DESDE 2013
https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/icbi/issue/archive
Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI

ISSN: 2007-6363

Publicación Semestral Pädi Vol. 10 No. 19 (2022) 79–83

Potencial Newtoniano efectivo proveniente de mundos brana y el pozo cuántico gravitacional
Effective Newtonian potential from brane worlds and quantum gravitational well

O. Pedraza, L. A. López, V. E. Cerón*, A. Criollo

Área Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México.

Resumen

En las teorías de dimensiones extras, es bien sabido que el potencial gravitacional Newtoniano es modificado. En algunos modelos de mundos brana, las correcciones al potencial gravitacional Newtoniano obedecen a una ley de potencias. En este trabajo se analizará las correcciones al espectro de energía para los dos primeros estados de una partícula cuántica inmersa en un pozo cuántico gravitacional considerando que las correcciones al potencial gravitacional obedecen a una ley de potencias. Los resultados obtenidos se comparan con los datos experimentales obtenidos del experimento GRANIT, donde es medido el efecto del campo gravitacional de la Tierra en los estados cuánticos de neutrones ultra fríos. Esta comparación proporciona una cota para el parámetro del escenario de dimensiones extras.

Palabras Clave: Dimensiones extras, Pozo cuántico gravitacional, mundos brana, potencial Newtoniano.

Abstract

In extra dimensional theories, Newtonian gravitational potential is modified at short distances. In some models of brane worlds, the corrections to Newtonian gravitational potential obey a power-law. This paper will analyze the corrections to the energy spectrum for the first two states of a quantum particle immersed in a gravitational quantum well considering that the corrections to gravitational potential is due to a power law. The results obtained are compared with the experimental data obtained from the GRANIT experiment, where the effect of the Earth's gravitational field on the quantum states of ultra-cold neutrons are measured. This comparison leads to upper bounds on the extra dimension scenario parameter.

Keywords: Extra dimensions, gravitational quantum well, brane worlds, Newtonian potential.

1. Introducción

De los diversos ejemplos que se abordan en los cursos de mecánica cuántica, uno de ellos es el pozo cuántico gravitacional, el cual es descrito por el potencial

$$V(z) = \begin{cases} +\infty & z \leq 0 \\ mgz & z > 0 \end{cases} . \tag{1}$$

La solución a este problema es descrita en términos de las funciones de Airy, en donde las energías son discretas y la probabilidad de observar a una partícula en una altura dada, será máxima en los puntos de retorno clásicos.

Experimentalmente, los estados cuánticos de una partícula neutra de masa m bajo la influencia del potencial (1) han sido observados. En el sistema experimental llamado GRANIT Roulier et al. (2015); Nesvizhevsky et al. (2005), las partículas neutras (neutrones) son confinadas entre una placa muy densa y el potencial gravitacional de la Tierra. Los neutrones se encuentran en estados cuánticos discretos del potencial gravitacional (1), (para mayor referencia del pozo cuántico gravitacional, ver Nesvizhevsky et al. (2003)), los cuales se mueven muy lentos y son reflejados de la placa en todas direcciones (aquí la placa puede ser modelada como un potencial escalón). El principal objetivo de este dispositivo experimental, es acercarse a la máxima precisión en la medición de parámetros de dichos estados cuánticos, así como también busca poder aplicar este fenómeno y estas técnicas experimentales al estudio de nanociencia y superficies (para una mayor referencia ver el trabajo de Roulier et al. (2015)).

*Autor para correspondencia: vceron@uaeh.edu.mx
Correo electrónico: omarp@uaeh.edu.mx (Omar Pedraza-Ortega), lalopez@uaeh.edu.mx (Luis A. López-Suárez), vceron@uaeh.edu.mx (Victoria E. Ceron-Angeles), arturoc@uaeh.edu.mx (Arturo Criollo-Pérez.)

Fecha de recepción: 18/02/2022 Fecha de aceptación: 16/05/2022 Fecha de publicación (postprint): 18/05/2022
Fecha de publicación: 05/07/2022 https://doi.org/10.29057/icbi.v10i19.8723

Los estados cuánticos de los neutrones en este dispositivo experimental pueden ayudar a probar los efectos de la gravedad Newtoniana entre 10^{-9} m y 10^{-3} m y también pueden ayudar al estudio de teorías que modifican los efectos gravitacionales.

El pozo cuántico gravitacional, ha sido también estudiado en geometrías no conmutativas como se muestra en el trabajo de Bertolami et al. (2005); Lawson et al. (2017), en teorías que modifican el principio de incertidumbre de Heisenberg (principio de incertidumbre generalizado) como señala Brau and Buisseret (2006); Bhat et al. (2017), en modificaciones a la gravedad Newtoniana, tipo Yukawa, desarrollado por Nesvizhevsky and Protasov (2004), también ha sido considerado para probar los efectos de la materia obscura como lo muestra Castorina et al. (2018) y en escenarios de dimensiones extras como se aprecia en el trabajo de Buisseret et al. (2007).

Por otra parte, es bien conocido que los modelos de mundos brana producen correcciones al potencial gravitacional Newtoniano. Particularmente, en el trabajo de Ito (2002) considera una $(3+n)$ brana encajada en un espacio tiempo $(5+n)$-dimensional, donde las n dimensiones extras en la brana son compactificadas al mismo radio $r \sim M_{Pl}^{-1}$ (con M_{Pl} es la escala de Planck) y la dimensión extra perpendicular a la brana es no compacta (infinita) y con una simetría Z_2. En este escenario, las correcciones al potencial Newtoniano obedecen a una ley de potencias $1/r^{n+2}$.

Combinando algunas de las ideas expresadas anteriormente, el propósito de este trabajo es estudiar algunas consecuencias de los escenarios de dimensiones extras. Específicamente se abordará el estudio del problema del pozo cuántico gravitacional en el escenario descrito por Ito (2002).

La estructura de este artículo, se organiza de la siguiente forma: en la sección 2 se hace una revisión breve del problema del pozo cuántico gravitacional. Asimismo, se presenta el análisis para la obtención del potencial efectivo de una partícula neutra de masa m en un pozo cuántico gravitacional en el contexto de dimensiones extras.

En la sección 3 se estudian las correcciones al potencial gravitacional Newtoniano $1/r^{n+2}$, provenientes de las dimensiones extras en el espectro de energías del problema del pozo cuántico gravitacional. También, en esta sección se comparan los resultados teóricos obtenidos con los datos experimentales, lo cual proporciona una cota para el parámetro del escenario. Finalmente, en la sección 4 se presenta la discusión de los resultados obtenidos.

2. Pozo cuántico gravitacional

El pozo cuántico gravitacional puede entenderse, como el movimiento de una partícula no relativista de masa m bajo la influencia del campo gravitacional $\vec{g} = g\hat{k}$, pero con la restricción impuesta por una placa muy densa colocada en el punto $z = 0$, de tal forma que el potencial puede expresarse como el expresado en la ecuación (1). El potencial infinito en $z = 0$ es una buena descripción de la placa densa, al menos para los estados más bajos.

La dinámica de la partícula cuántica que rebota en la placa bajo la influencia del campo gravitacional, puede ser descrita por la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en una dimensión, es decir

$$H_0\psi(z) = E_0\psi(z), \quad H_0 = \frac{p^2}{2m} + mgz\,. \tag{2}$$

Mientras que, en las otras dos dimensiones la partícula es libre. La solución de (2) ha sido estudiado ampliamente en la literatura (ver problema 40 de Flügge (1999), para mayor referencia), las cuales pueden expresarse de la siguiente forma

$$\psi_\nu(z) = N_\nu Ai\left[\theta z + \alpha_\nu\right], \quad E_{0\nu} = \frac{mg}{\theta}\alpha_\nu, \quad \theta = \left(\frac{2m^2 g}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{3}$$

donde $N_\nu = \theta^{1/2}/\,|Ai'(\alpha_\nu)|$ es la constante de normalización y α_ν es la ν-ésima raiz de la función de Airy.

La colisión de la partícula cuántica con la placa densa provocará que la partícula rebote a lo largo de la dirección z hasta una altura h_n

$$h_{0\nu} = \frac{E_{0\nu}}{mg} = -\frac{\alpha_\nu}{\theta}\,, \tag{4}$$

la cual, por su puesto, esta cuantizada. Los dos primeros valores teóricos de estas alturas toman los siguientes valores

$$h_{01} = 13{,}7\mu m\,, \tag{5}$$
$$h_{02} = 24{,}0\mu m\,, \tag{6}$$

donde se han considerado $m = 939\,MeV/c^2$ y $g = 9{,}81\,m/s^2$ en (4).

En el experimento GRANIT, las mediciones para las alturas críticas de los dos primeros estados son

$$h_1^{\mathrm{E}} = 12{,}2\mu m \pm 1{,}8_{sist} \pm 0{,}7_{sta} \tag{7}$$
$$h_2^{\mathrm{E}} = 21{,}6\mu m \pm 2{,}2_{sist} \pm 0{,}7_{sta}\,. \tag{8}$$

Las variaciones de las alturas h_1 y h_2 considerando los valores teóricos y experimentales conllevan a $\delta^{\mathrm{T}} = h_{02} - h_{01} = 10{,}3\,\mu m$ y $\delta^{\mathrm{E}} = h_2^{\mathrm{E}} - h_1^{\mathrm{E}} = 9{,}4\,\mu m \pm 5{,}4\,\mu m$, respectivamente. De estos resultados se observa que el valor teórico δ^{T} cae dentro del intervalo experimental δ^{E}.

El propósito de este trabajo, es considerar que al asumir alguna corrección al potencial en la ecuación (2) de la forma $mgz + U(z)$, con $U(z)$ un término perturbativo que codifica los efectos de las dimensiones extras, se podrá sustituir a δ^{T} por $\delta^{\mathrm{T}} + \Omega$, con

$$\Omega = \frac{1}{mg}\left[\langle\psi_2|\,U\,|\psi_2\rangle - \langle\psi_1|\,U\,|\psi_1\rangle\right]\,, \tag{9}$$

donde los eigenestados $\psi_{1,2}$ son dados por (2). En otras palabras, los escenarios de mundos brana proveen contribuciones al potencial Newtoniano que pueden ser cuantificables con datos experimentales actuales, proporcionados por el experimento GRANIT, sin embargo, estas correcciones no pueden ser muy grandes (por que de ser así, el modelo quedaría excluido), por lo que no pueden superar la cota experimental. Entonces, comparando los resultados teóricos con los datos experimentales, se requiere que Ω satisfaga

$$\Omega \leq 4{,}5\,\mu m\,. \tag{10}$$

De esta relación, se pueden imponer algunas cotas para los parámetros del escenario en cuestión, a través del término perturbativo $U(z)$. Como se mostrará en la sección 3.

2.1. Correcciones al Potencial Newtoniano

Las interacciones gravitacionales han sido estudiadas en los escenarios de mundos brana, particularmente en Ito (2002) se considera una $(3+n)$-brana encajada en un espacio-tiempo $5+n$ con constante cosmológica negativa. Aquí las n dimensiones extras en la brana son compactificadas a la escala de Planck ($R \sim M_{Pl}^{-1}$, donde M_{Pl} es la escala de Planck), mientras que la otra dimensión extra es no compacta y posee además una simetría Z_2.

Estudiando las fluctuaciones gravitacionales respecto de la métrica de fondo en este escenario $(5+n)$-dimensional, se obtienen el potencial gravitacional efectivo cuatro dimensional. De este análisis, se tiene que el potencial gravitacional efectivo cuatro dimensional entre dos masas m y M separados por una distancia r, es dado por

$$\begin{aligned} V(r) &= -\frac{GmM}{r}\left(1+\frac{(n+1)!L^{n+2}}{r^{n+2}}\right), \quad r \gg L, \\ & n = 1,2,4,6,\dots, \end{aligned} \tag{11}$$

donde L es una escala de longitud a la cual las correcciones se vuelven dominantes. El primer término (11) es el potencial estándar Newtoniano cuatro dimensional, mientras que el segundo término considera las correcciones al potencial gravitacional debido a la presencia de las dimensiones extras.

El potencial (11) corresponde a la interacción entre dos partículas puntuales, sin embargo, para el caso en el que una partícula puntual cae en una placa densa situada en la superficie de la Tierra, es necesario derivar el potencial efectivo entre la partícula puntual y el sistema Tierra-Placa. Este análisis, se realizará en las siguientes subsecciones.

2.2. Interacción Tierra-partícula

Aquí se estudiará el potencial gravitacional efectivo al considerar la interacción entre una partícula puntual y la Tierra, para ello, sin pérdida de generalidad se puede considerar a la Tierra como una esfera de radio $R = 6378\,km$ y con una densidad ρ_T constante.

El punto de partida para este análisis, es considerar el potencial entre una partícula puntual y un elemento infinitesimal de la Tierra $dM = \rho_T dv'$. Así, se tiene

$$dV_T(\vec{r}) = -\frac{mG\rho_T}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}dv' - \frac{mG\rho_T(n+1)!L^{n+2}}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^{3+n}}dv'. \tag{12}$$

Luego, el potencial total es

$$\begin{aligned} V_T(\vec{r}) &= -\int_v \frac{mG\rho_T}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}dv' \\ &\quad -\int_v \frac{mG\rho_T(n+1)!L^{n+2}}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^{3+n}}dv'. \end{aligned} \tag{13}$$

Tomando el origen de coordenadas en el centro geométrico de la Tierra, se puede escribir a los vectores de posición $\vec{r}$ y $\vec{r}'$ como

$$\vec{r} = (R+h)\hat{k}, \tag{14}$$

$$\vec{r}' = r\,\hat{r}, \tag{15}$$

con h la altura de la partícula respecto a la superficie de la Tierra y la $\hat{r}$ el vector unitario en coordenadas esféricas. De esta forma, la norma de la diferencia de los vectores de posición puede escribirse como $\left|\vec{r}-\vec{r}'\right| = \sqrt{r^2+(R+h)^2-2r(R+h)\cos\theta} \equiv F(r,\theta)$. Usando coordenadas esféricas, la integral en la coordenada ϕ da 2π y haciendo el cambio de variable $u = \cos\theta$, la expresión (13) toma la forma

$$V_T(h) = V_T'(h) + V_T^{(n)}(h), \tag{16}$$

$$V_T'(h) = -\int_0^R dr\, r^2 \int_{-1}^{1} \frac{2\pi mG\rho_T\, du}{\sqrt{F(r,u)}}, \tag{17}$$

$$V_T^{(n)}(h) = -\int_0^R dr\, r^2 \int_{-1}^{1} \frac{2\pi mG\rho_T(n+1)!L^{n+2}\, du}{[F(r,u)]^{(3+n)/2}}. \tag{18}$$

Para $V_T'(h)$ se tiene que

$$V_T'(h) = \frac{2}{3}\frac{R^3 2\pi G\rho_T m}{R+h}, \tag{19}$$

mientras que para $n = 1,2,4$ se obtiene

$$\begin{aligned} V_T^{(1)}(h) &= -8\pi G\rho_T L^3 m\left[\frac{1}{4h}-\frac{1}{4(2R+h)}\right. \\ &\quad \left. +\frac{1}{4(R+h)}\ln\left(\frac{h}{2R+h}\right)\right], \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} V_T^{(2)}(h) &= \frac{8\pi G\rho_T L^4 m}{(R+h)}\left[\frac{R(R+h)^2}{h^2(2R+h)^2}\right. \\ &\quad \left. -\frac{R}{h(2R+h)}\right], \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} V_T^{(n>2)}(h) &= -\frac{2\pi G\rho_T(n+1)!L^{2+n}m}{(n+1)(n-3)(n-2)}\left[\frac{h+(n-1)R}{(2R+h)^{n-1}}\right. \\ &\quad \left. -\frac{h+(3-n)R}{(R+h)h^{n-2}}\right]. \end{aligned} \tag{22}$$

Usando las relaciones $M = 4\pi R^3\rho_T/3$, $g = GM/R^2$ y realizando un desarrollo de Taylor para $h/R \ll 1$, las ecuaciones (19)-(22) pueden escribirse como

$$V_T'(h) \approx -mgR + mgh - \frac{mgh^2}{R}, \tag{23}$$

$$\begin{aligned} V_T^{(1)}(h) &\approx \frac{3mgL^3}{4R^2}(1+2\ln 2) - \frac{3mgL^3}{2R}\frac{1}{h} \\ &\quad -\frac{3mgL^3}{2R^2}\ln\left(\frac{h}{R}\right), \end{aligned} \tag{24}$$

$$V_T^{(2)}(h) \approx \frac{33mgL^4}{8R^3} + \frac{3mgL^4}{2R}\frac{1}{h^2} - \frac{3mgL^4}{R^2}\frac{1}{h}, \tag{25}$$

$$\begin{aligned} V_T^{(n>2)}(h) &\approx \frac{3mg(n+1)!L^{2+n}}{2R(n+1)(n-2)}\left(-\frac{n-1}{2^{n-1}R^{n-1}}\right. \\ &\quad \left. -\frac{1-\frac{1}{2}(n-1)^2}{2^{n-1}R^{n-2}}h + \frac{1}{h^{n-2}}\right). \end{aligned} \tag{26}$$

De este resultado se puede observar que las correcciones son inversamente proporcionales al radio de la Tierra $\sim 1/R^n$, por lo que las contribuciones más relevantes son aquellas $\sim 1/R$, de esta forma, se tiene

$$\begin{aligned} V'_T(h) &\approx mgh\,, & (27)\\ V_T^{(1)}(h) &\approx -\frac{3mgL^3}{2R}\frac{1}{h} & (28)\\ V_T^{(2)}(h) &\approx \frac{3mgL^4}{2R}\frac{1}{h^2}\,, & (29)\\ V_T^{(n>2)}(h) &\approx \frac{3mg(n+1)!L^{2+n}}{2R(n+1)(n-2)}\frac{1}{h^{n-2}}\,. & (30)\end{aligned}$$

Donde los términos constantes se han omitido, debido a que no contribuyen al resultado global.

2.3. Interacción placa-partícula

La placa puede considerarse como un disco de radio R^* y altura L^*, cuya densidad es ρ_P. Por las dimensiones de la partícula, la placa puede considerarse como un plano infinito, es decir, un disco con un radio infinito.

De acuerdo al origen de coordenadas elegido, los vectores de posición de la partícula y de un elemento diferencial de la placa toman la siguiente forma

$$\begin{aligned} \vec{r} &= h\hat{k}\,, & (31)\\ \vec{r}\,' &= r\hat{r} + z\hat{k}\,. & (32)\end{aligned}$$

Nuevamente, el potencial entre un elemento diferencial del disco y la partícula puntual se expresa en coordenadas cilíndricas como

$$\begin{aligned} dV_P(h) &= -\frac{mG\rho_P}{\sqrt{r^2+(h-z)^2}}dv' \\ &\quad -\frac{mG\rho_P(n+1)!L^{n+2}}{\left[r^2+(h-z)^2\right]^{(3+n)/2}}dv'\,. & (33)\end{aligned}$$

Entonces, el potencial total se expresa como

$$\begin{aligned} V_P &= V'_P(h) + V_P^{(n)}(h)\,, & (34)\\ V'_P &= -\int_0^{2\pi}d\phi\int_{-L^*}^{0}dz\int_0^{R^*}\frac{mG\rho_P\, r}{\sqrt{r^2+(h-z)^2}}dr\,, & (35)\\ V_P^{(n)} &= -\int_0^{2\pi}d\phi\int_{-L^*}^{0}dz\int_0^{R^*}\frac{mG\rho_P(n+1)!L^{n+2}\, r}{\left[r^2+(h-z)^2\right]^{(3+n)/2}}dr\,, & (36)\end{aligned}$$

aquí R^* se considera muy grande pero finito, para evitar divergencias en las integrales. Después de haber realizado las integrales en las variables r y ϕ en (35) y (36), las integrales en z proporcionan los siguientes resultados

$$\begin{aligned} V_P(h) &= V'_P(h) + V_P^{(n)}\,, & (37)\\ V'_P(h) &= \frac{mG\rho_P L^*(L^*+2h)}{2}\,, & (38)\\ V_P^{(n)}(h) &= -\frac{2\pi mG\rho_P(n+1)!L^{n+2}}{n+1} \\ &\quad \times\left[\frac{1}{n(h+L^*)^n} - \frac{1}{nh^n}\right], & (39)\end{aligned}$$

donde los términos que contienen R^* han sido suprimidos. Usando nuevamente las relaciones $M = 4\pi R^3\rho_T/3$, $g = GM/R^2$ y realizando un desarrollo de Taylor para $h/L^* \ll 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} V'_P(h) &\approx \frac{3mg\rho L^* h}{2R}\,, & (40)\\ V_P^{(n)}(h) &\approx -\frac{3mg\rho(n+1)!L^{n+2}}{2Rn(n+1)}\frac{1}{h^n}\,, & (41)\end{aligned}$$

con $\rho = \rho_P/\rho_T$.

3. Espectro modificado del pozo cuántico gravitacional

Combinando las correcciones provenientes de mundos brana (27)-(30), (40) y (41), se obtiene el potencial efectivo

$$\begin{aligned} V_{efvo}(z) &= mgz + \frac{3mg\rho L^* z}{2R} + V_T^{(n)}(z) + V_P^{(n)}(z)\,, \\ &\approx mgz + U(z), \quad U(z) = V_T^{(n)} + V_P^{(n)}\,, & (42)\end{aligned}$$

donde se ha considerado que $V'_T(z) \ll V'_P(z)$ $(L^* \ll R)$.

De esta forma, el pozo cuántico gravitacional en el contexto de mundos brana es dado por

$$\begin{aligned} H\phi(z) &= E\phi(z), \quad H = \frac{p^2}{2m} + mgz + U(z)\,, & (43)\\ H &= H_0 + \delta H, \quad \delta H = U(z)\,.\,. & (44)\end{aligned}$$

El espectro de energías de (43), se puede calcular usando teoría de perturbaciones a primer orden (dado que $L^* \ll R$). Así entonces, se tiene

$$\begin{aligned} E_\nu &= E_{0\nu} + \Delta E_n\,, & (45)\\ \Delta E_\nu &= \int_0^\infty \psi_\nu^2(z)U(z)\,dz\,, & (46)\end{aligned}$$

con $\psi_\nu(z)$ dado por (3).

De acuerdo a la definición de $U(z) = V_T^{(n)} + V_P^{(n)}$ y a la ecuación (45), los valores de energía E_ν sufren un decremento comparado con los niveles de energía $E_{0\nu}$ (puesto que $\Delta E_\nu < 0$) y por lo tanto las alturas críticas h_ν sufrirán un decremento también, comparadas con $h_{0\nu}$.

Entonces, en el efecto de las dimensiones extras en las alturas críticas a la cual la partícula con energía E_ν pueden rebotar, son dadas por

$$h_\nu = \frac{E_\nu}{mg} = h_{0\nu} + \frac{1}{mg}\int_0^\infty \psi_\nu^2(z)U(z)\,dz\,. \quad (47)$$

Calculando la diferencia de alturas entre los dos primeros estados cuánticos se obtiene

$$\begin{aligned} \delta^{\mathrm{DE}} &= h_2 - h_1 = h_{02} - h_{01} + \Omega = 10{,}3\,\mu m + \Omega\,, & (48)\\ \Omega &= \frac{1}{mg}\left[\int_0^\infty \left\{\psi_2^2(z) - \psi_1^2(z)\right\} U(z)\,dz\right]. & (49)\end{aligned}$$

Comparando (48) con el valor experimental

$$\delta^{\mathrm{E}} = 9{,}4\,\mu m \pm 5{,}4\,\mu m\,. \quad (50)$$

Se requiere que

$$|\Omega| \leq 4{,}5\,\mu m\,. \quad (51)$$

Usando (44), (49) en (51) se tiene

$$L \leq \begin{cases} \left[\frac{4{,}5\mu m}{|\Omega_1|}\right]^{1/3} = 60{,}5648\,mm, & n = 1\,, \\ \left[\frac{4{,}5\mu m}{|\Omega_2|}\right]^{1/4} = 5{,}7511\,mm, & n = 2\,, \end{cases} \quad (52)$$

donde

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= -\int_0^\infty \left\{\psi_2^2(z) - \psi_1^2(z)\right\}\frac{3}{Rz}\,dz\,, & (53)\\ \Omega_2 &= -\int_0^\infty \left\{\psi_2^2(z) - \psi_1^2(z)\right\}\frac{3}{Rz^2}\,dz\,. & (54)\end{aligned}$$

Para obtener los valores numéricos a las cotas del parámetro L dados en (52) se han considerado $R = 6378\,km$, $m = 939\,MeV/c^2$, $g = 9{,}81\,m/s^2$, $L^* = 10\,cm$ y $\rho = 1$ (donde por simplicidad se ha considerado que la placa tenga una densidad similar al de la Tierra).

Para $n \geq 4$, las cantidades Ω son divergentes, debido a que $\psi^2_{1,2} \sim z^2$ (para z muy cercanos a cero), mientras que el potencial $U(z) \sim 1/z^n$, es decir, un potencial más singular que $1/z^2$ no puede admitir estados ligados. Por lo cual, solo podemos obtener cotas para L, en los casos en que $n = 1, 2$.

4. Conclusiones

En este trabajo se estudiaron las correcciones $1/r^{n+2}$ al potencial Newtoniano provenientes de escenarios de mundos brana, en el espectro de energías del pozo cuántico gravitacional. Como punto de partida, se calculó el potencial gravitacional efectivo que actúa sobre una partícula puntual. Para ello, se consideró la interacción entre una partícula puntual y la Tierra, así como también, la interacción entre la partícula y una placa densa.

Como se muestra en (45) y (47), el espectro de energías y las alturas críticas del pozo cuántico gravitacional son afectados por estas correcciones. Particularmente, las alturas críticas obtenidas al considerar el efecto de las dimensiones extras sufren una reducción en comparación con las alturas $h_{0\nu}$.

Comparando los resultados obtenidos al calcular la diferencia de alturas δ^{DE} (48) con los datos experimentales (50) obtenidos del experimento GRANIT, se obtiene una cota para la escala del escenario de dimensiones extras L, como se muestra en (52).

Las cotas obtenidas para L, están lejos de ser tan precisas, como las derivadas en el marco de los modelos de dimensiones extras a altas energías. Esto se debe al hecho de que los potenciales efectivos son inversamente proporcionales al radio de la Tierra R, por lo que las correcciones provenientes del escenario son muy pequeñas en todos los casos.

Finalmente, esperamos que el problema del pozo cuántico gravitacional en presencia de dimensiones extras pueda servir como material de apoyo en los cursos de mecánica cuántica.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias al apoyo de PRODEP, proyecto UAEH-CA-108.

Referencias

Bertolami, O., Rosa, J. G., de Aragao, C. M. L., Castorina, P., and Zappala, D. (2005). Noncommutative gravitational quantum well. *Phys. Rev. D*, 72:025010.

Bhat, A., Dey, S., Faizal, M., Hou, C., and Zhao, Q. (2017). Modification of Schrödinger–Newton equation due to braneworld models with minimal length. *Phys. Lett. B*, 770:325–330.

Brau, F. and Buisseret, F. (2006). Minimal Length Uncertainty Relation and gravitational quantum well. *Phys. Rev. D*, 74:036002.

Buisseret, F., Mathieu, V., and Silvestre-Brac, B. (2007). Modified Newton's law, braneworlds, and the gravitational quantum well. *Class. Quant. Grav.*, 24:855–866.

Castorina, P., Iorio, A., and Malinský, M. (2018). Effects of ultra-light dark matter on the gravitational quantum well. *Int. J. Mod. Phys. D*, 27(09):1850098.

Flügge, S., editor (1999). *Practical Quantum Mechanics*. Springer Verlag, Berlin.

Ito, M. (2002). Newton's law in brane worlds with an infinite extra dimension. *Phys. Lett. B*, 528:269–273.

Lawson, L., Gouba, L., and Avossevou, G. Y. (2017). Two-dimensional Noncommutative Gravitational Quantum Well. *J. Phys. A*, 50(47):475202.

Nesvizhevsky, V. V. et al. (2003). Measurement of quantum states of neutrons in the earth's gravitational field. *Phys. Rev. D*, 67:102002.

Nesvizhevsky, V. V. et al. (2005). Study of the neutron quantum states in the gravity field. *Eur. Phys. J. C*, 40:479–491.

Nesvizhevsky, V. V. and Protasov, K. V. (2004). Constraints on nonNewtonian gravity from the experiment on neutron quantum states in the earth's gravitational field. *Class. Quant. Grav.*, 21:4557–4566.

Roulier, D., Vezzu, F., Baessler, S., Clément, B., Morton, D., Nesvizhevsky, V., Pignol, G., and Rebreyend, D. (2015). Status of the GRANIT facility. *Adv. High Energy Phys.*, 2015:730437.