? Partial resolution of the Weyl-Berry conjecture. In Concus, P., Finn, R., and Hoffman, D. A., editors, *Geometric Analysis and Computer Graphics*, pages 119–126, New York. Springer New York.

Lax, P. D. (2007). *Linear Algebra and Its Applications*. Wiley-Interscience, Hoboken, NJ, second edition.

Liu, X., Zhang, Y., and Gui, X. (2008). The multi-fan graphs are determined by their laplacian spectra. *Discrete Mathematics*, 308(18):4267–4271.

McKay, B. D. (1977). On the spectral characterisation of trees. *Ars Combinatoria*, 3:219–232.

Merris, R. (1997). Large families of Laplacian isospectral graphs. *Linear and Multilinear Algebra*, 43:201–205.

Milnor, J. (1964). Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 51(4):542–542.

Nering, E. (1977). *Álgebra Lineal y Teoría de Matrices*. Limusa.

Omidí, G. R. and Tajbakhsh, K. (2007). Starlike trees are determined by their Laplacian spectrum. *Linear Algebra and its Applications*, 422:654–658.

Seress, A. (2000). Large families of cospectral graphs. *Designs, Codes and Cryptography*, 21:205–208.

Strang, G. (2006). *Linear algebra and its applications*. Thomson, Brooks/Cole, Belmont, CA.

Sunada, T. (1985). Riemannian coverings and isospectral manifolds. *Annals of Mathematics*, 121(1):169–186.

Tan, J. (1998). On isospectral graphs. *Interdisciplinary Information Sciences*, 4(2):117–124.

Van Dam, E. R. and Haemers, W. H. (2003). Which graphs are determined by their spectrum? *Linear Algebra and its Applications*, 373:241–272.

von Luxburg, U. (2007). A tutorial on spectral clustering. *Stat. Comput.*, 17(4):395–416.

Weyl, H. (1911). Ueber die asymptotische Verteilung der Eigenwerte. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1911:110–117.

Yang, X. and Wang, L. (2020). Laplacian spectral characterization of (broken) dandelion graphs. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 51:915–933.