

Control de un robot manipulador móvil de dos grados de libertad Two degrees of freedom mobile manipulator robot control

J. G. Pérez-Fuentevilla ^{a,*}, A. B. Morales-Díaz ^b, A. Rodríguez-Ángeles ^c

^aDepartamento de Ingeniería Eléctrica, CINVESTAV-IPN, 07360, CDMX, México.

^bRobótica y manufactura avanzada, CINVESTAV-IPN, 25900, Saltillo, Coahuila.

^cDepartamento de Ingeniería Eléctrica, CINVESTAV-IPN, 07360, CDMX, México.

Resumen

En este trabajo se propone un controlador no lineal, basado en un esquema de control por par calculado con compensación de gravedad, que resuelve el problema de seguimiento de trayectoria a nivel de posición y velocidad, de un robot manipulador móvil (RMM). El robot está conformado por un manipulador de dos eslabones montado sobre un robot móvil diferencial tipo (2,0); se trabaja con una versión reducida del modelo, tal que el móvil cumple con la restricción no holonómica. Se presentan condiciones que aseguran la estabilidad del sistema usando el método de Lyapunov. Se prueba estabilidad semiglobal, uniforme y últimamente acotada, y se logra encontrar la región de la cota última. Se usan distintas trayectorias paramétricas para las simulaciones numéricas; en cada caso, se presenta un mapeo del espacio alcanzable por el efector final y gráficas de desempeño. Los resultados muestran una convergencia efectiva en el seguimiento de trayectoria y se logran confirmar las propiedades de estabilidad obtenidas del análisis.

Palabras Clave: Robot manipulador móvil, Restricción no holonómica, Control por par calculado, Seguimiento de trayectoria, Estabilidad semiglobal.

Abstract

In this paper, a nonlinear control law based on a computed torque control scheme with gravity compensation is proposed for solving the trajectory tracking problem of a mobile manipulator robot. The robot is composed by a two link manipulator mounted on a (2,0) type differential mobile robot; a reduced model where the mobile satisfies the non-holonomic constraint is worked out. Stability conditions using Lyapunov method are presented. Semiglobal, uniform ultimate boundedness stability is proved and the ultimate bound region is found. Different parametric trajectories are used for numeric simulations; in each case, a mapping of the reachable space by the end effector and performance charts are presented. Results shows an effective convergence on the trajectory tracking and the stability properties are confirmed.

Keywords: Mobile manipulator robot, Non-holonomic constraint, Computed torque control, Trajectory tracking, Semiglobal stability.

1. Introducción

El estudio de los robots manipuladores móviles (RMM) se ha vuelto de interés recientemente y ha captado la atención de los investigadores debido a las posibilidades en el ramo industrial (Zhou et al., 2022), en temas de seguridad (Saitoh et al., 1995), de servicios (Chi-wu and Ke-fei, 2009), en sistemas cooperativos (Sugar and Kumar, 1999) o incluso en algo tan cotidiano como abrir una puerta (Nagatani and Yuta, 1995).

Una de las grandes ventajas en este tipo de robots es el alcance que se puede obtener a diferencia de un robot manipula-

dor fijo; además, la redundancia de los RMM resulta beneficiosa en el sentido de que es posible alcanzar o tomar posturas en algún punto del espacio imposibles para un robot de base fija.

Se han estudiado diversas técnicas de control para el seguimiento de trayectoria en este tipo de robots. Hay trabajos en los que se añade una compensación robusta tomando como base un controlador PD clásico (Chi-wu and Ke-fei, 2009), enfoques más sofisticados en donde se diseña un sistema de seguimiento adaptable basado en redes neuronales (Wang et al., 2014) o leyes de control basados en un esquema ADRC (Ningyue et al.,

* Autor para correspondencia: jorge.perezf@cinvestav.mx

Correo electrónico: jorge.perezf@cinvestav.mx (Jorge Gustavo Pérez-Fuentevilla), america.morales@cinvestav.mx (América Berenice Morales-Díaz), aangeles@cinvestav.mx (Alejandro Rodríguez-Ángeles).

2015).

En este trabajo nos valemos de un controlador por par calculado añadiendo términos de corrección sobre el error de posición y compensación de gravedad para resolver el problema de seguimiento.

2. Planteamiento del problema

Se requiere que el RMM siga una trayectoria deseada. Este tipo de sistemas tienen la peculiaridad de que se pueden definir dos trayectorias distintas: una para el móvil y otra para el efector final del manipulador.

Se considera un manipulador de 2 eslabones montado sobre un robot móvil diferencial tipo (2,0). En la Figura 1 se muestra la descripción del robot móvil manipulador.

El móvil y los eslabones se consideran simétricos, esto es, los tensores de inercia tendrán la forma $I_i = \text{diag}(I_{ixx}, I_{iyy}, I_{izz})$, $i = 1, 2, 3$. Con esto, a continuación se describe la nomenclatura de los parámetros físicos.

- I_1, I_2, I_3 : Tensores de inercia del móvil, primer y segundo eslabón respectivamente.
- m_1, m_2, m_3 : Masas del móvil, primer y segundo eslabón respectivamente.
- h : Altura del móvil.
- R : Radio de las llantas del móvil.
- L : Distancia medida desde el eje longitudinal del móvil hasta una de sus llantas.
- L_x, L_y : Distancia desde el eje longitudinal y transversal del móvil hasta el anclaje con el primer eslabón respectivamente.
- p_x, p_y, p_z : Distancias al centro de masas c_1 del móvil.
- L_1, L_2 : Longitudes del primer y segundo eslabón respectivamente.
- L_{c_1}, L_{c_2} : Distancias al centro de masas c_2 y c_3 del primer y segundo eslabón respectivamente.

El vector de posición que relaciona al efector final con el marco inercial es:

$${}^0O_e = \begin{bmatrix} x_{ef} \\ y_{ef} \\ z_{ef} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x_{ef} &= x + L_y \cos \theta - L_x \sin \theta + L_1 \cos \phi_1 \cos \theta \\ &\quad + L_2 \cos(\phi_1 + \phi_2) \cos \theta \\ y_{ef} &= y + L_x \cos \theta + L_y \sin \theta + L_1 \cos \phi_1 \sin \theta \\ &\quad + L_2 \cos(\phi_1 + \phi_2) \sin \theta \\ z_{ef} &= R + \frac{h}{2} + L_2 \sin(\phi_1 + \phi_2) + L_1 \sin \phi_1. \end{aligned}$$

Se define el vector de coordenadas generalizadas como $q = [x \ y \ \theta \ \phi_1 \ \phi_2]^T$ y se toma en cuenta el modelo cinemático del robot móvil diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos \theta \\ \dot{y} &= v \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \omega, \end{aligned} \quad (2)$$

donde x, y describen el movimiento del móvil sobre el plano horizontal, θ define su orientación, ϕ_1 y ϕ_2 son las variables articulares de los eslabones, v y ω son las velocidades lineal y angular que exhibe el móvil respectivamente.

2.1. Cinemática Inversa

Uno de los mayores problemas en este tipo de sistemas se encuentra en la resolución de la cinemática inversa debido a la redundancia del robot. Los robots redundantes son los que cuentan con más grados de libertad de los necesarios para poder realizar alguna tarea. En este caso, es fácil ver de la Figura 1 que

$$\phi_1 + \phi_2 = \psi_{ef}, \quad (3)$$

donde ψ_{ef} es la orientación del efector final. Además, en términos de velocidades, vea que de (2) se puede obtener

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right). \quad (4)$$

Se recomienda usar la función atan2 para obtener θ en lugar de \tan^{-1} para evitar problemas de cuadrantes e inconsistencias como en el caso en que $\dot{x} = 0$.

Luego, la ecuación (1) se puede igualar a un vector deseado para la posición del efector final, es decir, ${}^0O_e = [x_{ef_d} \ y_{ef_d} \ z_{ef_d}]^T$. Esto produce las ecuaciones para las coordenadas x, y del móvil y una tercera ecuación que junto con (3) forman un sistema de ecuaciones no lineales que se pueden resolver para obtener ϕ_1 y ϕ_2 . Una posible solución es

$$\begin{cases} \phi_1 = \sin^{-1} \left[\frac{1}{L_1} \left(z_{ef_d} - R - \frac{h}{2} - L_2 \sin \psi_{ef_d} \right) \right] \\ \phi_2 = \psi_{ef_d} - \phi_1. \end{cases} \quad (5)$$

2.2. Modelo del robot

El modelo del sistema está dado por la ecuación dinámica

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau, \quad (6)$$

donde $\tau = [F_x \ F_y \ \tau_c \ \tau_1 \ \tau_2]^T$ es el vector de fuerzas y torques en el sistema, vea la Figura 2, F_x y F_y son las fuerzas con las que se desplaza el móvil sobre los ejes x_0 y y_0 respectivamente, τ_c es el torque del móvil sobre su eje de giro, τ_1 y τ_2 son los torques del primer y segundo eslabón del manipulador respectivamente; $D(q)$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q})$ es la matriz de Coriolis y $G(q)$ el vector de fuerzas gravitacionales. La definición de las matrices del modelo se pueden ver en el Apéndice A.

Partiendo de (2) se puede obtener la restricción no holonómica a la que está sujeta el robot móvil diferencial (2,0)

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0. \quad (7)$$

El modelo dinámico descrito en (6) tiene el problema de que no cumple con la restricción no holonómica. Por tanto, se formula un modelo reducido incorporando la restricción (7) mediante una transformación que se describe a continuación, vea (Portillo Vélez, 2013).

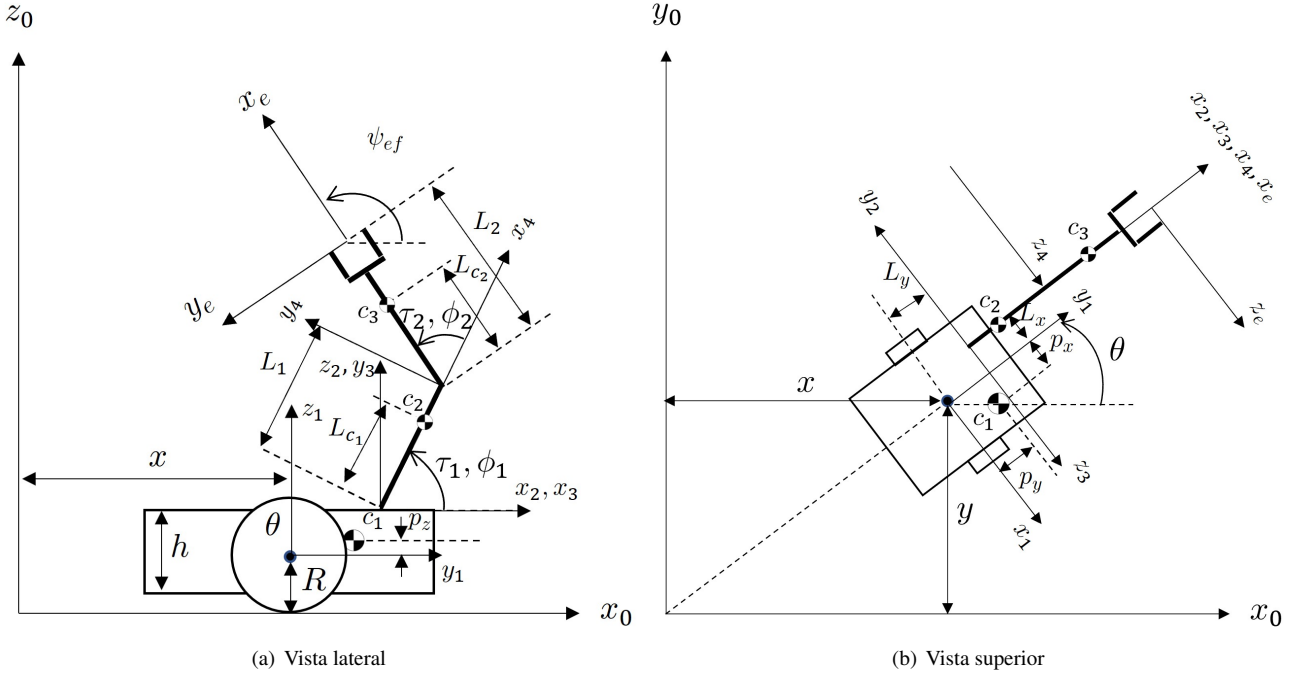


Figura 1: Descripción del robot manipulador móvil

La restricción (7) se reescribe como

$$A(q)\dot{q} = 0, \quad (8)$$

donde $A(q) = [\sin\theta \quad -\cos\theta \quad 0 \quad 0 \quad 0]$. Además, existe una matriz regular $S(q)$ tal que $A(q)S(q) = 0$. Lo cual da lugar a un nuevo vector $\eta(t) = [v \quad \dot{\theta} \quad \dot{\phi}_1 \quad \dot{\phi}_2]^T$ tal que $\dot{q} = S(q)\eta$. Entonces,

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Defínanse τ_d y τ_i como los torques de las ruedas derecha e izquierda del móvil respectivamente, vea la Figura 2. Se puede obtener una relación mediante un análisis de fuerzas tal que es posible escribir $\tau = B(q)\tau_{red}$ siendo $\tau_{red} = [\tau_d \quad \tau_i \quad \tau_1 \quad \tau_2]^T$ un vector de torques reducido; $B(q)$ se llama *matriz de motorización* y se define como:

$$B(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \cos\theta & \frac{1}{R} \cos\theta & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} \sin\theta & \frac{1}{R} \sin\theta & 0 & 0 \\ \frac{L}{R} & -\frac{L}{R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

De tal forma que el modelo reducido es

$$\begin{aligned} \bar{D}(q)\dot{\eta} + \bar{C}(q, \dot{q})\eta + \bar{G}(q) &= \bar{\tau}(q) \\ \dot{q} &= S(q)\eta, \end{aligned} \quad (11)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{D}(q) &= S^T(q)D(q)S(q) \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \\ \bar{C}(q, \dot{q}) &= S^T(q)D(q)\dot{S}(q) \\ &\quad + S^T(q)C(q, \dot{q})S(q) \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \\ \bar{G}(q) &= S^T(q)G(q) \in \mathbb{R}^{4 \times 1} \\ \bar{\tau}(q) &= S^T(q)B(q)\tau_{red} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}. \end{aligned}$$

3. Estrategia de control

El problema de seguimiento de trayectoria para un robot diferencial se puede resolver considerando un robot virtual en un esquema lider-seguidor (Infante et al., 2019; Gutiérrez et al., 2017), vea la Figura 3, en donde el robot virtual tiene el rol del robot líder que sigue la trayectoria deseada y el objetivo es lograr una convergencia de los errores relativos (e_r) del robot real al virtual.

Con $q_d = [x_d \quad y_d \quad \theta_d \quad \phi_{1d} \quad \phi_{2d}]^T$ los valores deseados para las coordenadas generalizadas, se definen los errores de seguimiento

$$e = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ \theta_d - \theta \end{bmatrix}. \quad (12)$$

En el marco local del robot se tiene, con respecto al robot virtual,

$$e_r = \begin{bmatrix} e_{r_x} \\ e_{r_y} \\ e_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\theta \end{bmatrix}. \quad (13)$$

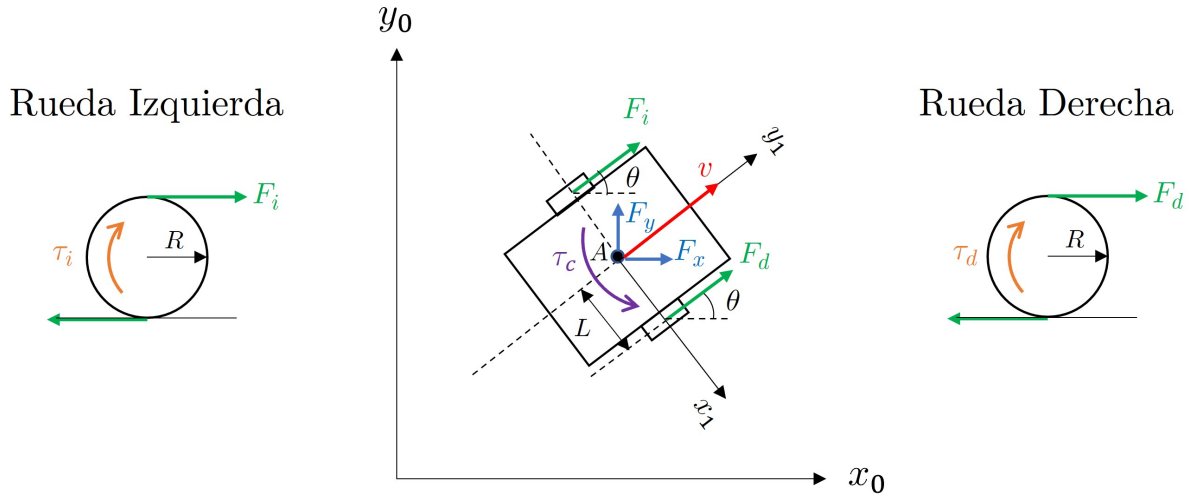


Figura 2: Descripción de fuerzas y torques en el móvil.

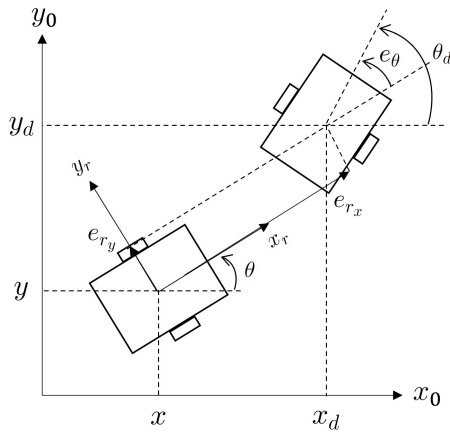


Figura 3: Errores del robot diferencial en esquema líder-seguidor.

Se considera la ley de control

$$\begin{aligned} \tau_{red} &= P^{-1}(q)H(q)\left[I^{-1}(q,\eta) + \dot{\eta}_d + K_p e_\eta\right. \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ k_4 e_{\phi_1} \\ k_5 e_{\phi_2} \end{pmatrix} + G^*(q)\right] \quad (14) \\ e_\eta &= \eta_d - \eta, \quad e_{\phi_1} = \phi_{1d} - \phi_1, \quad e_{\phi_2} = \phi_{2d} - \phi_2 \\ u_1 &= k_1 e_{r_x} \\ u_2 &= k_2 v_d \frac{\sin e_\theta}{e_\theta} e_{r_y} + k_3 e_\theta, \end{aligned}$$

donde

$$P(q) = S^T(q)B(q) \quad (15)$$

$$H(q) = \bar{D}(q) \quad (16)$$

$$I^{-1}(q,\eta) = \bar{D}^{-1}(q)\bar{C}(q,\dot{q})\eta \quad (17)$$

$$G^*(q) = \bar{D}^{-1}(q)\bar{G}(q) \quad (18)$$

$\eta_d = S^T(q_d)\dot{q}_d = [v_d \ \dot{\theta}_d \ \dot{\phi}_{1d} \ \dot{\phi}_{2d}]^T$ es el vector deseado de velocidades. Además, se considera que las trayectorias de

referencia para el móvil v_d y $\dot{\theta}_d$ cumplen con la restricción no holonómica.

Se consideran las ganancias

$$k_i > 0, \quad i = 1, \dots, 5.$$

$K_p = \text{diag}(k_{p_1}, k_{p_2}, k_{p_3}, k_{p_4}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ es una matriz diagonal definida positiva, $[u_1 \ u_2 \ k_4 e_{\phi_1} \ k_5 e_{\phi_2}]^T$ es un vector que corrige el error a nivel de posición y $G^*(q)$ es el término de compensación de gravedad. En la Figura 4 se muestra un diagrama que representa el esquema de control.

Tome en cuenta que todas las trayectorias de referencia son funciones *suaves* en el manipulador, para no obtener acciones de control tan abruptas; y en el móvil, además, para cumplir con la restricción no holonómica.

3.1. Dinámica en lazo cerrado

Sustituyendo el control (14) en el modelo reducido (11) se obtiene la ecuación en lazo cerrado

$$\dot{e}_\eta + K_p e_\eta + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ k_4 e_{\phi_1} \\ k_5 e_{\phi_2} \end{pmatrix} = 0. \quad (19)$$

3.2. Dinámica de los errores.

Definimos el vector completo del error como sigue

$$e_\Gamma = [e_{r_x} \ e_{r_y} \ e_\theta \ \dot{e}_\theta \ e_{\eta_1} \ e_{\phi_1} \ \dot{e}_{\phi_1} \ e_{\phi_2} \ \dot{e}_{\phi_2}]^T. \quad (20)$$

Tomando la definición de los errores en (12), (13) y (14), con $\eta = [\eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3 \ \eta_4]^T = [v \ \omega \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2]^T$ y el modelo cinemático (2), se obtiene la dinámica de los errores

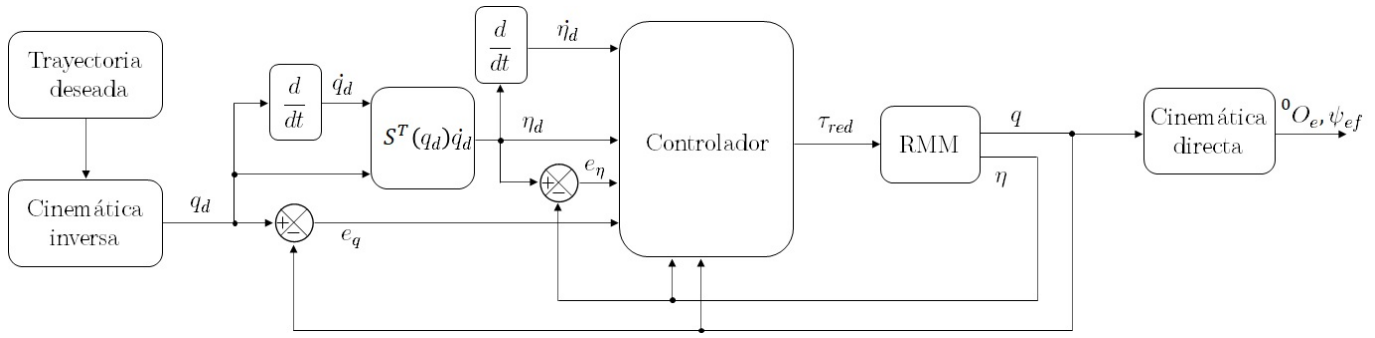


Figura 4: Diagrama a bloques.

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_x &= \dot{x}_d + (e_{\eta_1} - \eta_{1d}) \cos(\theta_d - e_\theta) \\
 \dot{e}_y &= \dot{y}_d + (e_{\eta_1} - \eta_{1d}) \sin(\theta_d - e_\theta) \\
 \dot{e}_\theta &= e_{\eta_2} \\
 \dot{e}_{\phi_1} &= e_{\eta_3} \\
 \dot{e}_{\phi_2} &= e_{\eta_4} \\
 \dot{e}_{r_x} &= \eta_{1d} \cos(e_\theta) + (\dot{\theta}_d - \dot{e}_\theta) e_{r_y} + e_{\eta_1} - \eta_{1d} \\
 \dot{e}_{r_y} &= (\dot{e}_\theta - \dot{\theta}_d) e_{r_x} + \eta_{1d} \sin(e_\theta).
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(e_\Gamma) &\leq \|k_1 \eta_{1d} e_{r_x} (\cos(e_\theta) - 1)\| + \|k_1 \eta_{1d} e_{r_y} \sin(e_\theta)\| \\
 &\quad + \left\| k_2 v_d \frac{\sin(e_\theta)}{e_\theta} \dot{e}_\theta e_{r_y} \right\| - \|k_{p_2} \dot{e}_\theta^2\| - \|k_{p_1} e_{\eta_1}^2\| \leq 0. \tag{28}
 \end{aligned}$$

Considérese que

$$\begin{aligned}
 \|e_{r_x}\| &\leq \|e_\Gamma\|, & \|e_{r_y}\| &\leq \|e_\Gamma\| \\
 \|\dot{e}_\theta\| &\leq \|e_\Gamma\|, & \|e_{\eta_1}\| &\leq \|e_\Gamma\|
 \end{aligned}$$

De la ecuación en lazo cerrado (19) se obtiene

$$\dot{e}_{\eta_1} + k_{p_1} e_{\eta_1} + k_1 e_{r_x} = 0 \tag{22}$$

$$\ddot{e}_\theta + k_{p_2} \dot{e}_\theta + k_2 v_d \frac{\sin(e_\theta)}{e_\theta} e_{r_y} + k_3 e_\theta = 0 \tag{23}$$

$$\dot{e}_{\phi_1} + k_{p_3} \dot{e}_{\phi_1} + k_4 e_{\phi_1} = 0 \tag{24}$$

$$\ddot{e}_{\phi_2} + k_{p_4} \dot{e}_{\phi_2} + k_5 e_{\phi_2} = 0. \tag{25}$$

De (24) y (25), note que con $k_{p_3}, k_{p_4}, k_4, k_5 > 0$ se logra la estabilidad asintótica para e_{ϕ_i} y \dot{e}_{ϕ_i} , $i = 1, 2$, correspondientes a los eslabones del manipulador, pues se trata de un par de sistemas lineales; esto es, que llevando el sistema a la forma $\dot{z} = Az$ con $z = [e_{\phi_i} \ \dot{e}_{\phi_i}]^T$ se tiene que A es una *matriz Hurwitz*. Así, ahora se necesita demostrar estabilidad para el vector del error $e_\gamma = [e_{r_x} \ e_{r_y} \ e_\theta \ \dot{e}_\theta \ e_{\eta_1}]^T$ correspondiente al móvil.

3.3. Análisis de estabilidad

Propóngase la función candidata de Lyapunov

$$V(e_\Gamma) = \frac{1}{2} k_1 (e_{r_x}^2 + e_{r_y}^2) + \frac{1}{2} (k_3 e_\theta^2 + \dot{e}_\theta^2 + e_{\eta_1}^2), \tag{26}$$

derivando respecto al tiempo y usando (21), (22) y (23) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(e_\Gamma) &= k_1 \eta_{1d} e_{r_x} (\cos(e_\theta) - 1) + k_1 \eta_{1d} e_{r_y} \sin(e_\theta) \\
 &\quad - k_2 v_d \frac{\sin(e_\theta)}{e_\theta} \dot{e}_\theta e_{r_y} - k_{p_2} \dot{e}_\theta^2 - k_{p_1} e_{\eta_1}^2. \tag{27}
 \end{aligned}$$

Luego, se quiere demostrar

$$\begin{aligned}
 k_1 \|\eta_{1d}\| \|e_{r_x}\| \|\cos(e_\theta) - 1\| &\leq 2k_1 \|\eta_{1d}\| \|e_\Gamma\| \\
 k_1 \|\eta_{1d}\| \|e_{r_y}\| \|\sin(e_\theta)\| &\leq k_1 \|\eta_{1d}\| \|e_\Gamma\| \\
 k_2 \left\| v_d \frac{\sin(e_\theta)}{e_\theta} \dot{e}_\theta e_{r_y} \right\| &\leq k_2 \|v_d\| \|e_\Gamma\|^2 \\
 k_{p_2} \|\dot{e}_\theta^2\| &\leq k_{p_2} \|e_\Gamma\|^2 \\
 k_{p_1} \|e_{\eta_1}^2\| &\leq k_{p_1} \|e_\Gamma\|^2.
 \end{aligned}$$

Así, (28) se puede escribir como sigue

$$\dot{V}(e_\Gamma) \leq 3k_1 \|\eta_{1d}\| \|e_\Gamma\| + (k_2 \|v_d\| - k_{p_2} - k_{p_1}) \|e_\Gamma\|^2. \tag{29}$$

Se pueden establecer dos condiciones para asegurar que $\dot{V}(e_\Gamma) \leq 0$. De esta forma, se consigue una *estabilización semiglobal* en un conjunto compacto que se puede hacer arbitrariamente grande al ajustar los valores de las ganancias (Khalil, 2015, pp. 198-199), donde el sistema será estable, aunque de forma acotada.

Condición 1. Se pueden elegir ganancias tales que siempre se cumpla

$$k_2 \|v_d\| - k_{p_2} - k_{p_1} < 0. \tag{30}$$

Condición 2. Es necesario que

$$(k_{p_2} + k_{p_1} - k_2 \|v_d\|) \|e_\Gamma\|^2 \geq 3k_1 \|\eta_{1d}\| \|e_\Gamma\|,$$

esto genera un intervalo para la norma del vector del error completo

$$\|e_\Gamma\| \leq \frac{3k_1 \|\eta_{1d}\|}{k_{p_2} + k_{p_1} - k_2 \|v_d\|}. \tag{31}$$

Tabla 1: Tabla de parámetros

Móvil		Eslabón 1		Eslabón 2	
Parámetro	Valor	Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
m_1 [kg]	8.971	m_2 [kg]	1.308	m_3 [kg]	1.045
L_x [m]	0	L_1 [m]	0.4	L_2 [m]	0.3
L_y [m]	0.08	L_{c1} [m]	0.2	L_{c2} [m]	0.156532
p_x [m]	0	I_{2xx} [kg · m ²]	0.0003358	I_{3xx} [kg · m ²]	0.0006392
p_y [m]	0	I_{2yy} [kg · m ²]	0.016	I_{3yy} [kg · m ²]	0.007
p_z [m]	0.000785	I_{2zz} [kg · m ²]	0.017	I_{3zz} [kg · m ²]	0.008
L [m]	0.1125				
R [m]	0.040				
h [m]	0.050				
I_{1xx} [kg · m ²]	0.038				
I_{1yy} [kg · m ²]	0.065				
I_{1zz} [kg · m ²]	0.098				

De tal forma que no se puede asegurar convergencia asintótica, sino que se tiene un error acotado por arriba por una cantidad positiva, esto se llama estabilidad *uniforme y últimamente acotada* (Khalil, 2015, p. 85).

4. Simulaciones

En esta sección se presentan los resultados de simulaciones numéricas, considerando los parámetros físicos mostrados en la Tabla 1. Se muestra el comportamiento del sistema ante 3 distintas trayectorias paramétricas definidas para el móvil, a saber: una circunferencia, una lemniscata de Bernoulli y una figura de Lissajous. Para la validación de las condiciones de estabilidad se usa la norma euclidiana o norma 2; además, note que de (30) y (31), las condiciones de estabilidad dependen de las trayectorias deseadas, por lo que, para asegurar su cumplimiento y obtener acciones de control razonables, la sintonización de ganancias, en cada caso, tendrá que ser distinta.

4.1. Trayectoria de referencia para el móvil

De (2) y (4) se obtienen los valores deseados para las velocidades del móvil, tal que cumplen con la restricción (7).

$$v_d = \sqrt{\dot{x}_d^2 + \dot{y}_d^2}, \quad \dot{\theta}_d = \frac{\dot{x}_d \dot{y}_d - \ddot{x}_d \dot{y}_d}{v_d^2}. \quad (32)$$

Note que x_d, y_d deben ser al menos dos veces diferenciables y $v_d \neq 0$.

4.2. Circunferencia

Se define la siguiente trayectoria para el móvil, que describe un círculo con centro en $(x_c, y_c) = (2, 3)$ y radio $r_d = 1.5$.

$$\begin{aligned} x_d(t) &= x_c + r_d \cos(t) \\ y_d(t) &= y_c + r_d \sin(t). \end{aligned} \quad (33)$$

Se define la orientación deseada del manipulador $\psi_{ef_d}(t) = 0$. Con esto, se hace el mapeo del espacio alcanzable por el efector final a lo largo de la trayectoria circular del móvil, vea la Figura 5, en base a esto definimos $z_{ef_d}(t) = 0.35$.

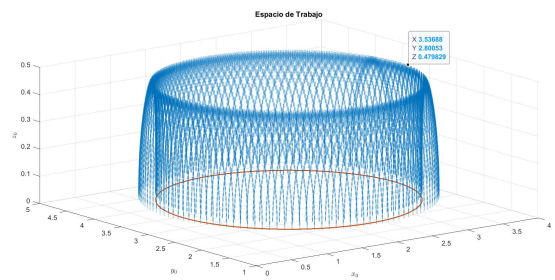


Figura 5: Circunferencia: Espacio alcanzable por el efector final.

Se usaron las ganancias mostradas en la Tabla 2.

Tabla 2: Circunferencia: ganancias de control.

k_{p1}	k_{p2}	k_{p3}	k_{p4}	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
50	50	50	50	50	50	200	400	400

En las Figuras 6 y 7 se muestra la convergencia de las trayectorias en el espacio y en el plano, respectivamente; en las Figuras 8 y 9 se tienen los errores en posición y velocidad, respectivamente; en la Figura 10 se muestran los torques obtenidos del control; y finalmente, en la Figura 11 se presenta la validación numérica de las condiciones de estabilidad.

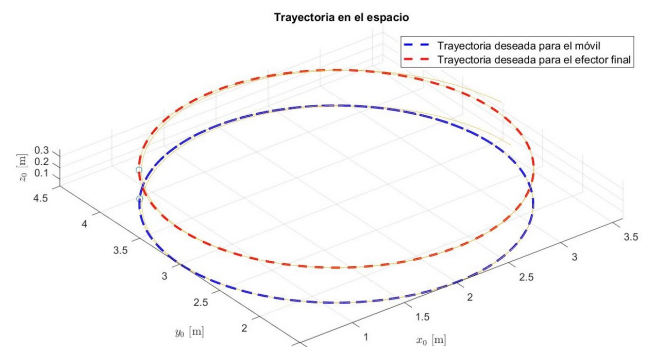


Figura 6: Circunferencia: Trayectoria en el espacio.

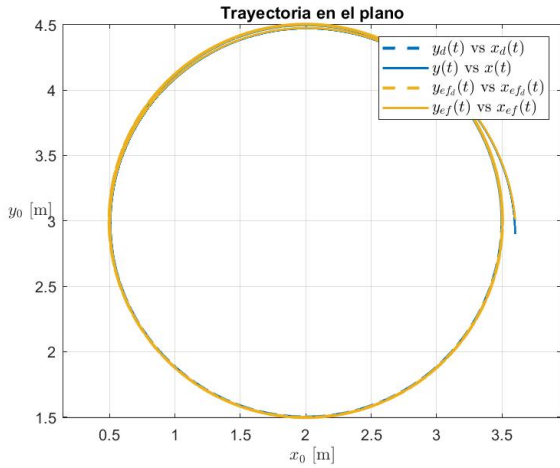
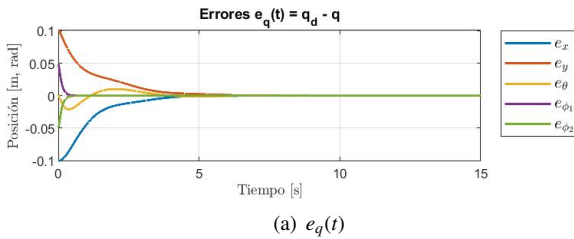
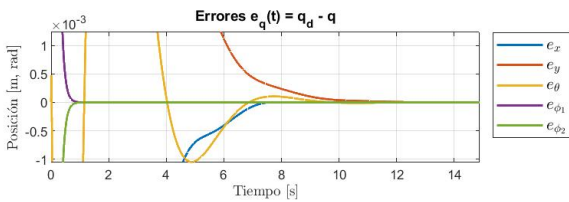


Figura 7: Circunferencia: Trayectoria en el plano.

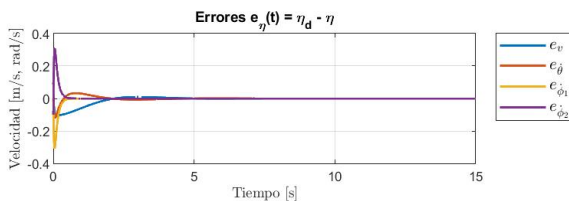


(a) $e_q(t)$

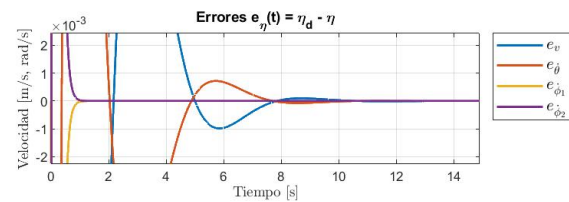


(b) Acercamiento

Figura 8: Circunferencia: Errores en $q(t) = [x \ y \ \theta \ \phi_1 \ \phi_2]^T$.



(a) $e_\eta(t)$



(b) Acercamiento

Figura 9: Circunferencia: Errores en $\eta(t) = [v \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2]^T$.

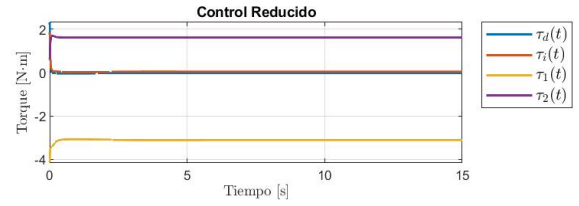
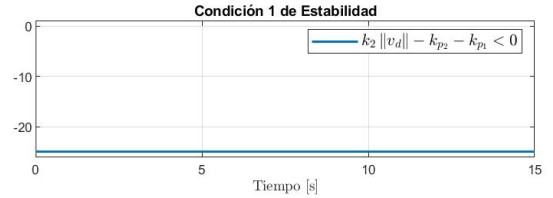
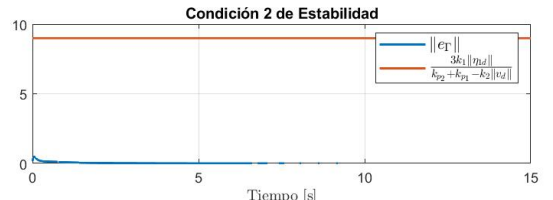


Figura 10: Circunferencia: Control $\tau_{red}(t)$



(a) $k_2 \|v_d\| - k_{p2} - k_{p1} < 0$



(b) $\|e_r\| \leq \frac{3k_1 \|\eta_d\|}{k_{p2} + k_{p1} - k_2 \|v_d\|}$

Figura 11: Circunferencia: Condiciones de estabilidad.

4.3. Lemniscata

Considere la siguiente trayectoria para el móvil, que describe una lemniscata de Bernoulli con centro en $(x_c, y_c) = (2, 3)$ y sea $a = 2$.

$$\begin{aligned} x_d(t) &= x_c + \frac{a \sin(t)}{1 + \cos^2(t)} \\ y_d(t) &= y_c + \frac{a \sin(t) \cos(t)}{1 + \cos^2(t)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Sea la orientación deseada del efector final $\psi_{e_{fd}}(t) = 0$ y considere el mapeo del espacio alcanzable mostrado en la Figura 12. Definimos $z_{e_{fd}}(t) = 0.35$.

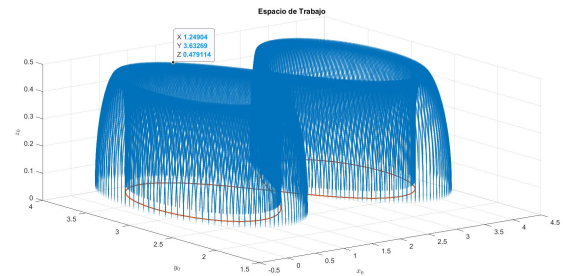


Figura 12: Lemniscata: Espacio alcanzable por el efector final.

Las ganancias de control usadas se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3: Lemniscata: ganancias de control.

k_{p1}	k_{p2}	k_{p3}	k_{p4}	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
70	70	70	70	50	50	200	700	700

En las Figuras 13 y 14 se muestran las trayectorias del sistema en el espacio y en el plano; en las Figuras 15 y 16 se presentan los errores en posición y velocidad respectivamente, note que en este caso se tiene una cota más notoria para los errores correspondientes al móvil que en el caso del círculo; en la Figura 17 se muestran las acciones de control; y por último, en la Figura 18 se muestra el cumplimiento de las condiciones de estabilidad.

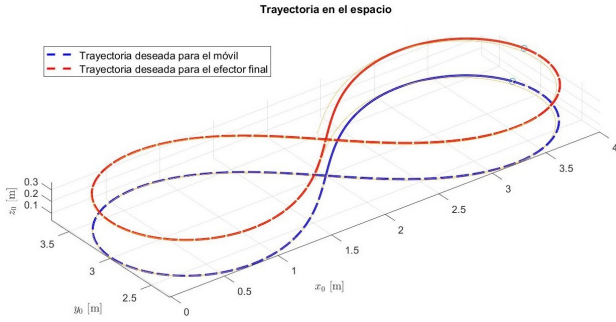


Figura 13: Lemniscata: Trayectoria en el espacio.

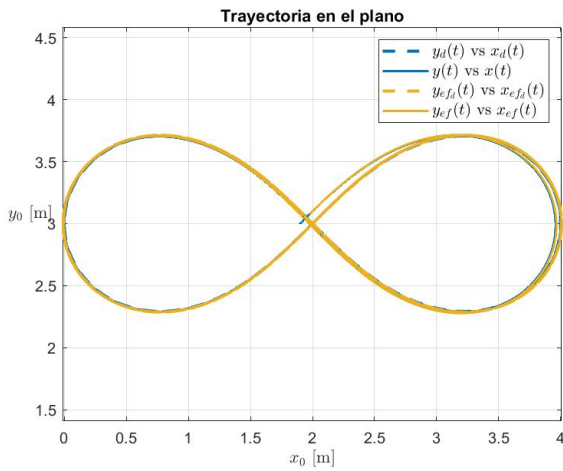
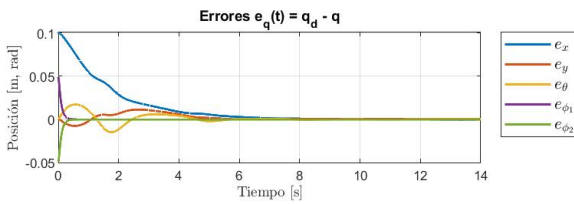
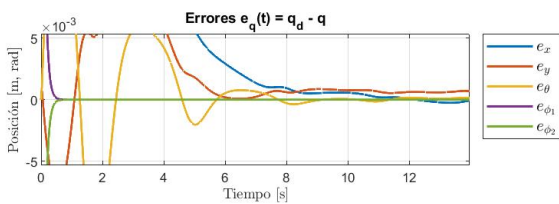


Figura 14: Lemniscata: Trayectoria en el plano.

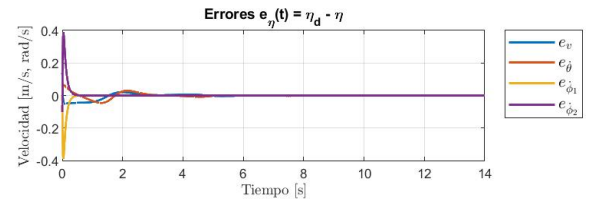


(a) $e_q(t)$

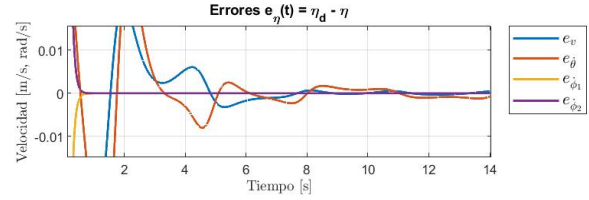


(b) Acercamiento

Figura 15: Lemniscata: Errores en $q(t) = [x \quad y \quad \theta \quad \phi_1 \quad \phi_2]^T$.



(a) $e_\eta(t)$



(b) Acercamiento

Figura 16: Lemniscata: Errores en $\eta(t) = [v \quad \dot{\theta} \quad \dot{\phi}_1 \quad \dot{\phi}_2]^T$.

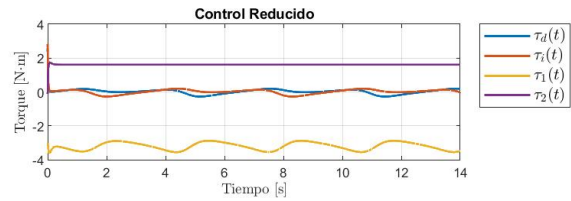
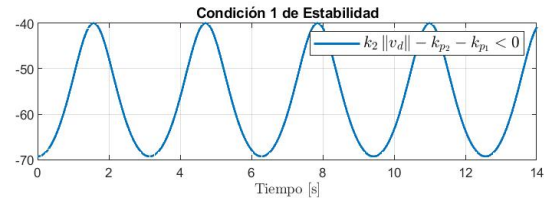


Figura 17: Lemniscata: Control $\tau_{red}(t)$



(a) $k_2 \|v_d\| - k_{p2} - k_{p1} < 0$



(b) $\|e_r\| \leq \frac{3k_1 \|\eta_d\|}{k_{p2} + k_{p1} - k_2 \|v_d\|}$

Figura 18: Lemniscata: Condiciones de estabilidad.

4.4. Figura de Lissajous

Se define la siguiente trayectoria para el móvil con centro en $(x_c, y_c) = (2, 3)$

$$\begin{aligned} x_d(t) &= x_c + A_x \sin(\omega_x t) \\ y_d(t) &= y_c + A_y \sin(\omega_y t + \delta), \end{aligned} \quad (35)$$

donde $\omega_x = 2$, $\omega_y = 3$, $\delta = 0$, $A_x = 2$, $A_y = 1$.

Se define una trayectoria para la orientación del efector final

$$\psi_{e_{fd}}(t) = A_\psi \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + A_\psi, \quad (36)$$

donde $A_\psi = 0.5$. Note que $\psi_{ef_d}(t)$ toma valores en el intervalo $[0,1]$, con esto se obtiene el mapeo del espacio de trabajo, vea la Figura 19, y se define la coordenada en z_0 del efector final

$$z_{ef_d}(t) = A_z \sin(t) + b, \tag{37}$$

donde $A_z = 0.04$ y $b = 0.4$.

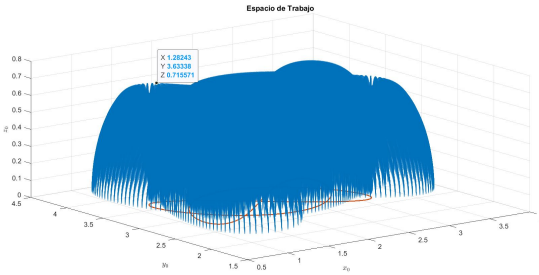


Figura 19: Figura de Lissajous: Espacio alcanzable por el efector final.

Note que, en este caso, la trayectoria definida para el efector final es variante en el tiempo, de esta forma se explota la dinámica del sistema.

Se usaron las ganancias mostradas en la Tabla 4.

Tabla 4: Figura de Lissajous: ganancias de control.

k_{p1}	k_{p2}	k_{p3}	k_{p4}	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
70	70	70	70	50	50	200	50	50

Se obtienen las gráficas de desempeño. En las Figuras 20 y 21 se presentan las trayectorias en el espacio y en el plano, respectivamente; también, se muestran los errores de posición y velocidad en las Figuras 22 y 23; en la Figura 24 se tienen los torques obtenidos del controlador; y finalmente, en la Figura 25 se muestra la verificación de las condiciones de estabilidad.

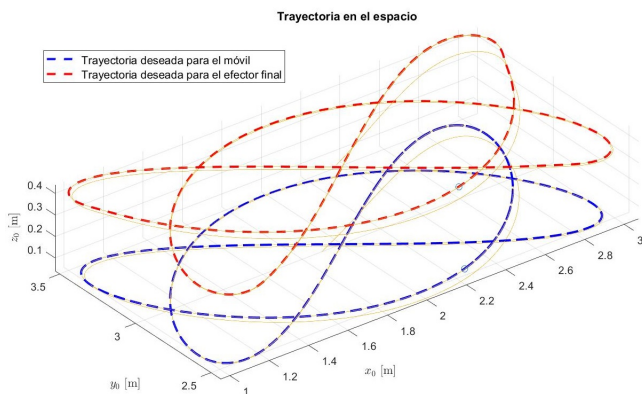


Figura 20: Figura de Lissajous: Trayectoria en el espacio.

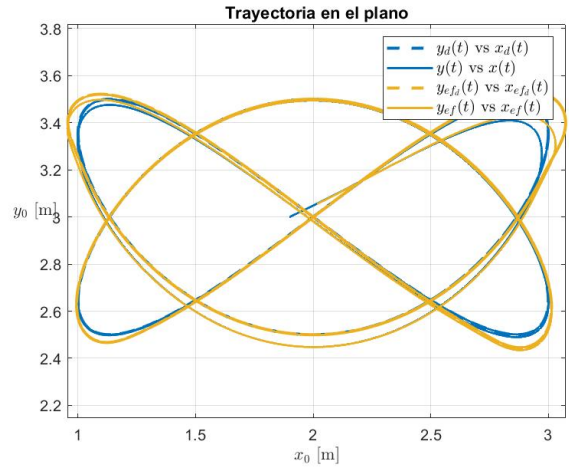
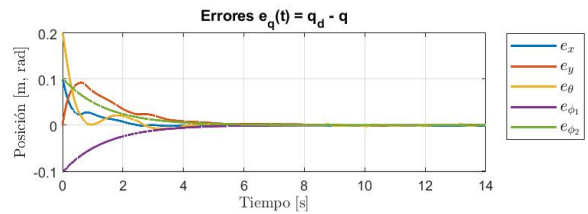
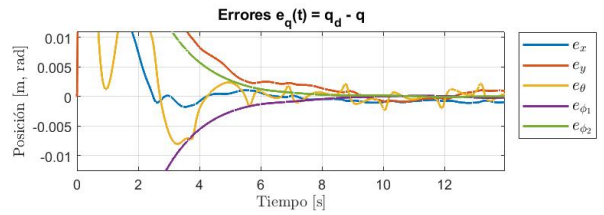


Figura 21: Figura de Lissajous: Trayectoria en el plano.

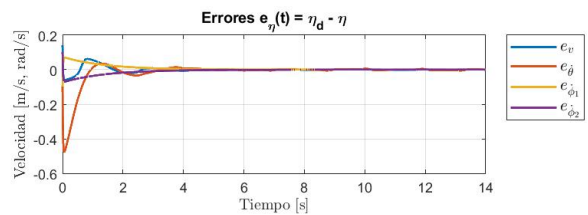


(a) $e_q(t)$

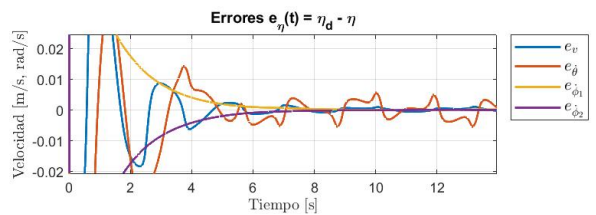


(b) Acercamiento

Figura 22: Figura de Lissajous: Errores en $q(t) = [x \ y \ \theta \ \phi_1 \ \phi_2]^T$.



(a) $e_\eta(t)$



(b) Acercamiento

Figura 23: Figura de Lissajous: Errores en $\eta(t) = [v \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2]^T$.

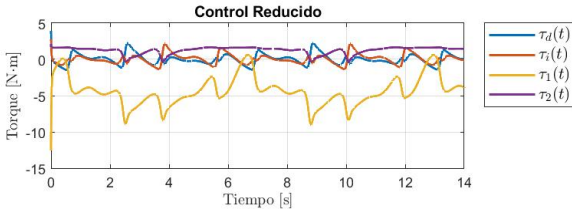
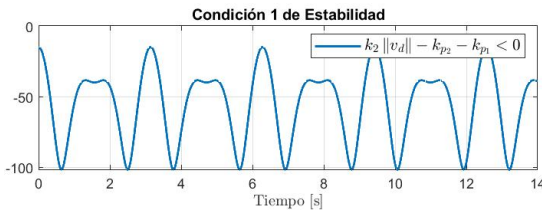


Figura 24: Figura de Lissajous: Control $\tau_{red}(t)$



(a) $k_2 \|v_d\| - k_{p2} - k_{p1} < 0$



(b) $\|e_r\| \leq \frac{3k_1 \|\eta_d\|}{k_{p2} + k_{p1} - k_2 \|v_d\|}$

Figura 25: Figura de Lissajous: Condiciones de estabilidad.

5. Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo se ha presentado un controlador que garantiza la convergencia tanto del robot móvil como del efector final del manipulador a una trayectoria deseada cumpliendo siempre con la restricción no holonómica. Se ha demostrado estabilidad semiglobal, uniforme y últimamente acotada, y se han dado las condiciones en las que se satisface.

Los resultados de simulación han mostrado la efectividad de la ley de control propuesta con tres diferentes trayectorias paramétricas manteniendo un error acotado, como lo establece el análisis de estabilidad. Esto se puede ver, sobretodo, en los casos de la lemniscata y la figura de Lissajous. En el caso más sencillo -la circunferencia-, en donde las velocidades lineal y angular del móvil son prácticamente constantes, la cota de los errores se vuelve imperceptible. En el caso más interesante -la figura de Lissajous-, donde todos los estados del sistema son variantes en el tiempo, se le exige al controlador y aún así se logra una convergencia efectiva.

Como trabajo futuro, es deseable la validación experimental; también, sería interesante extender el control al caso de sincronización con dos o más RMM añadiendo acoplamientos dinámicos con fines de manipulación cooperativa.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo del proyecto SEP-CONACYT CB2017-2018-A1-S-26123.

Referencias

- Chi-wu, B. and Ke-fei, X. (2009). Robust control of mobile manipulator service robot using torque compensation. In *2009 International Conference on Information Technology and Computer Science*, volume 2, pages 69–72.
- Gutiérrez, H., Morales, A., and Nijmeijer, H. (2017). Synchronization control for a swarm of unicycle robots: Analysis of different controller topologies. *Asian Journal of Control*, 19(5):1822–1833.
- Infante, M., Cruz Morales, R., Velasco-Villa, M., and Rodríguez Ángeles, A. (2019). Formación líder-seguidor para robots diferenciales con parámetros de seguimiento variables. In *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*. AMCA.
- Khalil, H. K. (2015). *Nonlinear Control*. Pearson Education, Upper Saddle River, NJ 07458.
- Nagatani, K. and Yuta, S. (1995). An experiment on opening-door-behavior by an autonomous mobile robot with a manipulator. In *Proceedings 1995 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Human Robot Interaction and Cooperative Robots*, volume 2, pages 45–50 vol.2.
- Ningyue, Liyan, and Liukeping (2015). The research of mobile manipulator trajectory tracking cooperative control based on the adrc. In *2015 Chinese Automation Congress (CAC)*, pages 385–389.
- Portillo Vélez, R. d. J. (2013). *Control Multilateral de Agarre para Robots Cooperativos Maestro/Multi-Esclavo*. Tesis de doctorado, CINVESTAV Unidad Zacatenco.
- Saitoh, M., Takahashi, Y., Sankaranarayanan, A., Ohmachi, H., and Marukawa, K. (1995). A mobile robot tested with manipulator for security guard application. In *Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 3, pages 2518–2523 vol.3.
- Spong, M. W. and Vidyasagar, M. (1989). *Robot Dynamics and Control*, pages 140–143. John Wiley & Sons, Inc., United States of America.
- Sugar, T. and Kumar, V. (1999). Multiple cooperating mobile manipulators. In *Proceedings 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 99CH36288C)*, volume 2, pages 1538–1543 vol.2.
- Wang, Y., Mai, T., and Mao, J. (2014). Adaptive motion/force control strategy for non-holonomic mobile manipulator robot using recurrent fuzzy wavelet neural networks. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 34:137–153.
- Zhou, Z., Li, L., Fürsterling, A., Durocher, H. J., Mouridsen, J., and Zhang, X. (2022). Learning-based object detection and localization for a mobile robot manipulator in sme production. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 73:102229.

Apéndice A. Modelo completo del R.M.M.

Las matrices del modelo se obtuvieron con la metodología presentada en (Spong and Vidyasagar, 1989).

Apéndice A.1. Matriz de inercia

$$D(q) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

$$d_{11} = d_{22} = m_1 + m_2 + m_3$$

$$d_{12} = d_{21} = 0$$

$$d_{13} = d_{31} = [m_1 p_x - L_x (m_2 + m_3)] \cos \theta - [m_1 p_y + L_y (m_2 + m_3)] \sin \theta - [m_2 L_{c_1} + m_3 L_1] \cos \phi_1 \sin \theta - m_3 L_{c_2} \sin \theta \cos (\phi_1 + \phi_2)$$

$$d_{14} = d_{41} = -m_3 L_{c_2} \sin (\phi_1 + \phi_2) \cos \theta - (m_2 L_{c_1} + m_3 L_1) \cos \theta \sin \phi_1$$

$$d_{15} = d_{51} = -m_3 L_{c_2} \sin (\phi_1 + \phi_2) \cos \theta$$

$$\begin{aligned}
 d_{23} &= d_{32} = [m_1 p_y + L_y (m_2 + m_3)] \cos \theta \\
 &\quad + [m_1 p_x - L_x (m_2 + m_3)] \sin \theta \\
 &\quad + (m_2 L_{c_1} + m_3 L_1) \cos \phi_1 \cos \theta \\
 &\quad + m_3 L_{c_2} \cos (\phi_1 + \phi_2) \cos \theta \\
 d_{24} &= d_{42} = -m_3 L_{c_2} \sin (\phi_1 + \phi_2) \sin \theta \\
 &\quad - (m_2 L_{c_1} + m_3 L_1) \sin \phi_1 \sin \theta \\
 d_{25} &= d_{52} = -m_3 L_{c_2} \sin (\phi_1 + \phi_2) \sin \theta \\
 d_{33} &= I_{1zz} + I_{2xx} \sin^2 \phi_1 + I_{3xx} \sin^2 (\phi_1 + \phi_2) \\
 &\quad + I_{2yy} \cos^2 \phi_1 + I_{3yy} \cos^2 (\phi_1 + \phi_2) \\
 &\quad + (m_2 + m_3) (L_x^2 + L_y^2) + m_2 L_{c_1}^2 \cos^2 \phi_1 \\
 &\quad + m_3 L_{c_2}^2 \cos^2 (\phi_1 + \phi_2) + m_1 (p_x^2 + p_y^2) \\
 &\quad + 2L_y (m_2 L_{c_1} + m_3 L_1) \cos \phi_1 \\
 &\quad + 2m_3 L_{c_2} L_y \cos (\phi_1 + \phi_2) + m_3 L_1 L_{c_2} \cos \phi_2 \\
 &\quad + m_3 L_1 L_{c_2} \cos (2\phi_1 + \phi_2) + m_3 L_1^2 \cos^2 \phi_1 \\
 d_{34} &= d_{43} = L_x m_3 L_{c_2} \sin (\phi_1 + \phi_2) \\
 &\quad + L_x (m_2 L_{c_1} + m_3 L_1) \sin \phi_1 \\
 d_{35} &= d_{53} = m_3 L_{c_2} L_x \sin (\phi_1 + \phi_2) \\
 d_{44} &= m_3 L_1^2 + 2m_3 L_1 L_{c_2} \cos \phi_2 + m_2 L_{c_1}^2 \\
 &\quad + m_3 L_{c_2}^2 + I_{2zz} + I_{3zz} \\
 d_{45} &= d_{54} = m_3 (L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} \cos \phi_2) + I_{3zz} \\
 d_{55} &= m_3 L_{c_2}^2 + I_{3zz} \\
 C_{23} &= \dot{\theta} (m_1 p_x - (m_2 + m_3) L_x) \cos \theta \\
 &\quad - \dot{\theta} (m_1 p_y + (m_2 + m_3) L_y) \sin \theta \\
 &\quad - (m_2 L_{c_1} + m_3 L_1) (\dot{\phi}_1 \cos \theta \sin \phi_1 + \dot{\theta} \cos \phi_1 \sin \theta) \\
 &\quad - m_3 L_{c_2} (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \sin (\phi_1 + \phi_2) \cos \theta \\
 &\quad - m_3 L_{c_2} \dot{\theta} \cos (\phi_1 + \phi_2) \sin \theta \\
 C_{24} &= -\dot{\theta} m_3 L_{c_2} \sin (\phi_1 + \phi_2) \cos \theta \\
 &\quad - \dot{\theta} (m_2 L_{c_1} + m_3 L_1) \sin \phi_1 \cos \theta \\
 &\quad - m_3 L_{c_2} (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \cos (\phi_1 + \phi_2) \sin \theta \\
 &\quad - \dot{\phi}_1 (m_3 L_1 + m_2 L_{c_1}) \cos \phi_1 \sin \theta \\
 C_{25} &= -\dot{\theta} m_3 L_{c_2} \sin (\phi_1 + \phi_2) \cos \theta \\
 &\quad - m_3 L_{c_2} (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \cos (\phi_1 + \phi_2) \sin \theta \\
 C_{33} &= (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) (I_{3xx} - I_{3yy} - m_3 L_{c_2}^2) \frac{\sin (2\phi_1 + 2\phi_2)}{2} \\
 &\quad + \dot{\phi}_1 (I_{2xx} - I_{2yy} - m_3 L_1^2 - m_2 L_{c_1}^2) \frac{\sin (2\phi_1)}{2} \\
 &\quad - \dot{\phi}_2 m_3 L_1 L_{c_2} \frac{\sin \phi_2}{2} \\
 &\quad - m_3 L_1 L_{c_2} \left(\dot{\phi}_1 + \frac{1}{2} \dot{\phi}_2 \right) \sin (2\phi_1 + \phi_2) \\
 &\quad - \dot{\phi}_1 L_y (m_2 L_{c_1} + m_3 L_1) \sin \phi_1 \\
 &\quad - m_3 L_{c_2} L_y (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \sin (\phi_1 + \phi_2) \\
 C_{34} &= \dot{\theta} (I_{2xx} - I_{2yy} - m_2 L_{c_1}^2 - m_3 L_1^2) \frac{\sin (2\phi_1)}{2} \\
 &\quad + \dot{\theta} (I_{3xx} - I_{3yy} - m_3 L_{c_2}^2) \frac{\sin (2\phi_1 + 2\phi_2)}{2} \\
 &\quad + m_3 L_{c_2} L_x (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \cos (\phi_1 + \phi_2) \\
 &\quad - m_3 L_{c_2} L_y \dot{\theta} \sin (\phi_1 + \phi_2) \\
 &\quad + L_x (m_2 L_{c_1} + m_3 L_1) \dot{\phi}_1 \cos \phi_1 \\
 &\quad - L_y \dot{\theta} (m_2 L_{c_1} + m_3 L_1) \sin \phi_1 \\
 &\quad - m_3 L_1 L_{c_2} \dot{\theta} \sin (2\phi_1 + \phi_2) \\
 C_{35} &= \dot{\theta} (I_{3xx} - I_{3yy} - m_3 L_{c_2}^2) \frac{\sin (2\phi_1 + 2\phi_2)}{2} \\
 &\quad + m_3 L_{c_2} L_x (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \cos (\phi_1 + \phi_2) \\
 &\quad - m_3 L_{c_2} L_y \dot{\theta} \sin (\phi_1 + \phi_2) - m_3 L_1 L_{c_2} \dot{\theta} \frac{\sin \phi_2}{2} \\
 &\quad - m_3 L_1 L_{c_2} \dot{\theta} \frac{\sin (2\phi_1 + \phi_2)}{2} \\
 C_{43} &= \dot{\theta} m_3 L_y L_{c_2} \sin (\phi_1 + \phi_2) \\
 &\quad + \dot{\theta} m_3 L_1 L_{c_2} \sin (2\phi_1 + \phi_2) \\
 &\quad + \dot{\theta} L_y (m_2 L_{c_1} + m_3 L_1) \sin \phi_1 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \dot{\theta} (m_3 L_1^2 + m_2 L_{c_1}^2 - I_{2xx} + I_{2yy}) \sin (2\phi_1) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \dot{\theta} (m_3 L_{c_2}^2 - I_{3xx} + I_{3yy}) \sin (2\phi_1 + 2\phi_2) \\
 C_{44} &= -m_3 L_1 L_{c_2} \dot{\phi}_2 \sin \phi_2 \\
 C_{45} &= -m_3 L_1 L_{c_2} (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \sin \phi_2
 \end{aligned}$$

Apéndice A.2. Matriz de Coriolis

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} \end{bmatrix} \quad (A.2)$$

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= C_{12} = C_{21} = C_{22} = C_{31} = C_{32} = 0 \\
 C_{41} &= C_{42} = C_{51} = C_{52} = C_{55} = 0 \\
 C_{13} &= \dot{\theta} (-m_1 p_x + (m_2 + m_3) L_x) \sin \theta \\
 &\quad - \dot{\theta} (m_1 p_y + (m_2 + m_3) L_y) \cos \theta \\
 &\quad - L_{c_2} m_3 \dot{\theta} \cos (\phi_1 + \phi_2) \cos \theta \\
 &\quad + m_3 L_{c_2} (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \sin (\phi_1 + \phi_2) \sin \theta \\
 &\quad + (m_2 L_{c_1} + m_3 L_1) (\dot{\phi}_1 \sin \phi_1 \sin \theta - \dot{\theta} \cos \phi_1 \cos \theta) \\
 C_{14} &= \dot{\theta} m_3 L_{c_2} \sin (\phi_1 + \phi_2) \sin \theta \\
 &\quad + \dot{\theta} (m_2 L_{c_1} + m_3 L_1) \sin \phi_1 \sin \theta \\
 &\quad - \dot{\phi}_1 m_3 L_{c_2} \cos (\phi_1 + \phi_2) \cos \theta \\
 &\quad - \dot{\phi}_1 (m_3 L_1 + m_2 L_{c_1}) \cos \phi_1 \cos \theta \\
 &\quad - m_3 L_{c_2} \dot{\phi}_2 \cos (\phi_1 + \phi_2) \cos \theta \\
 C_{15} &= \dot{\theta} m_3 L_{c_2} \sin (\phi_1 + \phi_2) \sin \theta \\
 &\quad - m_3 L_{c_2} (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \cos (\phi_1 + \phi_2) \cos \theta
 \end{aligned}$$

Apéndice A.3. Vector de efectos gravitacionales

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_3g(L_{c_2} \cos(\phi_1 + \phi_2) + L_1 \cos \phi_1) + m_2gL_{c_1} \cos \phi_1 \\ m_3gL_{c_2} \cos(\phi_1 + \phi_2) \end{bmatrix} \quad (A.3)$$

$$\begin{aligned} C_{53} &= \frac{1}{2} \dot{\theta} (I_{3yy} - I_{3xx} + m_3L_{c_2}^2) \sin(2\phi_1 + 2\phi_2) \\ &\quad + \dot{\theta} m_3L_{c_2}L_y \sin(\phi_1 + \phi_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} m_3L_1L_{c_2} \dot{\theta} (\sin \phi_2 + \sin(2\phi_1 + \phi_2)) \\ C_{54} &= m_3L_1L_{c_2} \dot{\phi}_1 \sin \phi_2 \end{aligned}$$