







# Regulación robusta de un vehículo aéreo no tripulado via modos deslizantes dinámicos

## Robust regulation of an unmanned aerial vehicle via dynamic sliding modes

Á. A. Villanueva-Reyes <sup>a</sup>, V. Eduardo Pedraza-Vera <sup>a</sup>, F. A. Castro-Espinoza <sup>a</sup>, H. Romero-Trejo <sup>a</sup>, M. O. Ordaz-Oliver <sup>a</sup>, P. Ordaz-Oliver <sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup> Área Académica de Computación y Electrónica, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Pachuca, Hidalgo, México.

### Resumen

En este trabajo de investigación se presenta una propuesta de control para la regulación robusta de un vehículo aéreo no tripulado. El algoritmo de control se basa en la técnica de modos deslizantes con atenuación del efecto castañeo sobre el actuador. Para ello, se le incorpora una dinámica sobre la acción de control que, mediante una pre-compensación basada en la pseudoinversa, se garantiza la convergencia de la superficie de deslizamiento en un tiempo finito. Además, con base en la teoría de estabilidad de Lyapunov y la solución de un problema asociado a desigualdades lineales matriciales, el algoritmo propuesto garantiza estabilidad asintótica de la dinámica de la aeronave en lazo cerrado. Finalmente, el algoritmo propuesto es puesto a prueba en una simulación numérica.

**Palabras Clave:** Vehículo aéreo no tripulado, Control no lineal, Modos deslizantes dinámicos.

### Abstract

In this paper, a control scheme for the robust regulation of an unmanned aerial vehicle is presented. The control algorithm uses a sliding modes strategy to reduce the actuators chattering effect. To do this, a dynamic control is introduced, by using the pseudoinverse concept this one guarantees the convergence of the sliding surface in a finite time. Furthermore, based on the Lyapunov stability theory and the solution of a problem and linear matrix inequalities concept, the proposed scheme guarantees asymptotic stability of the aircraft closed loop dynamics. Finally, a numerical simulation is used to test the proposed algorithm.

**Keywords:** Unmanned aerial vehicle, Nonlinear control, Dynamic sliding mode.

## 1. Introducción

En los últimos años han surgido diversas técnicas para poder controlar un vehículo aéreo no tripulado (UAV). En la mayoría de estos métodos la dinámica del UAV es dividida en dos o más subsistemas por lo que se diseña un control para cada uno de ellos, pero desde el punto de vista de teoría de control es más apropiado estudiar un sistema completo que por subsistemas independientes; por lo tanto, es posible diseñar un control que sea capaz de tomar todo el sistema del UAV y que este será estabilizado. Por mencionar algunas de las técnicas de control aplicadas tenemos en (Das, 2009), se

presenta un modelo no lineal de un helicóptero y se diseña un control con enfoque backstepping el cual es aplicado en el Lagrangiano de la dinámica y no en la forma espacio estado.

Algunos enfoques relacionados con control por modos deslizantes, (de acrónimo en inglés SMC) tenemos el control presentado en (Espinoza, 2013), es un control basado en la unión de dos metodologías de control el backstepping y modos deslizantes para reducir las problemáticas que presenta el chattering. Con el fin de proponer un controlador que presente mejores características, se propuso diseñar un control que combine el control backstepping y modos

\*Autor para la correspondencia: [jesus\\_ordaz@uaeh.edu.mx](mailto:jesus_ordaz@uaeh.edu.mx)

**Correo electrónico:** [angel\\_tuzo@hotmail.com](mailto:angel_tuzo@hotmail.com) (Ángel Augusto Villanueva Reyes), [vpedraza@uaeh.edu.mx](mailto:vpedraza@uaeh.edu.mx) (Victor Eduardo Pedraza Vera), [fcastro@uaeh.edu.mx](mailto:fcastro@uaeh.edu.mx) (Félix Agustín Castro Espinoza), [rhugo@uaeh.edu.mx](mailto:rhugo@uaeh.edu.mx) (Hugo Romero Trejo), [jesus\\_ordaz@uaeh.edu.mx](mailto:jesus_ordaz@uaeh.edu.mx) (Jesús Patricio Ordaz).

deslizantes, logrando un mejor desempeño al tener sólo una de las metodologías. En (Flórez, 2015), se propone un control para la corrección y estabilización de la altura ( $z$ ), teniendo en cuenta perturbaciones propias del sistema y efectos no lineales, por medio de la técnica de modos deslizantes, lo que brinda un desempeño deseado ante dichos efectos. Un control de posición de cabeceo por modos deslizantes es propuesto en (Carreño, 2014), con el propósito de disminuir las perturbaciones externas, al aplicar el control el UAV, es capaz de realizar diferentes tareas complejas con la presencia de perturbaciones de viento. En (Mohamed, 2009), se propone un control por modos deslizantes donde la prueba de estabilidad garantiza mediante el análisis de Lyapunov. En el trabajo (Ramirez-Rodriguez, 2013) se plantea un diseño de un control robusto integral utilizando modos deslizantes, lo que brinda la reducción del error y la robustez necesaria para asegurar el comportamiento estable y deseado frente a perturbaciones. En (Merheb, 2013) se plantea un control mediante modos deslizantes para la orientación del UAV, mediante que el control de altura es realizado por un controlador PD. Para poder evitar el efecto de chattering producido por los modos deslizantes es utilizado una función de saturación en lugar de la función signo. En (Xiong, 2014) se propone un control de posición y de orientación donde el modelo dinámico es dividido en 2 partes: un subsistema totalmente actuado y un subsistema actuado. Para controlar el primero es implementado un controlador deslizante terminal donde garantiza que los estados converjan a los valores que son deseados en un tiempo finito, para el otro subsistema es empleado un controlador por modos deslizantes. En ambos diseños de control se realiza pruebas de estabilidad mediante la teoría de Lyapunov.

El objetivo principal de este artículo es el diseño de una ley de control no lineal basada en la representación completa del estado que garantice estabilidad asintótica. Primero se resuelve el problema de convergencia de tiempo finito de una superficie de deslizamiento específica de tal modo que las trayectorias converjan de forma exponencial, después se plantea combinar un control de retroalimentación obtenido al usar pseudoinversa, con el control por modos deslizantes que se diseña. En la sección II se presenta la formulación del problema a tratar en este artículo. Se presenta la contribución que consiste en el diseño de la superficie de deslizamiento y su demostración de convergencia en tiempo finito además del diseño del control por modos deslizantes basado en la representación completa del estado, dicha ley de control es obtenida mediante el planteo de una LMI (Boyd, 1994) basada en una ecuación de Ricatti (ARE) y utilizando el Complemento de Schur en la sección III. En la siguiente sección IV se muestra la simulación del control propuesto en la sección III y por último en la sección V se muestran las conclusiones y trabajos futuros.

## 2. Problemática

Usando la formulación por Euler-Lagrange (Garcia, 2005; Castillo 2007) para el modelo de un UAV, tomando en cuenta el vector de posiciones  $q = (x, y, z, \phi, \theta, \psi)$  y el vector de velocidades  $\dot{q} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ . El modelo dinámico del sistema, descrito en la Figura 1, es el siguiente:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -u \sin \theta, \\ m\ddot{y} &= u \cos \theta \sin \phi, \\ m\ddot{z} &= u \cos \theta \cos \phi - mg, \\ \dot{\psi} &= \tau \psi, \\ \dot{\theta} &= \tau \theta, \\ \dot{\phi} &= \tau \phi. \end{aligned}$$

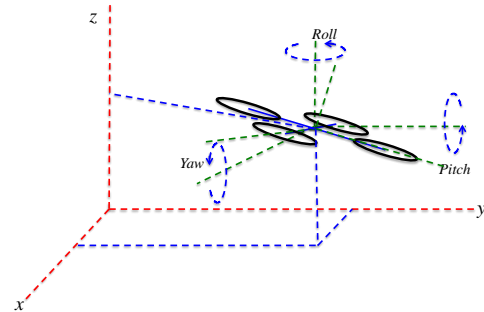


Figura 1. Representación del UAV en el espacio.

Aplicando un cambio de variable de la siguiente forma

$$\begin{aligned} x_1 &= x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = \phi, x_5 = \theta, x_6 = \psi, x_7 = \dot{x}, \\ x_8 &= \dot{y}, x_9 = \dot{z}, x_{10} = \dot{\phi}, x_{11} = \dot{\theta}, x_{12} = \dot{\psi}. \end{aligned}$$

Con el cambio de variable se pueden generar 2 vectores

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Tomando la ecuación (1) estructura de un sistema no lineal, se puede representar como:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(x) \end{bmatrix},$$

donde

$$f_1(x) = \bar{0}_6, f_2(x) = \begin{bmatrix} \bar{0}_2 \\ -g \\ \bar{0}_3 \end{bmatrix}, g_2(x) = \begin{bmatrix} k_{3 \times 1} & \bar{0}_{3 \times 3} \\ \bar{0}_{3 \times 1} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix},$$

donde

$$k = \left[ \frac{-\sin(x_5)}{m}, \frac{\cos(x_5)\sin(x_4)}{m}, \frac{\cos(x_5)\cos(x_4)}{m} \right]^T.$$

## 3. Diseño de superficie de deslizamiento y control

### 3-A Superficie de deslizamiento

Sea la forma general de un sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u. \quad (2)$$

Tomando un control por retroalimentación de estado de la forma:

$$u = (g_2(x)^T g_2(x))^{-1} g_2^T(x)(-f_2) + v_1,$$

cerrando el lazo de control en la ecuación (2)

$$\dot{x}_1 = f_1(x),$$

$$\dot{x}_2 = f_2 - g_2(x)(g_2^T(x)g_2(x))^{-1}g_2^T(x)(f_2) + g_2(x)v_1.$$

$$\dot{V}(\sigma) = -\sigma^T(\text{sign}(\sigma)).$$

Por lo tanto, el vector  $\dot{x}_1$  y  $\dot{x}_2$  son representados como

$$\dot{x}_1 = f_1(x)$$

$$\dot{x}_2 = \left[ I_6 - \frac{g(x)(g^T g(x))^{-1}g^T(x)}{G(x)} \right] f_2(x) + g_2(x)v_1, \quad (3)$$

Se requiere linealizar de la forma donde  $\dot{x} \cong Ax + Bu$ , por lo que la ecuación 3 sumando y restando  $Ax + Bu$  y denotando que  $(g(x) - b)u$  son términos muy pequeños, se supone que son prácticamente cero y  $(f(x) - Ax)$  como los términos de orden superior (*h.o.t*) y  $Bu = g(x)u$  además que  $f_0(x) = f(x - Ax)$ .

$$\dot{x} = Ax + (f(x) - Ax) + Bu + (g(x) - B)u$$

$$\dot{x} = Ax + g(x)u + f_0(x),$$

En forma separada se tiene que

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + f_{0,1}(x),$$

$$\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + f_{0,2}(x) + g(x)u. \quad (4)$$

Proponiendo una superficie de deslizamiento

$$\sigma = [k_1x_1 + k_2x_2 + u]. \quad (5)$$

Para lo cual  $\sigma \in \mathbb{R}^4$ ,  $k_1x_1 \in \mathbb{R}^4$ ,  $k_2x_2 \in \mathbb{R}^4$ ,  $g(x) \in \mathbb{R}^{6 \times 4}$ ,  $u \in \mathbb{R}^4$ ,  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^6$ ,  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$ . Derivando (5) a lo largo de la trayectoria (2)

$$\dot{\sigma} = k_1\dot{x}_1 + k_2\dot{x}_2 + \dot{u}$$

$$= k_1[A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + f_{0,1}(x)]$$

$$+ k_2[A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + f_{0,2}(x) + g(x)u] + \dot{u}. \quad (6)$$

Proponiendo la función candidata a ser Lyapunov y derivándola a lo largo de las trayectorias (2)

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^T\sigma \rightarrow \dot{V}(\sigma) = \sigma^T\dot{\sigma},$$

Sustituyendo los valores de la ecuación (6)

$$\dot{V}(\sigma) = \sigma^T \left[ k_1 (A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + f_{0,1}(x)) + k_2 (A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + f_{0,2}(x) + g(x)u) + \dot{u} \right]. \quad (7)$$

Suponiendo que la ecuación (7)  $k_1$  y  $k_2$  son matrices conocidas y constantes, por lo tanto, se propone una  $\dot{u}$  de la forma:

$$\dot{u} = -k_1(A_{11}x_1 + A_{12}x_2) + u_2$$

$$-k_2(A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + g(x)u), \quad (8)$$

donde  $u_2 = -\rho \text{sign}(\sigma)$ . Por lo tanto, al sustituir  $u_2$  en la ecuación 8

$$\dot{V}(\sigma) = \sigma^T [k_1 f_{0,1}(x) + k_2 f_{0,2}(x) - \rho \text{sign}(\sigma)].$$

Se supone que por lo tanto  $f_{0,1}(x)$  como  $f_{0,2}(x)$  son acotadas.

$$\|f_{0,1}(x)\| \leq \delta_1 < \infty, \|f_{0,2}(x)\| \leq \delta_2 < \infty.$$

Por lo que

Utilizando propiedades de la norma de un vector

$$\dot{V}(\sigma) = -|\sigma| |\text{Sign}(\sigma)| = -|\sigma| = \sqrt{\sigma^T\sigma}.$$

Implicando así que

$$\dot{V}(\sigma) = -\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2}\sigma^T\sigma} = -\sqrt{2} \sqrt{v(\sigma)} = -\sqrt{2}v^{\frac{1}{2}}(\sigma).$$

Resolviendo la ecuación diferencial e integrando en los límites  $[t_0, t]$ , se concluye que  $\sigma \rightarrow 0$  en  $t = t_r$  pero no implica que el sistema (2) sea estable. Sin embargo, después de  $t_r$  la superficie de deslizamiento:

$$\sigma = 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = 0,$$

$$\dot{\sigma} = k_1\dot{x}_1 + k_2\dot{x}_2 + \dot{u} \Rightarrow k_1\dot{x}_1 + k_2\dot{x}_2 + \dot{u} = 0.$$

Tomando las ecuaciones (4) y (8)

$$k_1\dot{x}_1 = -k_2\dot{x}_2 - \dot{u} = -k_2(A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + f_{0,2}(x) + g(x)u + K_1(A_{21}x_1 + A_{22}x_2) + k_2(A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + f_{0,2}(x) + g(x)u) + \rho \text{sign}(\sigma) - k_2 f_{0,2}(x) + K_1(A_{21}x_1 + A_{22}x_2) + \rho \text{sign}(\sigma).$$

Despejando  $\dot{x}_1$  usando  $k_1^T(k_1k_1^T)^{-1}$

$$k_1^T(k_1k_1^T)^{-1}\dot{x}_1 = k_1^T(k_1k_1^T)^{-1}(A_{11}x_1 + A_{12}x_2) + k_1^T(k_1k_1^T)^{-1}[\rho \text{sign}(\sigma) - k_2 f_{0,2}(x)].$$

$$\dot{x}_1 = (A_{11}x_1 + A_{12}x_2) + k_1^T(k_1k_1^T)^{-1}[\rho \text{sign}(\sigma) - k_2 f_{0,2}(x)].$$

A partir de la ecuación de la superficie de deslizamiento y de la ecuación (4)

$$\sigma = 0 \Rightarrow \sigma = k_1x_1 + k_2x_2 + u = 0 \Rightarrow u = -k_1x_1 - k_2x_2.$$

Si

$$\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + f_{0,2}(x) + g(x)(-k_1x_1 - k_2x_2).$$

Proponiendo una región de trabajo cerca del punto de operación

$$g(x)|_{x=x_{op}} \cong B,$$

$$\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22} + B(-k_1x_1 - k_2x_2 + f_{0,2}(x),) = A_{21}x_1 + A_{22} - Bkx + f_{0,2}(x).$$

También representado de la forma reducida

$$\dot{X} = \bar{A}X - \bar{B}kX + \bar{f}_0(X). \quad (9)$$

donde

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12 \times 12}, A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} \in \mathbb{R}^{6 \times 6},$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12 \times 4}, 0, B \in \mathbb{R}^{6 \times 4},$$

$$k = [k_1 \quad k_2] \in \mathbb{R}^{4 \times 12}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}^{4 \times 6},$$

$$X = [x_1 \quad x_2] \in \mathbb{R}^{12}, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^6,$$

$$\bar{f}_0 = \underbrace{\begin{bmatrix} k_1^T(k_1k_1^T)^{-1} & \rho - k_2 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\gamma} \underbrace{\begin{bmatrix} \text{sign}(\sigma) \\ f_{0,2}(X) \end{bmatrix}}_{\kappa}, \gamma \in \mathbb{R}^{12 \times 12}, \kappa \in \mathbb{R}^{12}.$$

Note que de la ecuación (9) se los siguiente:

$$\dot{X} = (\bar{A} - \bar{B}k)X + \gamma\kappa.$$

Proponiendo una función de energía

$$V(x) = X^T P X,$$

donde  $0 < P \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$ . Derivando a lo largo de las trayectorias de 9 y sustituyendo

$$\dot{V}(x) = X^T P \dot{X} + \dot{X}^T P X = \mu^T \begin{bmatrix} P(\bar{A} - \bar{B}k) + (\bar{A} - \bar{B}k)^T P & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \mu. \quad (10)$$

donde  $\mu = [X \quad \kappa\gamma]$ . Sumando y restando un  $\alpha V(x)$  y  $\epsilon_1 \kappa^T \kappa$  a la ecuación (2.19)

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \mu^T \begin{bmatrix} P(\bar{A} - \bar{B}k) + (\bar{A} - \bar{B}k)^T P & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \mu + \alpha V(x) \\ &\quad - \alpha v(x) + \epsilon_1 \kappa^T \kappa - \epsilon_1 \kappa^T \kappa \\ &= \mu^T \begin{bmatrix} P(\bar{A} - \bar{B}k) + (\bar{A} - \bar{B}k)^T P & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \mu \\ &\quad + \alpha V(x) - \epsilon_1 \kappa^T \kappa. \end{aligned}$$

Observando que  $f_{0,2}(x)$  está acotada y que la norma de la función signo es la unidad, obteniendo

$$\begin{aligned} \kappa &= \begin{bmatrix} \text{sign}(\sigma) \\ f_{0,2}(x) \end{bmatrix} \Rightarrow \kappa^T \kappa = \\ \begin{bmatrix} \text{sign}^T(\sigma) & f_{0,2}^T(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{sign}(\sigma) \\ f_{0,2}(x) \end{bmatrix} &= \text{sign}^T(\sigma) \text{sign}(\sigma) + \\ f_{0,2}^T(x) f_{0,2}(x) &\leq 1 + \delta_2^2. \end{aligned} \quad (11)$$

al sustituir la ecuación (11), en (10), se define el siguiente resultado

$$\dot{V}(x) = \mu^T \underbrace{\begin{bmatrix} P(\bar{A} - \bar{B}k) + (\bar{A} - \bar{B}k)^T P + \alpha P & P \\ P & -\epsilon_1 I \end{bmatrix}}_{-\alpha V(x) + (1 + \delta_2^2)} \mu$$

Al proponer que  $\omega < 0$ , la siguiente desigualdad diferencial se satisface

$$\dot{V}(x) = -\alpha V(x) + (1 + \delta_2^2).$$

De aquí, si  $V(x)$  es una función definida positiva y  $\dot{V}(X)$  es una función definida negativa, entonces se concluye que el sistema 9 es estable exponencial y asintóticamente, si y solo si la matriz  $\omega$  es definida negativa. Por lo que se busca una matriz  $\omega < 0$ , en la cual se sabe que  $\bar{A}$  y  $\bar{B}$  son conocidas, la matriz  $P > 0$ , los valores  $\alpha, \epsilon_1 > 0$  y son nuestros parámetros de ajuste. Se desea que  $\omega < 0$ , por lo que se usa el complemento de Schur (Boyd, 1994):

$$\omega = \begin{bmatrix} P(\bar{A} - \bar{B}k) + (\bar{A} - \bar{B}k)^T + \alpha P & P \\ P & -\epsilon_1 I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

Tomando en cuenta lo siguiente:

$$\begin{aligned} S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{21} &> 0 \\ S_{22} &> 0 \end{aligned}$$

Para ello, estudio se tiene que

$$\begin{aligned} S_{11} &= [P(\bar{A} - \bar{B}k) + (\bar{A} - \bar{B}k)^T + \alpha P] \\ S_{12} &= S_{21}^T = P \end{aligned}$$

$$S_{22} = -\epsilon_1 I$$

Como el complemento de Schur es para demostrar que una matriz es definida positiva y como en este caso de estudio la matriz que se desea buscar es definida negativa se multiplica por -1

$$\begin{aligned} S_{11} &= -[P(\bar{A} - \bar{B}k) + (\bar{A} - \bar{B}k)^T + \alpha P] \\ S_{12} &= S_{21}^T = -P \\ S_{22} &= -\epsilon_1 I \end{aligned}$$

de esta manera se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} -[P(\bar{A} - \bar{B}k) + (\bar{A} - \bar{B}k)^T + \alpha P] - \frac{1}{\epsilon_1} P P &> 0 \\ P \left( \bar{B}k - \bar{A} + \frac{1}{2} \alpha I \right) + \left( \bar{B}k - \bar{A} + \frac{1}{2} \alpha I \right)^T P - \frac{1}{\epsilon_1} P^2 &> 0 \end{aligned} \quad R$$

Aplicando una transformación no singular  $\text{TRT}^T > 0$  si y solo si  $R > 0$  y T es no singular, además suponemos que  $T = P^{-1}$

$$\begin{aligned} P^{-1} \left[ P \left( \bar{B}k - \bar{A} + \frac{1}{2} \alpha I \right) + \left( \bar{B}k - \bar{A} + \frac{1}{2} \alpha I \right)^T P \right. \\ \left. - \frac{1}{\epsilon_1} P^2 \right] P^{-1} &> 0 \end{aligned}$$

$$\left( \bar{B}k - \bar{A} + \frac{1}{2} \alpha I \right) P^{-1} + P^{-1} \left( \bar{B}k - \bar{A} + \frac{1}{2} \alpha I \right)^T - \frac{1}{\epsilon_1} I > 0$$

Proponiendo  $\mathbb{X} = P^{-1}$  y  $\mathbb{Y} = kP^{-1}$

$$\bar{B}\mathbb{Y} - \left( \bar{A} + \frac{1}{2} \alpha I \right) \mathbb{X} + \mathbb{Y}^T \bar{B}^T - \mathbb{X} \left( \bar{A} + \frac{1}{2} \alpha I \right)^T > 0$$

Finalmente, al generar una solución que satisfaga esta última desigualdad se determina que el sistema será últimamente uniformemente estable.

#### 4. Resultados numéricos

En este apartado se muestra el control diseñado y el resultado numérico expuesto anteriormente. Pare esto se hace uso de la herramienta de MatLab SEDUMI para resolver la LMI y proponiendo una  $\alpha = 4$  y  $\epsilon = 0.001$ , y considerando la masa del UAV en 1 kg, así como la constante de gravedad en 9.81 m/s<sup>2</sup> tenemos como resultado la matriz  $k$

$$k_1 = \begin{bmatrix} -0.000 & 0.000 & 1.792 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.792 & 0.000 & 0.000 \\ -5.146 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & 40.867 & -0.000 \\ 0.000 & 5.146 & 0.000 & 0.000 & -0.000 & 40.867 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} -0.000 & 0.000 & 1.267 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.267 & 0.000 & 0.000 \\ -5.766 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & 4.719 & -0.000 \\ 0.000 & 5.766 & 0.000 & 0.000 & -0.000 & 4.719 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = 0_{6 \times 6}, A_{12} = I_{6 \times 6}, A_{22} = 0_{6 \times 6}$$

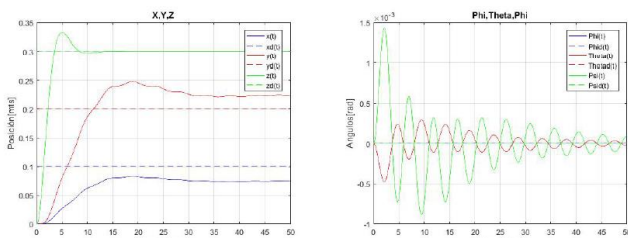
$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -9.81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9.81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u_3 = -psign(\sigma) \quad \rho = 3.5I_4 \quad g(x) = \begin{bmatrix} k & \bar{0}_{3 \times 3} \\ \bar{0}_3 & \bar{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

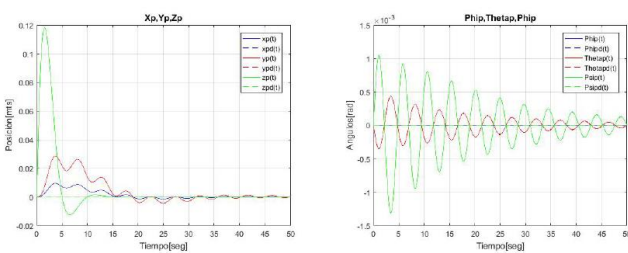
donde

$$k = \left[ \frac{-\sin(x_5)}{m}, \quad \frac{\cos(x_5)\sin(x_4)}{m}, \quad \frac{\cos(x_5)\cos(x_4)}{m} \right]^T$$

La simulación es creada en Simulink-Matlab con un paso fijo de 0.001. Con condiciones iniciales de  $x_i = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ . El objetivo es que UAV llegue a la referencia y se mantenga estable (vuelo en hover). En la Figura 2 se muestran: a) las coordenadas trasladantes, b) los ángulos de Euler, c) velocidades de las coordenadas trasladantes y d) velocidades de los ángulos de Euler.



(a) Posiciones coordenadas de translación (b) Posiciones ángulos de Euler



(c) Velocidades coordenadas de translación (d) Velocidades ángulos de Euler

Figura 2. Resultados SMC dinámico.

En las figuras 3-6, se muestran algunas de las variables de deslizamiento las cuales convergen en tiempo finito a cero.

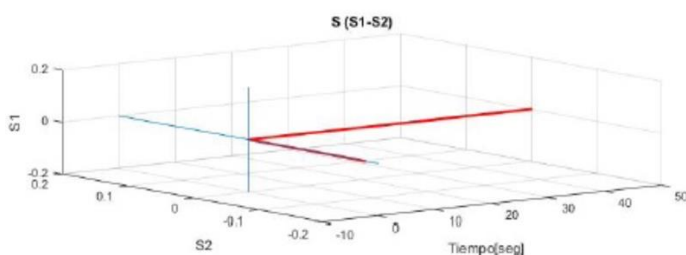


Figura 3. Variable de deslizamiento para  $S_1-S_2$ .

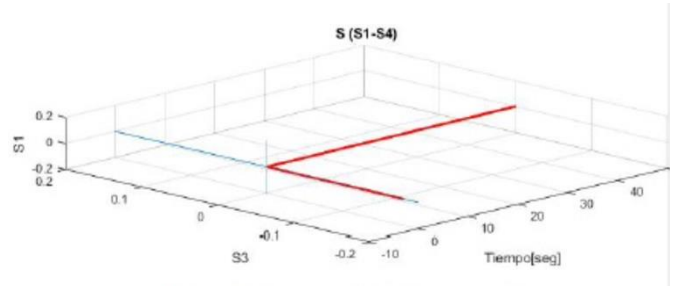


Figura 4. Variable de deslizamiento para  $S_1-S_4$ .

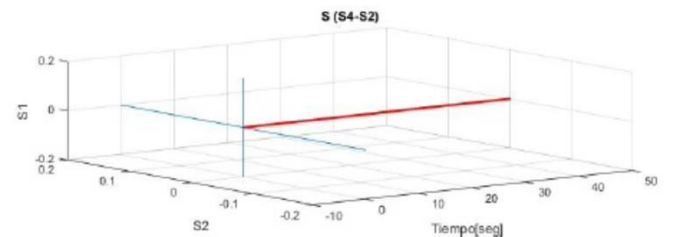


Figura 5. Variable de deslizamiento para  $S_4-S_2$ .

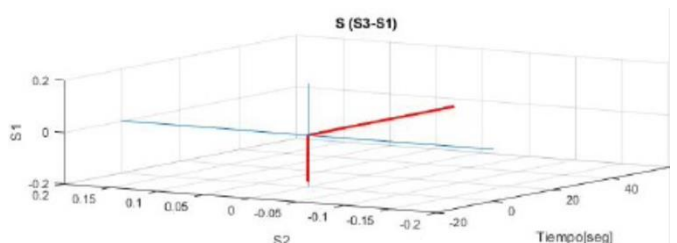
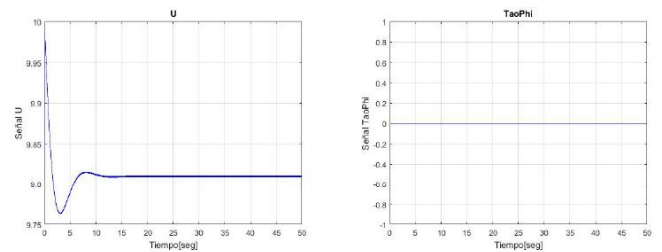
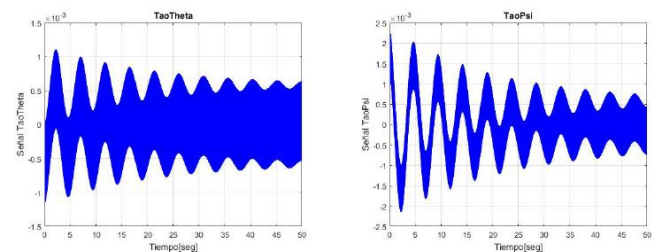


Figura 6. Variable de deslizamiento para  $S_3-S_1$ .

En la Figura 7 se muestran las señales de control que accionan los actuadores del UAV.



(a) U (b) Tao-Phi



(c) Tao-Theta (d) Tao-Psi

Figura 7. Entradas de control.

## 5. Conclusiones

El uso de modos deslizantes dinámicos, aunado con el concepto de desigualdades lineales matriciales pueden ser de

gran ayuda en para la determinación de ganancias de control para un sistema no lineal. Además, la unión de estos conceptos garantiza que las trayectorias de un sistema en lazo cerrado con un control por modos deslizantes dinámicos sean robustas. Además, con la incorporación de una pre-compensación basada en la pseudoinversa apoya en gran medida a la determinación de una estrategia de control robusta ante incertidumbres dinámicas. En el caso de estudio, se pudo diseñar una ley de control basado en la representación completa del estado para el control de un UAV, sin la necesidad de dividir la dinámica de este en subsistemas. Por otra parte, para la selección adecuada de la matriz de ganancias  $k$  y la superficie de deslizamiento propuesta, se pudo observar que después de la convergencia de la superficie de deslizamiento, esta ley de control toma el comportamiento como un PD. Además, por ser un control por modos deslizantes dinámicos, se presenta una reducción del efecto chattering sobre el actuador, sin embargo, no se garantiza la mitigación de este.

## Referencias

- Das, A., Lewis, F., & Subbarao, K. (2009). Backstepping approach for controlling a quadrotor using lagrange form dynamics. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 56(1), 127-151.
- Espinoza, T., Dzul, A., & Parada, R. (2013). Backstepping con modos deslizantes aplicado al control de seguimiento de un UAV.
- Flórez, D. R. A., Villa, M. A. M., Rojas, C. A. P., & Toledo, N. F. V. (2015). Control y estabilización de altura de un Quadrotor por Modos Deslizantes. *Memorias*.
- Carreño Aguilera, R., Patiño Ortiz, M., & Patiño Ortiz, J. (2014). Sliding mode control applied to a mini-aircraft pitch position model. *Computación y Sistemas*, 18(2), 409-416.
- Mohamed, H. A., Yang, S. S., & Moghavvemi, M. (2009, August). Sliding mode controller design for a flying quadrotor with simplified action planner. In 2009 ICCAS-SICE (pp. 1279-1283). IEEE.
- Ramírez-Rodríguez, H., Parra-Vega, V., Sanchez, A., & Garcia, O. (2013, May). Integral sliding mode backstepping control of quadrotors for robust position tracking. In 2013 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS) (pp. 423-432). IEEE.
- Merheb, A. R., Noura, H., & Bateman, F. (2013, October). Passive fault tolerant control of quadrotor uav using regular and cascaded sliding mode control. In 2013 Conference on Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol) (pp. 330-335). IEEE.
- Xiong, J. J., & Zheng, E. H. (2014). Position and attitude tracking control for a quadrotor UAV. *ISA transactions*, 53(3), 725-731.
- García, P. C., Castillo, P., Lozano, R., & Dzul, A. E. (2005). Modelling and control of mini-flying machines. Springer Science & Business Media.
- Castillo, P., García, P., Lozano, R., & Albertos, P. (2007). Modelado y estabilización de un helicóptero con cuatro rotores. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 4(1), 41-57.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., & Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Society for industrial and applied mathematics.