

## Observador robusto de orden reducido aplicado a un biodigestor Robust reduced-order observer applied to a biodigester

E. D. Tamayo-Roman <sup>a,\*</sup>, J. P. Ordaz-Oliver <sup>a</sup>, P. A. López-Pérez <sup>b</sup>, I. González-Viveros <sup>a</sup>, J. L. Hernández-Hernández <sup>a</sup>

<sup>a</sup> Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Mineral de la Reforma, Hidalgo C.P. 42184.

<sup>b</sup> Escuela Superior de Apan, Apan Hidalgo C.P. 43900.

### Resumen

Este trabajo aborda el problema de observación de estado para la dinámica no lineal de un biodigestor donde la variación paramétrica e incertidumbres dentro de su comportamiento se encuentra presente debido al entorno de operación del sistema. El desarrollo propuesto considera una separación entre variables medibles y no medibles mediante una transformación, además mediante el uso de LMI se concluye con el concepto de Estabilidad Última Uniformemente Acotada sobre el error de estimación. Para ello se diseña una función de observación que considera al error de estimación asociado a las variables de estado que no son cuantificadas en línea. La reconstrucción de las variables no disponibles es realizada mediante la solución de una desigualdad matricial lineal. Para demostrar el funcionamiento del observador el algoritmo es aplicado en un biodigestor que contiene variaciones paramétricas en el bioproceso de producción de biogas.

*Palabras Clave:* Observador Robusto, Transformación no-singular, Orden reducido, Biodigestor

### Abstract

This work described the state observation problem for the nonlinear dynamics of a biodigester where parametric variation and uncertainties in its behavior are present due to the operating environment of the system. The proposed development considers a separation between measurable and non-measurable variables by means of a transformation, also by using LMI it is concluded the concept of Uniformly Bounded Ultimate Stability on the estimation error. For this purpose, an observation function is designed that considers the estimation error associated to the state variables that are not quantified online. The reconstruction of the unavailable variables is performed by solving a linear matrix inequality. To demonstrate the performance of the observer, the algorithm is applied to a biodigester containing parametric variations in the bioprocess of biogas production.

*Keywords:* Robust Observer, Non-singular transformation, Reduced observer, Biodigester

## 1. Introducción

Una de las necesidades principales de la humanidad (después de la alimentación), es generar fuentes de energía en sus diferentes estados (líquida, sólida, gaseosa); aunado a esto, y por la creciente demanda de energías limpias, se considera necesario e indispensable, que los métodos utilizados para su generación sea lo menos tóxica y contaminante para el medio, dando paso con estos principios de búsqueda, a las energías renovables (Gasca, 2013).

Existe una amplia variedad y métodos que actualmente se desarrollan para la obtención de energías limpias, en su mayoría esos procedimientos son costosos al procurar su funcionamiento y mantenimiento (Guevara, 2014).

La digestión anaerobia (DA) (Rao et al., 2010) es considerada viable y factible para la generación de energía por sobre otros. La DA un proceso de fermentación natural sin oxígeno donde material biodegradable, llamado sustrato, es transformado por microorganismos (conocidos como biomasa) a una mezcla de gases (biogás). La implementación de estos sistemas en su mayoría no son costosos y poseen amplia versatilidad de instalación considerando que trabajan con desechos orgánicos, materia que abunda en la naturaleza.

El principal resultado de interés en la DA es la generación de biogas, (Sonnenenergie DGf, 2005), este tiene muchas utilidades como sustituir el combustible en motores de combustión interna (Weiland, 2010), hasta remplazar el gas para actividades

\* Autor para correspondencia: elmer.david@hotmail.com

**Correo electrónico:** elmer.david@hotmail.com (E. D. Tamayo-Roman), jesus\_ordaz@uaeh.edu.mx (J. P. Ordaz Oliver), pablo\_lopez@uaeh.edu.mx (P. A. López-Pérez), go263785@uaeh.edu.mx (I. González-Viveros), he257579@uaeh.edu.mx (J. L. Hernández-Hernández).

**Historial del manuscrito:** recibido el 08/04/2022, última versión-revisada recibida el 18/07/2022, aceptado el 02/08/2022, publicado el 31/08/2022. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v10iEspecial3.8971>



comunes del hogar como (calefacción, cocción de alimentos, etc). Uno de los inconvenientes que surgen en este proceso es que poseen un comportamiento no lineal e inestable, por lo que el proceso de monitoreo se complica y a su vez la optimización del sistema (Sbarciog et al., 2010). Es por ello que se considera la implementación de observadores de estado, para estimar las variables de estado que son fundamentales y que de manera sencilla sería complicado cuantificar en línea.

El comportamiento de sistemas biológicos analizados por medio de herramientas matemáticas (observadores de estado) o digitales (Soft-Sensores), actualmente no cuentan con la precisión y desempeño esperados en el monitoreo de biodigestores, porque las incertidumbres paramétricas en el sistema hacen necesario generar un reajuste (manual o automático) en el algoritmo diseñado para el seguimiento de la planta. Estos ajustes pocas veces se realizan en línea y para aquellas plantas en donde el procedimiento se efectúa de manera automática se posee un lapso muy corto de tiempo por lo que en la mayoría de las ocasiones la calibración es de manera manual.

Es necesario una herramienta que sea capaz de adaptarse de manera automática y con un amplio grado de autoajuste a las dinámicas, incertidumbres y variaciones paramétricas presentadas en el biorreactor, por lo que se propone un observador robusto de orden reducido que acepte un amplio rango de variaciones paramétricas en el sistema analizado y a su vez disminuya de manera automática el error de observación del sistema real y el estimado. El observador robusto de orden reducido es utilizado para monitorizar los gases que son el resultado de la DA, como  $CO_2$  y  $CH_4$  para estimar las variables de estado sustrato y biomasa que no se pueden cuantificar en línea en el biodigestor. El observador propuesto cuenta con el desempeño necesario para ser considerados en el análisis de sistemas DA.

## 2. Descripción el sistema (Modelo biológico)

Un biodigestor en su forma simple es un contenedor (llamado reactor), donde se realiza el proceso de cultivo (comúnmente denominado fermentador), sea en estado sólido o líquido. Su diseño debe ser tal que asegure homogeneidad entre los componentes del sistema y condiciones óptimas para el crecimiento microbiano y generación del producto deseado, en este caso, la obtención de biogás y sus derivados representadas en Tabla 1, reportadas en (Sonnenenergie DGf, 2005). Las características más utilizadas en biodigestores a nivel industrial están provistos de mecanismos de agitación, dispersión y aireación así como de sistemas para el control de la temperatura, pH entre otros (Ruíz-Leza et al., 2007),

Tabla 1: Composición de Biogás

Componente	Porcentaje
Metano ( $CH_4$ )	50 a 80
Anhidro carbónico ( $CO_2$ )	20 a 50
Nitrógeno ( $H_2$ )	< 1
Amoniaco ( $NH_3$ )	< 1
Sulfuro de hidrógeno ( $H_2S$ )	< 1

En función de los flujos de entrada y salida, el funcionamiento de un biodigestor puede operar de manera : discontinua

(batch), semicontinua (fed-batch) o continua (quimiostato). Por las particularidades de este último es que se propone desarrollar un observador robusto de orden reducido. Además, es el tipo de digestor más usado en el medio rural, cuando se trata de digestores pequeños para uso doméstico. Los diseños más populares son el hindú y el chino. Entre los de tipo hindú existen varios diseños, pero en general son verticales y enterrados. Se cargan por gravedad una vez al día, con un volumen de mezcla que depende del tiempo de fermentación o retención y producen una cantidad diaria más o menos constante de biogás si se mantienen las condiciones de operación, que son las presentadas en la siguiente Tabla 2.

Tabla 2: Operación de Biodigestor

Condiciones de operación	Parámetros
Relación de C/N	0.20, 1-30:1
Temperatura	22 a 42 °C
pH	6.06 - 7.22
Sólidos Volátiles	7-12 %
Tiempo Retención	15-27 días

### 2.1. Modelo matemático

El modelo matemático que es usado en el análisis y estudio de este trabajo de investigación parte del reporte de IWA sobre la base cinética del modelo de digestión anaerobia ADM1 (Anaerobic Digestion Model No.1), (Batstone et al., 2002).

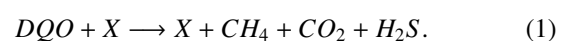
#### 2.1.1. ADM1

El ADM1 es un modelo matemático generalizado para la digestión anaerobia que describen los procesos bioquímicos y fisicoquímicos que ocurren en un biodigestor. Los procesos bioquímicos incluyen la desintegración de partículas homogéneas a carbohidratos, proteínas y lípidos; hidrólisis extracelular de estos sustratos particulados a azúcares, aminoácidos y ácidos grasos de cadena larga (LCFA), respectivamente; acidogénesis de azúcares y aminoácidos a ácidos grasos volátiles (VFA) e hidrógeno; acetogénesis de LCFA y VFA a acetato; y separar los pasos de metanogénesis del acetato y el hidrógeno /  $CO_2$ . Las ecuaciones fisicoquímicas describen la asociación y disociación de iones, y la transferencia gas-líquido. El sistema de DA esta integrado por un conjunto de ecuaciones diferenciales algebraicas (EDA), 26 variables de estado dinámico y 8 variables algebraicas implícitas por reactor o elemento. Implementado como ecuaciones diferenciales, hay 32 variables de estado en las dinámicas de concentración (Batstone et al., 2002). Para esto se tomaron en cuenta 56 parámetros estequiométricos y cinéticos relativos para procesos biológicos, 24 componentes y se asumieron 19 procesos (Jeong et al., 2005).

El ADM1 es un modelo general, así que se generó un modelo de orden reducido para la dinámica y ecuaciones que intervienen, esto con la finalidad de desarrollar el trabajo de manera mas específica.

#### 2.1.2. Desarrollo del modelo

Las reacciones físico-químicas dentro del biodigestor, se representan en (1)



Se agrega la cinética de reacción que describe el cambio dentro del biodigestor, dado por una ecuación de inhibición modificada en (2).

$$\mu_{max} = \left[ K_{max} \frac{S}{K_s + S + K_i} X \right]^{1.1}. \quad (2)$$

En (2) se encuentra la representación de un modelo matemático de inhibición que describe el crecimiento de los microorganismos en un medio acuoso limitado por el sustrato suministrado, también es llamada ecuación de Monod (Torres, 1996), con los siguientes parámetros:

- $K_{max}$  = Constante de degradación del sustrato.
- $K_s$  = Coeficiente de masa en medio acuoso del sustrato.
- $K_i$  = Factor de inhibición.
- $X$  = Concentración de la biomasa.

Para representar la dinámica del biodigestor (sistema-planta), por ejemplo el sustrato, se considera un balance de materia en el biodigestor considerando la cinética (2), tasa de dilución  $D$  y la diferencia, esto se expresa como :

$$\frac{dS}{dt} = \text{Término cinético del consumo de sustrato} + \text{Término de operación del biodigestor}. \quad (3)$$

La metodología utilizada en (3), es aplicada a las variables de estado restantes ( $X, CH_4, CO_2$ ) (biomasa, metano y dióxido de carbono respectivamente) resultando en :

$$\frac{dS}{dt} = - \left( \frac{\mu_{max}}{Y_{sx}} \right) + D(S_0 - S), \quad (4)$$

$$\frac{dX}{dt} = \left( \frac{\mu_{max}}{Y_{xs}} \right) - F_d X - DX, \quad (5)$$

$$\frac{dCO_2}{dt} = \mu_{max} Y_{xco_2} CO_2^\beta - DCO_2, \quad (6)$$

$$\frac{dCH_4}{dt} = \mu_{max} Y_{xch_4} CH_4^\alpha - DCH_4. \quad (7)$$

donde:

- $\frac{dS}{dt}$  = Dinámica de sustrato.
- $\mu_{max}$  = Tasa de crecimiento específica.
- $Y_{sx}$  = Rendimiento de sustrato sobre biomasa.
- $Y_{xs}$  = Rendimiento de biomasa sobre sustrato.
- $D$  = Tasa de dilución.
- $Y_{xco_2}$  = Rendimiento de dióxido de carbono respecto a biomasa.
- $Y_{xch_4}$  = Rendimiento de metano respecto a biomasa.
- $\alpha$  = Constante de comportamiento.
- $\beta$  = Constante de comportamiento.

## 2.2. Ajuste al modelo del biodigestor

Las ecuaciones diferenciales que representan la dinámica del biodigestor (4, 5, 6 y 7), son ajustadas, la finalidad es mejorar el comportamiento de la dinámica del sistema en tiempo real para aplicar el observador robusto de orden reducido. Las modificaciones se basan considerando las reacciones bioquímicas, balance de materia e igualación entre la demanda química de oxígeno y el sustrato  $DQO = S$  tal que :



por lo que ahora las ecuaciones (4) a (7) quedan como :

$$\frac{dS}{dt} = - \left[ \frac{\left( K_{max} \frac{S}{K_s + S + K_i} X \right)^{1.1}}{Y_{sx}} \right] + D(S_0 - S), \quad (9)$$

$$\frac{dX}{dt} = \left[ \frac{\left( K_{max} \frac{S}{K_s + S + K_i} X \right)^{1.1}}{Y_{sx}} \right] - F_d X - DX, \quad (10)$$

$$\frac{dCO_2}{dt} = \left( K_{max} \frac{S}{K_s + S + K_i} X \right)^{1.1} Y_{xco_2} CO_2^\beta - DCO_2, \quad (11)$$

$$\frac{dCH_4}{dt} = \left( K_{max} \frac{S}{K_s + S + K_i} X \right)^{1.1} Y_{xch_4} CH_4^\alpha X - DCH_4. \quad (12)$$

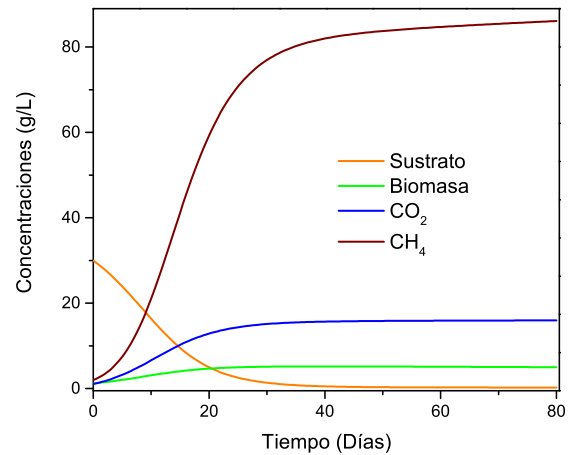


Figura 1: Funcionamiento del biodigestor en 80 días.

## 2.3. Simulación de funcionamiento basado en comportamientos experimentales (C.I de operación)

Los parámetros utilizados para la simulación del comportamiento de la planta (biodigestor) y las condiciones iniciales de operación (C.I) se encuentran reportados en la bibliografía, estos datos se presentan en las Tablas 4 y 5 respectivamente. Se utilizó el solver *ode43* del Software Matlab<sup>TM</sup> para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales que representan la dinámica de la planta de lo que se obtuvo la representación encontrada en la Figura 1. Tanto el funcionamiento del observador robusto de orden reducido como el comportamiento de la dinámica de la planta son mediante simulación, por ello en la sección

de resultados obtenidos en la Figura 3 y Figura 4 al mencionar "planta real", nos referimos a los datos obtenidos mediante la simulación (Abu-Reesh, 2014), (Chan et al., 2017).

### 2.3.1. Valores en estado estacionario

Los valores en estado estacionario que se utilizan para la linealización se presentan en la Tabla 3:

VARIABLES DE ESTADO O TASA DE DILUCIÓN	VALOR
S(Sustrato)	1.873 (g/L)
X(Biomasa)	4.867 (g/L)
CO <sub>2</sub> (Dióxido de carbono)	14.89 (g/L)
CH <sub>4</sub> (Metano)	75.61 (g/L)
D (Dilución)	0.001 d <sup>-1</sup>

### 2.4. Linealización por expansión en series de Taylor

La aproximación lineal es dada por los términos de primer orden obtenidos por la expansión en series de Taylor (Genocchi, 1884), tal que el sistema (13):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \\ y &= h(x). \end{aligned} \quad (13)$$

donde  $x \in \mathfrak{X}^n$ ,  $f: \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{X}^n$  es una función no lineal,  $u \in \mathfrak{X}^m$  es el control,  $y \in \mathfrak{Y}^p$  es la salida,  $h: \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{Y}^p$  es una función no lineal, así  $x_{op} \in \mathfrak{X}^n$  representa los valores de las variables de estado y  $u_{op} \in \mathfrak{X}$  la entrada actual del sistema, ambos en un punto de operación.

$$A = \left. \frac{df(\cdot)}{dx} \right|_{x_{op}, u_{op}}, \quad (A \in \mathfrak{R}^{n \times n}), \quad (14)$$

$$B = \left. \frac{df(\cdot)}{du} \right|_{x_{op}, u_{op}}, \quad (B \in \mathfrak{R}^{n \times m}), \quad (15)$$

$$C = \left. \frac{dh(\cdot)}{dx} \right|_{x_{op}, u_{op}}, \quad (C \in \mathfrak{R}^{p \times n}). \quad (16)$$

Considerando las ecuaciones (10) a (12) la aproximación por serie de Taylor descrito anteriormente se define como :

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad y = Cx. \quad (17)$$

Para aplicar la linealización por el teorema de Taylor en (10) a (12) se toma como punto de operación a  $\bar{x}$  y  $\bar{u}$ , valores en estado estacionario y tasa de dilución (D) que se encuentran en la Tabla 3 y Tabla 4 respectivamente. Los valores en estado estacionario que se consideran nos permiten obtener las matrices  $A$  y  $B$  considerando las mismas C.I. utilizadas en la Tabla 5. Al analizar la ubicación de los valores propios del sistema resultante se define que la matriz de estado es estable.  $A$  y  $B$  quedan expresadas como :

$$A = \begin{bmatrix} -0.1339 & -0.0083 & 0 & 0 \\ 0.0189 & -0.0007 & 0 & 0 \\ 0.0845 & 0.0053 & -0.0005 & -0.0005 \\ 0.6880 & 0.0824 & 0 & -0.0005 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$B = \begin{bmatrix} 29.6764 \\ -5.1670 \\ -15.85 \\ -83.76 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

La matriz  $C$  esta compuesta por la medición de  $CO_2$  y  $CH_4$ , de esta manera el rango de la matriz de observabilidad  $O$  es completo y todas las variables de estado del sistema son observables, las presentamos a continuación:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.0845 & 0.0053 & -0.0005 & 0 \\ 0.6880 & 0.0824 & 0 & -0.0005 \\ -0.0113 & -0.0007 & 0 & 0 \\ -0.0909 & -0.0058 & 0 & 0 \\ 0.0015 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0.0121 & 0.0008 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

La matriz de observabilidad (21) es de rango completo por lo que se dice que el sistema es observable.

## 3. Observador robusto de orden reducido

### 3.1. Transformación No singular

Considerando que en la dinámica lineal (17) no tenemos todo el estado disponible, las variables de estado no medibles se tendrán que reconstruir, para ello se representa al sistema de manera que se separa la parte medible de la parte no medible. Esto se realiza por medio de la siguiente transformación:

$$z = \Gamma x \rightarrow \dot{z} = \Gamma A x + \Gamma B u. \quad (22)$$

Note que  $x$  se determina en términos de  $z$  por lo que tenemos  $x = \Gamma^{-1}z$ , al remplazar tal transformación, obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \Gamma A \Gamma^{-1} z + \Gamma B u, \\ y &= C \Gamma^{-1} z. \end{aligned} \quad (23)$$

La matriz de transformación  $\Gamma$  se construye a partir de  $C$  y su espacio nulo  $N_c$ , por tanto:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} C \\ N_c^T \end{bmatrix} \rightarrow y = C \Gamma^{-1} z = z_1. \quad (24)$$

Realizando una asignación de coeficientes sobre (24) obtenemos  $\mathcal{A} = \Gamma A \Gamma^{-1}$ ,  $\mathcal{B} = \Gamma B$  y  $C = C \Gamma^{-1}$ , entonces el sistema expresado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \mathcal{A}z + \mathcal{B}u, \\ y &= Cz. \end{aligned} \quad (25)$$

Ahora consideramos de (25) donde  $C = [I \quad 0] = z_1$  separando con esto los estados medibles de los que no podemos medir.

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

De (25) tenemos  $z_1 \in \mathfrak{R}^p$  y  $z_2 \in \mathfrak{R}^{n-p}$ , teniendo las dinámicas separadas de la siguiente manera:

$$\dot{z}_1 = \mathcal{A}_{11}z_1 + \mathcal{A}_{12}z_2 + \mathcal{B}_1u, \quad (27)$$

Tabla 4: Parámetros de operación y del modelo

Parámetro	Descripción	Rango literatura	Utilizado	Referencias bibliográficas
$K_s$	Coefficiente masa en medio acuoso de $S$	$150 \mp 15$ g/L	150 g/L	(Fedailaine et al., 2015)
$K_i$	Factor de inhibición	$50 \mp 15$ g/L	50 g/L	(Fedailaine et al., 2015)
$F_d$		$0.009 \mp 0.0019$ $d^{-1}$	$0.0009$ $d^{-1}$	(Fedailaine et al., 2015)
$S_o$	Sustrato inicial	30 g/L	30 g/L	(López-Pérez et al., 2013)
$Y_{sx}$	Rendimiento de sustrato sobre biomasa	$0.426 \mp 0.21$	0.426	(Fedailaine et al., 2015)
$D$	Tasa de dilución	$0.001$ $d^{-1}$	$0.001$ $d^{-1}$	(Pérez et al., 2013)
$\alpha$	Constante comportamiento	$0.29 \mp 0.18$	0.29	(Fedailaine et al., 2015)
$\beta$	Constante comportamiento	$0.20 \mp 0.09$	0.20	(Fedailaine et al., 2015)
$Y_{xco_2}$	Rendimiento de $CO_2$ respecto a $X$	0.67	0.67	(Fedailaine et al., 2015)
$Y_{xch_4}$	Rendimiento de $CH_4$ respecto a $X$	0.78	0.97	(Fedailaine et al., 2015)
$\mu_{max}$	Tasa de crecimiento específica	0.23 g/Ld	$0.1 - 1.5$ $d^{-1}$	(Fedailaine et al., 2015)

Tabla 5: Condiciones iniciales y de operación utilizadas

Variable	Representación	C.I Literatura	C.I. utilizada	Bibliografía
Sustrato	$S$	4-25 g/L	30 g/L	(Fedailaine et al., 2015)
Biomasa	$X$	1.2 g/L	2-12 g/L	(Fedailaine et al., 2015), (López-Pérez et al., 2016)
Dióxido de carbono	$CO_2$	1.83-55.5g/L	1.1 g/L	(Fedailaine et al., 2015), (Kazemi et al., 2020) (Bernard et al., 2000)
Metano	$CH_4$	0.16 g/L - 80.4 g/L	2 g/L	(Fedailaine et al., 2015) (Bernard et al., 2000)

$$\dot{z}_2 = \mathcal{A}_{21}z_1 + \mathcal{A}_{22}z_2 + \mathcal{B}_2u.$$

Deseamos reconstruir la variable  $z_2$  ya que no podemos medirla directamente, por lo que a partir de valores conocidos ( $z_1$ ) y un valor estimado en  $\hat{z}_2$  reconstruiremos a  $z_2$ . Realizando el remplazo correspondiente a ello usaremos a la variable  $\psi$  (28), para determinar esta aproximación de variables.

$$\psi = \hat{z}_2 - Ly \rightarrow \hat{z}_2 = \psi + Lz_1. \quad (28)$$

Considerando a  $\phi$  en (28) la dinámica  $\dot{\psi}$  queda expresado como  $\dot{\psi} = Q\psi + Ry + Su$ , siendo  $Q$ ,  $R$ , y  $S$  ganancias que se proponen para este sistema. Con base a lo anterior, expresamos el error  $e_2$ , en el que se relaciona a  $z_2$  y  $\hat{z}_2$  de la siguiente manera:

$$e_2 = z_2 - \hat{z}_2. \quad (29)$$

Al igual que la dinámica del error en (30):

$$\dot{e}_2 = \dot{z}_2 - \dot{\hat{z}}_2. \quad (30)$$

Queda definida entonces  $\dot{\hat{z}}_2$  considerando a  $\phi$  y su dinámica  $\dot{\phi}$  de (28) en (31):

$$\dot{\hat{z}}_2 = Q(\hat{z}_2 - Lz_1) + Rz_1 + Su + L(\mathcal{A}_{11}z_1 + \mathcal{A}_{12}z_2 + \mathcal{B}_1u). \quad (31)$$

La dinámica de  $\dot{z}_2$  se encuentra en (27) y utilizando a (31) para remplazar la expresión que refleja la dinámica del error  $\dot{e}_2$  en (30), tenemos (32) :

$$\dot{e}_2 = (\mathcal{A}_{21} + QL - R - L\mathcal{A}_{11})z_1 + (\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12})z_2 + (\mathcal{B}_2 - S - L\mathcal{B}_1)u - Q\hat{z}_2. \quad (32)$$

Es necesario agregar el error  $e_2$  dentro del sistema (32) sin alterar la igualdad, esto lo conseguimos agregando el término

$Qz_1 - Qz_1$ , quedando entonces  $e_2$  como :

$$\dot{e}_2 = (\mathcal{A}_{21} + QL - R - L\mathcal{A}_{11})z_1 + (\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12})z_2 + (\mathcal{B}_2 - S - L\mathcal{B}_1)u - Q\hat{z}_2 + Qz_1 - Qz_1. \quad (33)$$

Factorizando a (33), tenemos :

$$\dot{e}_2 = (\mathcal{A}_{21} + QL - R - L\mathcal{A}_{11})z_1 + (\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12} - Q)z_2 + (\mathcal{B}_2 - S - L\mathcal{B}_1)u + Qe_2. \quad (34)$$

De (34) es posible obtener el valor de las matrices  $R$ ,  $Q$  y  $S$ , siendo (35), (36), y (37), respectivamente, quedando como:

$$\mathcal{A}_{21} + QL - R - L\mathcal{A}_{11} = 0, \quad (35)$$

$$\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12} - Q = 0, \quad (36)$$

$$\mathcal{B}_2 - S - L\mathcal{B}_1 = 0. \quad (37)$$

Al garantizar la obtención de  $S$ ,  $R$  y  $Q$ , la dinámica del error  $\dot{e}_2$  queda en términos de  $Qe_2$ .

$$\dot{e}_2 = Qe_2 = \dot{z}_2 - \dot{\hat{z}}_2, \quad (38)$$

Si garantizamos que el comportamiento de  $Q$  en la dinámica del error  $\dot{e}_2$  en (34) sea Hurwitz por medio de la asignación de polos, entonces se tiene la siguiente propiedad:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_2 = 0. \quad (39)$$

Por lo que, hasta este punto, se ha presentado únicamente las bases necesarias para desarrollar el análisis matemático correspondiente al observador robusto de orden reducido.

### 3.2. Robustez al sistema

Ahora conocemos las dinámicas planteadas en el desarrollo y análisis del observador de orden reducido para sistemas en tiempo continuo, por lo que partimos del conocimiento de las dinámicas de  $\dot{z}_1$  y  $\dot{z}_2$  para desarrollar el observador robusto de orden reducido, las cuales están establecidas

$$\dot{z}_1 = \mathcal{A}_{11}z_1 + \mathcal{A}_{12}z_2 + \mathcal{B}_{11}u + \xi_1, \quad (40)$$

$$\dot{z}_2 = \mathcal{A}_{21}z_1 + \mathcal{A}_{22}z_2 + \mathcal{B}_{21}u + \xi_2. \quad (41)$$

Recordando que  $z_1$ , representa las variables medibles y  $z_2$  aquellas que no lo son. También recordamos la representación de la salida y que ha sido establecida anteriormente como :

$$y = z_1. \quad (42)$$

Retomando también la definición de la variable  $\phi$ , que posteriormente nos servirá para definir el error  $e_2$

$$\phi = \hat{z}_2 - Ly. \quad (43)$$

Donde utilizamos a (42) para remplazar a  $y$  con  $z_1$  en (43). Las variables de estado estimadas son representadas por  $\hat{z}_2$ , donde se utilizará a la información de  $z_2$  para dicho fin. La dinámica del error  $e_2$ , que representa la diferencia entre las variables de estado estimadas y las variables de estado reconstruidas queda definida como:

$$\dot{e}_2 = \dot{z}_2 - \dot{\hat{z}}_2. \quad (44)$$

En (40) y (41)  $\xi_1$  y  $\xi_2$  representa las incertidumbres en el sistema, de ellas hablaremos mas adelante. Es necesario que el error  $\dot{e}_2$  sea uniformemente acotado, por lo que considerando las definiciones de  $\dot{z}_1$ ,  $\dot{z}_2$  y  $\dot{\hat{z}}_2$ , y tomando en cuenta las incertidumbres marcadas como  $\xi_1$  y  $\xi_2$ , esto garantiza la Estabilidad Última Uniformemente Acotada (Khalil, 1996) y el error  $\dot{e}_2$ , queda definido como:

$$\dot{e}_2 = (\mathcal{A}_{21} - R - L\mathcal{A}_{11} + QL)z_1 + (\mathcal{B}_2 - S - L\mathcal{B}_{11})u + Qe_2 + \xi_2 - \xi_1L + (\mathcal{A}_{22} + A_{12} - Q)z_1. \quad (45)$$

De (45), podemos considerar el valor de las matrices formadas por  $Q$ ,  $S$  y  $R$  iguales a cero, para así garantizar la convergencia del sistema entre  $z_2$  y  $\hat{z}_2$ , como:

$$Q = \mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12} = 0, \quad (46)$$

$$B = \mathcal{B}_{21} - L\mathcal{B}_{11} = 0, \quad (47)$$

$$R = \mathcal{A}_{21} - L\mathcal{A}_{11} = 0. \quad (48)$$

Al realizar las igualaciones anteriores expresadas en (46), (47) y (48) la dinámica del error  $\dot{e}_2$  que se encuentra en (45) queda definida :

$$\dot{e}_2 = Qe_2 + \xi_2 - L\xi_1. \quad (49)$$

La definición de las cotas marcadas como  $\xi_1$  y  $\xi_2$  son reagrupadas en un vector  $\xi$ , este define las incertidumbres en el sistema.

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \quad \|\xi_1\|^2 \leq \delta_1, \quad \text{y} \quad \|\xi_2\|^2 \leq \delta_2. \quad (50)$$

Esto nos permite tener la siguiente deducción:

$$\|\xi\|^2 \leq \sqrt{\|\xi_1\|^2 + \|\xi_2\|^2} \leq \delta. \quad (51)$$

Ahora proponemos una función de almacenamiento, que posteriormente es utilizada para representar la disminución de energía en el sistema. Esto garantiza la convergencia del error a condiciones aceptables. La función propuesta involucra al error  $e_2$  y queda expresada a continuación:

$$V(e_2) = e_2^T P e_2, \quad \text{donde} \quad 0 < P = P^T \in \mathfrak{X}^{n \times n}. \quad (52)$$

La dinámica de la función cuadrática de error es:

$$\dot{V}(e_2) = \dot{e}_2^T P e_2 + e_2^T P \dot{e}_2. \quad (53)$$

Considerando el valor del error  $e_2$  y su dinámica  $\dot{e}_2 = Qe_2 + \xi_2 - L\xi_1$ , al reorganizar las incertidumbres (50) como :

$$\begin{bmatrix} -L & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = -L\xi_1 + \xi_2. \quad (54)$$

Por lo tanto la dinámicas del error  $\dot{e}_2$  queda representada como :

$$\dot{e}_2 = Qe_2 + \begin{bmatrix} -L & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Recordando el valor que la matriz  $Q$ , tal que  $Q = (\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12})$  y utilizando la expresión (55), remplazando en  $\dot{V}(e_2)$  (53), tenemos que :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_2) = & \left[ (\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12})e_2 + \begin{bmatrix} -L & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \right]^T P e_2 \\ & + e_2^T P \left[ (\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12})e_2 + \begin{bmatrix} -L & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (56)$$

Simplificando (56):

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_2) = & e_2^T (\mathcal{A}_{22}^T - \mathcal{A}_{12}^T L^T) P e_2 + \xi \begin{bmatrix} -L \\ I \end{bmatrix} P e_2 \\ & + e_2^T P (\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12}) e_2 + e_2^T P \begin{bmatrix} -L & I \end{bmatrix} \xi. \end{aligned} \quad (57)$$

Definimos al vector extendido  $\begin{bmatrix} e & \xi \end{bmatrix}^T$ , entonces (57) es:

$$\dot{V}(e_2) = \begin{bmatrix} e_2 \\ \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12}) + (\mathcal{A}_{22}^T - \mathcal{A}_{12}^T L^T)P & PL & P \\ -L^T P & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ \xi \end{bmatrix}. \quad (58)$$

Se agrega a la ecuación (58)  $\alpha V$  y  $\varepsilon \|\xi\|$  con  $\alpha$  y  $\beta$  como escalares positivos, tal que no altere la ecuación, esto tiene la finalidad de obtener propiedades de la matriz ya formada, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_2) = & \begin{bmatrix} e_2 \\ \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12}) + (\mathcal{A}_{22}^T - \mathcal{A}_{12}^T L^T)P & PL & P \\ -L^T P & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} e_2 \\ \xi \end{bmatrix} \pm \alpha V(e_2) \pm \varepsilon \|\xi\|^2. \end{aligned} \quad (59)$$

Note que  $\alpha$  y  $\varepsilon$  son parámetros de ajuste por lo que (59) queda representada como :

$$\dot{V}(e_2) = \begin{bmatrix} e_2 \\ \xi \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{ccc} P(\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12}) + (\mathcal{A}_{22}^T - \mathcal{A}_{12}^T L^T)P & -PL & P \\ -L^T P & -\varepsilon I & 0 \\ P & 0 & -\varepsilon I \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_2 \\ \xi \end{bmatrix} - \alpha V(e_2) + \varepsilon \|\xi\|^2. \quad (60)$$

Llamaremos  $\mathcal{W}$  a la matriz intermedia formada en (60), quedando como :

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} P(\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12}) + (\mathcal{A}_{22}^T - \mathcal{A}_{12}^T L^T)P & -PL & P \\ -L^T P & -\varepsilon I & 0 \\ P & 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0. \quad (61)$$

Tomando en consideración lo establecido en (60) y (61) se obtiene  $\dot{V}(e_2)$  :

$$\dot{V}(e_2) = \begin{bmatrix} e_2 \\ \xi \end{bmatrix} \mathcal{W} \begin{bmatrix} e_2 \\ \xi \end{bmatrix} - \alpha V(e_2) + \varepsilon \|\xi\|^2. \quad (62)$$

Considerando que  $\mathcal{W} < 0$  en (61) tenemos que :

$$\dot{V}(e_2) \leq -\alpha V(e_2) + \varepsilon \delta. \quad (63)$$

El Lema de comparación (Khalil, 1996) aplicado a (63) :

$$\dot{V}(e_2) \leq -\alpha \left( V(e_2) - \frac{\varepsilon \delta}{\alpha} \right). \quad (64)$$

La solución de la desigualdad diferencial en (64) queda de la forma siguiente:

$$\frac{dV(e_2)}{V(e_2) - \frac{\varepsilon \delta}{\alpha}} \leq -\alpha dt. \quad (65)$$

Realizamos una integración a (65), sin olvidar que  $\alpha$  es un escalar, y que la parte izquierda de la ecuación diferencial  $\int \frac{du}{u}$ , así como también nombramos a  $\frac{\varepsilon \delta}{\alpha} = \kappa$  por lo que tendremos:

$$\int_{t_0}^t \frac{dV(e_2)}{V(e_2) - \kappa} = -\alpha \int_{t_0}^t d\tau. \quad (66)$$

La solución de la ecuación (66) nos resulta como :

$$\ln[V(e_2) - \kappa] \Big|_{t_0}^t = -\alpha \tau \Big|_{t_0}^t. \quad (67)$$

Evaluando (67) como corresponde en  $t_0$  y  $t$ , tenemos:

$$\ln \frac{V(e_2(t)) - \kappa}{V(e_2(t_0)) - \kappa} = -\alpha(t - t_0). \quad (68)$$

Aplicando la propiedad exponencial en (68) para eliminar la presencia del logaritmo, tendremos:

$$\frac{V(e_2(t)) - \kappa}{V(e_2(t_0)) - \kappa} = e^{-\alpha(t-t_0)}. \quad (69)$$

Despejando a  $V(e_2(t))$  de (69)

$$V(e_2(t)) = \kappa + [V(e_2(t_0)) - \kappa]e^{-\alpha(t-t_0)}. \quad (70)$$

De (70) podemos observar que si  $\kappa = V(e_2(t_0))$ , entonces la ecuación se encuentra definida por  $\kappa$ . El límite se define con

$t \rightarrow t_0$ , es decir, que se tienda a la condición inicial, entonces esto se ve expresado de la siguiente forma :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} V(e_2(t)) = V(e_2(t_0)). \quad (71)$$

Finalmente, para poder ajustar los valores de convergencia del error  $V(e_2)$  según  $\kappa$ , siendo que este se encuentra acotado, donde  $\varepsilon$  debe ser un ajuste decreciente y  $\alpha$  un ajuste creciente.

$$\kappa = \frac{\varepsilon \delta}{\alpha}. \quad (72)$$

### 3.3. Aplicación del observador robusto de orden reducido en biodigestor

El desarrollo del algoritmo y las operaciones matemáticas realizadas para encontrar la estructura necesaria del observador se presentan a continuación. La matriz de transformación  $\Gamma \in R$  en (24) queda :

$$N_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (73)$$

La matriz de transformación  $\Gamma$ , y su inversa  $\Gamma^{-1}$ , siendo las siguientes:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (74)$$

Considerando la estructura en (25), tenemos que  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  como:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -0.0005 & 0 & 0.0845 & 0.0053 \\ 0 & -0.0005 & 0.6880 & 0.0824 \\ 0 & 0 & -0.1339 & -0.0083 \\ 0 & 0 & 0.0189 & 0.0007 \end{bmatrix}, \quad (75)$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -15.85 \\ -83.76 \\ 29.67 \\ -5.1670 \end{bmatrix}.$$

Las dinámicas de  $\psi$  se forman a partir de  $Q$ ,  $R$  y  $S$  en (46), (47) y (48) respectivamente, donde se debe de cumplir :

- La matriz  $Q$  debe ser Hurwitz, es decir, los polos dentro del plano complejo deben ser negativos.
- Realizar la operación inversa al obtener  $y$ , ya que los resultados son obtenidos inicialmente de una transformación no singular.

Para ello se propone un polinomio característico deseado al cual se ajustan los valores de  $Q$ .

### 3.4. Resultados de observador robusto de orden reducido

Para la solución de las LMI (Lineal Matrix Inequality) presentadas por la matriz  $\mathcal{W}$  en el desarrollo del algoritmo del observador robusto de orden reducido se utilizó la herramienta **Sedumi** dentro del Software Matlab<sup>TM</sup> proporcionando inicialmente valores a  $\alpha$  y  $\epsilon$ . El cambio de condiciones iniciales entre la planta y el observador, las ganancias utilizadas en la sintonización del observador y los parámetros utilizados en la simulación se encuentran en la Tabla 6.

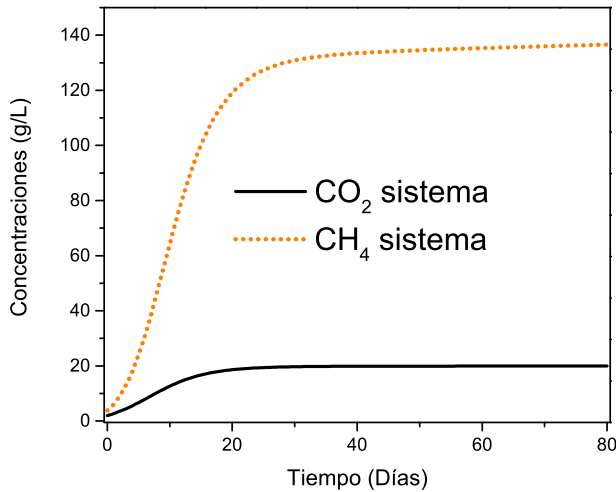


Figura 2: Evolución de  $CH_4$  y  $CO_2$  en 80 días.

Las dinámicas que se presentan en la Figura 2 hacen referencia a los estados del sistema que son medibles. La evolución del  $CO_2$  y  $CH_4$  difiere de las presentadas en la Figura 1 porque las condiciones iniciales con las que se simula la planta son diferentes, esto se refleja directamente en el comportamiento. La variación de condiciones iniciales se realiza con la finalidad de observar la convergencia entre el estimador de estados y la planta real, las simulaciones aplicadas se corren en un lapso de 80 días y se presentan a continuación para los estados estimados que se reconstruyen en el observador de orden reducido.

Tabla 6: Parámetros utilizados en el observador robusto

Parámetros utilizados	Valores
$\alpha$ propuesto	12.7
$\epsilon$ propuesto	0.01055
Raíces del sistema	-0.0671, -0.0001
Ganancias obtenidas	$L = [-0.0117 \ -0.0955 ; -0.0006 \ -0.0100]$
C.I. Observador	30, 1.2, g/L, S,B.
C.I. Planta real	33.5, 1.935, 2, 3.8, g/L, S, B, $CO_2$ , $CH_4$ .

En la Figura 3 se compara el comportamiento del sustrato de la planta simulada junto al observador robusto. Es notorio ver que las condiciones iniciales de operación son diferentes entre ambos y en menos de 10 días los valores obtenidos en el observador difieren en un rango menor a 1 (g/L) en comparación a la planta.

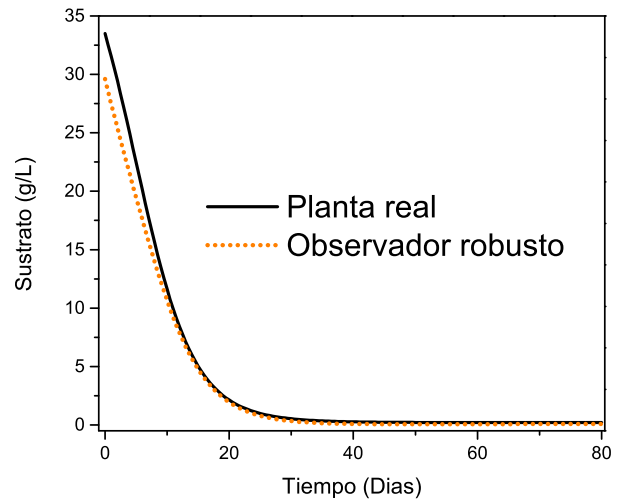


Figura 3: Evolución del sustrato en 80 días.

De igual manera en la Figura 4 se presenta el comportamiento de la biomasa entre la planta y el observador considerando que ambos sistemas parten en condiciones iniciales diferentes. Los resultados por el observador obtienen una diferencia en un rango menor a 1 (g/L) en menos de 20 días en comparación a la planta. Estos resultados consideran los parámetros experimentales de simulación en la Tabla 4 y las variaciones en las condiciones iniciales mencionado en la Tabla 6.

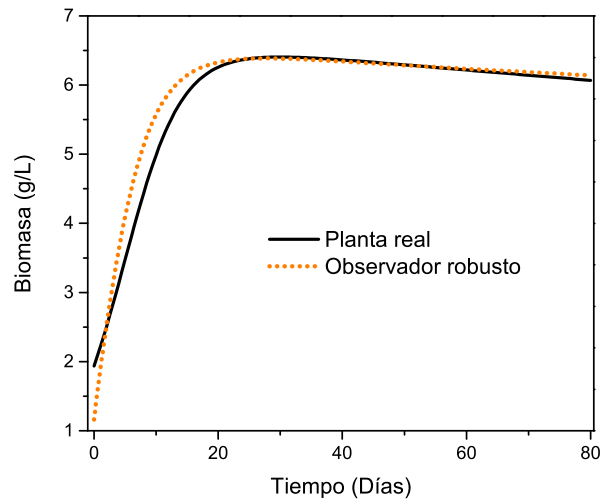


Figura 4: Evolución de la biomasa en 80 días.

## 4. Conclusiones

La solución al sistema mediante el uso del LMI se garantiza la Estabilidad Última Uniformemente Acotada y esto se ve reflejado en la convergencia del observador robusto a las dinámicas de planta real ante la variación de condiciones iniciales. Las incertidumbres paramétricas y las condiciones iniciales que difieren de las programadas en el observador no interfieren en la dinámica para realizar la convergencia entre los estados reales y los estimados reconstruidos por la transformación no singular. De esta manera el comportamiento del observador es aceptable



y robusto en condiciones diferentes a las dinámicas en el biodigestor.

## Referencias

- Abu-Reesh, I. M. (2014). Kinetics of anaerobic digestion of labaneh whey in a batch reactor. *African Journal of Biotechnology*, 13(16).
- Batstone, D. J., Keller, J., Angelidaki, I., Kalyuzhnyi, S., Pavlostathis, S., Rozzi, A., Sanders, W., Siegrist, H., and Vavilin, V. (2002). The iwa anaerobic digestion model no 1 (adm1). *Water Science and Technology*, 45(10):65–73.
- Bernard, O., Hadj-Sadok, Z., and Dochain, D. (2000). Software sensors to monitor the dynamics of microbial communities: application to anaerobic digestion. *Acta biotheoretica*, 48(3):197–205.
- Chan, Y. J., Chong, M. F., and Law, C. L. (2017). Performance and kinetic evaluation of an integrated anaerobic–aerobic bioreactor in the treatment of palm oil mill effluent. *Environmental technology*, 38(8):1005–1021.
- Fedailaine, M., Moussi, K., Khitous, M., Abada, S., Saber, M., and Tirichine, N. (2015). Modeling of the anaerobic digestion of organic waste for biogas production. *Procedia Computer Science*, 52:730–737.
- Gasca, C. E. (2013). Transición energética, energías renovables y energía solar de potencia. *Revista Mexicana de Física*, 59(2):75–84.
- Genocchi, A. (1884). *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale*, volume 1. Bocca.
- Guevara, O. J. C. (2014). Fuentes renovables y generación de energía limpia su regulación en honduras. *La Revista de Derecho*, 35:93–112.
- Jeong, H.-S., Suh, C.-W., Lim, J.-L., Lee, S.-H., and Shin, H.-S. (2005). Analysis and application of adm1 for anaerobic methane production. *Bioprocess and biosystems engineering*, 27(2):81–89.
- Kazemi, P., Steyer, J.-P., Bengoa, C., Font, J., and Giral, J. (2020). Robust data-driven soft sensors for online monitoring of volatile fatty acids in anaerobic digestion processes. *Processes*, 8(1):67.
- Khalil, H. K. (1996). Nonlinear systems. *Prentice-Hall, New Jersey*, 2.
- López-Pérez, P., Neria-González, M., and Aguilar-López, R. (2013). Nonlinear controller design with application to a continuous bioreactor. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 47(5):585–592.
- López-Pérez, P., Neria-González, M., and Aguilar-López, R. (2016). Improvement of activated sludge process using a nonlinear pi controller design via adaptive gain. *International Journal of Chemical Reactor Engineering*, 14(1):407–416.
- Pérez, P. L., González, M. N., and López, R. A. (2013). Cadmium concentration stabilization in a continuous sulfate reducing bioreactor via sulfide concentration control. *Chemical Papers*, 67(3):326–335.
- Rao, P. V., Baral, S. S., Dey, R., and Mutnuri, S. (2010). Biogas generation potential by anaerobic digestion for sustainable energy development in india. *Renewable and sustainable energy reviews*, 14(7):2086–2094.
- Ruiz-Leza, H., Rodríguez-Jasso, R., Rodríguez-Herrera, R., Contreras-Esquivel, J., and Aguilar, C. (2007). Diseño de biorreactores para fermentación en medio sólido. *Revista Mexicana de ingeniería química*, 6(1):33–40.
- Sbarciog, M., Loccufer, M., and Noldus, E. (2010). Determination of appropriate operating strategies for anaerobic digestion systems. *Biochemical engineering journal*, 51(3):180–188.
- Sonnenenergie DGf, E. (2005). Planning and installing bioenergy systems: A guide for installers, architects, and engineers, vol. 1. *Earthscan, UK*.
- Torres, A. D. (1996). Evaluación de los parámetros cinéticos de la ecuación de monod. *Ingeniería e Investigación*, (33):123–138.
- Weiland, P. (2010). Biogas production: current state and perspectives. *Applied microbiology and biotechnology*, 85(4):849–860.