

Estabilidad de Lyapunov del control visual PD en un robot plano paralelo Lyapunov stability of PD visual control on a planar parallel robot

M.A. Trujano-Cabrera ^{a,*}, G. Ochoa-Ortega ^a, H.Y. Hernández-Acosta ^a

^aDivisión de Ingeniería Mecatrónica, Universidad Politécnica del Valle de México, 54910, Tultitlán, Estado de México, México.

Resumen

En este trabajo se estudia la estabilidad de reguladores, con acciones proporcional y derivativa, que usan información visual para el control de posición de robots planos paralelos. Para esto, se hace una revisión bibliográfica breve de técnicas empleadas en esta clase de mecanismos, así como de técnicas empleadas en mecanismos de cadena cinemática abierta para asegurar estabilidad. Se presenta el análisis de estabilidad utilizando funciones de Lyapunov estrictas que junto con el empleo del segundo método de estabilidad de Lyapunov aseguran que los sistemas en lazo cerrado obtenidos sean asintóticamente estables en un punto de equilibrio, diferenciándose así de los análisis usuales donde se requieren funciones candidatas de Lyapunov especiales junto con teoremas de estabilidad global como el teorema de Barbashin-Krasovski o el principio de invariancia de La Salle. Los algoritmos de control visual propuestos, haciendo uso de estimación de velocidad a partir de mediciones de posición, calculan los pares necesarios en las articulaciones activas del robot paralelo para así poder mover el órgano terminal a la posición deseada. Finalmente, el desempeño del control propuesto se evalúa en un prototipo de laboratorio y se ilustran los correspondientes resultados experimentales.

Palabras Clave: Control proporcional derivativo, Estabilidad de Lyapunov, Funciones estrictas de Lyapunov, Control visual, Estimación de velocidad.

Abstract

This work studies the stability of proportional-derivative regulators using visual information for position control of planar parallel robots. Hence, it is mentioned literature research according control of this kind of robots, as well as references where techniques are used in open kinematic chain mechanisms to ensure stability. It presents stability analysis employing strict Lyapunov functions and the second Lyapunov method to ensure closed-loop asymptotically stability at the equilibrium point. Differing this procedure from the usual analysis which require special Lyapunov candidate functions together with global stability theorems as Barbashin-Krasovsky theorem or the LaSalle's invariance principle. The proposed visual control algorithms, using velocity estimation from position measurement, calculate the joint torques on the parallel robot's active joints needed to move the end-effector to the desired position. Finally, these proposed control laws are evaluated on a laboratory prototype and the corresponding experimental results are illustrated.

Keywords: Proportional derivative control, Lyapunov stability, Strict Lyapunov functions, Visual servoing, Velocity estimation.

1. Introducción

El presente trabajo se enfocará en un robot paralelo plano con la característica de que el órgano terminal es una conexión común para los brazos, convirtiéndose en un robot paralelo plano redundante de tipo 3–RRR. Este manipulador es una combinación de redundancia cinemática y actuación redundante, y presenta un espacio de trabajo libre de singularidades y equilibrado en términos de transmisión de fuerza si se elige una configuración particular de la cinemática inversa (Kock and

Schumacher, 1998). En muchos casos, los algoritmos de control aplicados a este tipo de robots usan la cinemática directa para estimar la posición del órgano terminal (Kock and Schumacher, 2000a,b; Liu and Li, 2002; Ren et al., 2007; Cheng et al., 2003). Los trabajos (Cheng et al., 2001; Williams and Joshi, 1999) implementan experimentalmente controladores Proporcional Integral Derivativo “P.I.D.” a nivel articular para realizar seguimiento de trayectoria para robots planos de 2 y 3 Grados de Libertad “G.D.L.”, respectivamente. En (Su et al., 2006) se presenta una combinación de un controlador Proporcional

*Autor para correspondencia: miguel.trujano@upvm.edu.mx

Correo electrónico: miguel.trujano@upvm.edu.mx (Miguel Angel Trujano-Cabrera), gilberto.ochoa@upvm.edu.mx (Gilberto Ochoa-Ortega), humiko.hernandez@upvm.edu.mx (Humiko Yahaira Hernández-Acosta)

Derivativo “P.D.” tradicional y un controlador Saturado Proporcional Integral “P.I.” denominado S-PI para cada actuador de un robot paralelo de 3-GDL; estos controladores son sincronizados para estabilizar el movimiento de cada actuador y a su vez hacer que el error de sincronización sea cero; los controladores no necesitan los parámetros del modelo dinámico para su implementación y los experimentos con un prototipo demuestran la eficacia del enfoque. Métodos para diseñar basándose en el modelo dinámico se proponen en (Cheung and Hung, 2005, 2008), los cuales aseguran un alto desempeño en velocidad y precisión para robots paralelos con la tarea de empaquetado de dispositivos semiconductores. Sin embargo, los errores en los parámetros cinemáticos usados en estos controladores generan errores de posición.

La aplicación de técnicas *Visual Servoing* para el control de robots paralelos es una alternativa viable a los sistemas de control que usan la solución de la cinemática directa. *Visual servoing* o *Control visual* es un enfoque de control de robots basado en la percepción visual del robot y la ubicación de las piezas que manipula (Weiss et al., 1987; Hutchinson et al., 1996; Corke et al., 1996; Chaumette and Hutchinson, 2006, 2007). Concretamente, el control visual involucra el uso de una o más cámaras en un sistema de visión computarizado para controlar la posición del órgano terminal. Entre las ventajas del control visual podemos mencionar que mejora la exactitud de posicionamiento a pesar de incertidumbres mecánicas del manipulador y puede aplicarse en entornos no estructurados permitiendo a los robots realizar sus tareas aunque la ubicación exacta del robot y de las piezas de trabajo se desconozcan (Papanikolopoulos and Khosla, 1993).

La cámara puede colocarse en algún lugar del entorno donde se ubica el robot obteniendo imágenes del robot y de su espacio de trabajo, o bien, puede montarse en el órgano terminal del robot proporcionando imágenes solo del espacio de trabajo. Para los propósitos de este trabajo, se implementa el control visual para extraer características de la imagen obtenida con una cámara colocada sobre el espacio de trabajo del robot.

El uso de control visual en robots paralelos espaciales también se ha reportado en varios trabajos de investigación, entre ellos las referencias (Andreff et al., 2005; Andreff and Martinet, 2006; Dallej et al., 2007; Andreff and Martinet, 2009; Sebastián et al., 2007; Angel et al., 2008) consideran un sistema de visión calibrado y lo usan como sensor redundante para identificar el modelo cinemático del manipulador. Los autores toman mediciones visuales de los eslabones para realizar control Cartesiano de robots paralelos usando el modelo cinemático inverso diferencial para generar la señal de control en los actuadores. Además, estas propuestas no toman en cuenta el modelo dinámico del robot para diseñar el controlador, tampoco consideran posibles incertidumbres en el Jacobiano que se obtiene del modelo cinemático diferencial y no estudian a fondo la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Las referencias (Qi and McInroy, 2007, 2008; Dahmouche et al., 2012) toman en cuenta la dinámica del robot para el diseño de controladores que calculan los pares de control en los actuadores. Específicamente, las referencias (Qi and McInroy, 2007, 2008) usan algoritmos de lógica difusa (*fuzzy logic*) para estimar incertidumbres en el modelo dinámico del robot y lo mostrado en (Dahmouche et al., 2012) se basa en técnicas de *par calculado*.

Para realizar control a nivel espacio de tarea se utiliza el modelo cinemático inverso diferencial para obtener la matriz Jacobiana, la cual transforma la velocidad del órgano terminal a velocidades articulares. A pesar de poderse expresar en forma algebraica el modelo cinemático inverso diferencial de robots paralelos, éste depende tanto de la configuración articular y de las coordenadas de posición del órgano terminal. Para robots paralelos con un número reducido de grados de libertad, como en el caso del robot en estudio, es posible pensar en trasladar las técnicas de control visual desarrolladas para manipuladores de cadena cinemática abierta tales como las mostradas en (Weiss et al., 1987; Wilson et al., 1996; Kelly, 1996) para obtener de forma directa la posición del órgano terminal.

En (Andreff and Martinet, 2006) se menciona que las técnicas de control visual generan una velocidad de referencia para el órgano terminal que se convierte en velocidades articulares mediante el modelo cinemático inverso diferencial; la dificultad que se presenta para el control visual de robots paralelos es que el modelo cinemático inverso diferencial necesita las estimaciones de las coordenadas del órgano terminal obtenidas con la cinemática directa, la cual es difícil de obtener. En cambio, con ayuda del sistema de visión se obtienen directamente las coordenadas del órgano terminal sin necesidad de calcular la cinemática directa.

Típicamente, los controladores PD o PID consideran disponibles de forma ideal todas las mediciones de los estados del sistema, las cuales desafortunadamente en la práctica pueden ser complicadas de obtener. Aunque los manipuladores están equipados con sensores de alta precisión para medir posición, en general no están dotados con sensores de velocidad y las mediciones de velocidad frecuentemente contienen niveles altos de ruido. Además, una consideración en aplicaciones robóticas es descartar el uso de sensores de velocidad debido al incremento en costo, volumen y peso. En (Berghuis and Nijmeijer, 1993) los autores consideran el problema de regulación usando solamente mediciones de posición y proponen un controlador con parametrización de alta ganancia para asegurar estabilidad asintótica global. El método de estimación de velocidad de este trabajo usando la denominada “derivada sucia” aquí se tomará en cuenta.

Dentro de los trabajos mencionados que atacan el control visual de robots paralelos, son pocos los que comprueban en forma experimental sus resultados usando plataformas experimentales (Andreff and Martinet, 2009; Angel et al., 2008; Dahmouche et al., 2012) y que además presenten un análisis formal de estabilidad (Sebastián et al., 2007). El resto muestra simulaciones numéricas para comprobar sus resultados y no proporcionan análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado.

En el caso de los trabajos que abordan el problema de control de robots de cadena cinemática abierta, el análisis formal de estabilidad usualmente invoca el principio de invariancia de Krasovskii–LaSalle y consideran controladores basados o no basados en el modelo dinámico del robot para asegurar estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado. En (Arimoto and Miyazaki, 1984; Wen, 1989; Wen and Murphy, 1990), aseguran para controladores PID estabilidad asintótica en el sentido local cuando se aplican al control articular de robots. Controladores para resolver el problema de control de posición que aseguran estabilidad semiglobal y global son (Ortega et al., 1995; San-

tibañez and Kelly, 1998; Kelly, 1998; Cheah et al., 1999; Su et al., 2007), los cuales consideran parámetros inciertos y no se basan en el modelo dinámico del robot para ser implementados. Sin embargo, para asegurar la estabilidad asintótica invocan el principio de invariancia de LaSalle. Un caso en donde el controlador se basa en el conocimiento exacto del modelo dinámico y es utilizado para hacer seguimiento de trayectoria es el realizado en (Jafarov et al., 2005); el diseño del controlador se realiza utilizando la técnica de modos deslizantes. Por otro lado, en (Chaillet et al., 2006) la estabilidad asintótica se garantiza sin usar el principio de invariancia de LaSalle, esto mediante funciones estrictas de Lyapunov demostrando robustez de un controlador PID contra perturbaciones externas.

Este trabajo contribuye al control visual de robots paralelos presentando análisis de algoritmos de Control Visual Basados en Imagen “I.B.V.S.” por sus siglas en inglés, de tipo PD para el control de posición de un robot paralelo plano. Como primer caso de control se considera, de forma ideal, disponibles tanto las mediciones de posición como las de velocidad. El segundo caso de control propuesto considera únicamente el uso de mediciones de posición proporcionadas por el sistema de visión y los sensores angulares en las articulaciones. Con esto, se estima la velocidad a partir de la medición visual del órgano terminal para calcular el término de amortiguamiento en la ley de control.

El análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado se lleva a cabo mediante el segundo método de Lyapunov en donde se toma en cuenta la dinámica del robot con la presencia de perturbaciones y a diferencia de los trabajos mencionados previamente, se concluye estabilidad asintótica sin invocar el principio de invariancia de Barbashin-Krassovskii-LaSalle. En este contexto, la contribución presentada consiste en proponer funciones de Lyapunov definidas positivas, no acotadas radialmente y con derivada total, la cual presenta todos los estados y que sea definida negativa. A este tipo de funciones candidatas de Lyapunov se les conoce como *Funciones Estrictas de Lyapunov*; que ayudan a proporcionar una sintonización que toma en cuenta el tamaño de las condiciones iniciales del sistema en lazo cerrado. Para robots manipuladores de cadena cinemática abierta, los trabajos (Chaillet et al., 2006; Santibañez and Kelly, 1997) son algunos de los precedentes en análisis de estabilidad con funciones estrictas de Lyapunov. En (Chaillet et al., 2006) se analiza la robustez de un controlador PID cuando el manipulador está sometido a perturbaciones externas y se establecen las condiciones para asegurar estabilidad asintótica semiglobal. Simulaciones considerando la fricción de Coulomb como perturbación muestran el desempeño del controlador. En (Santibañez and Kelly, 1997) se presenta la metodología y condiciones que deben satisfacer los controladores para obtener funciones estrictas de Lyapunov basándose en la energía del sistema en lazo cerrado.

Debido a que no se puede disponer de mediciones de velocidad, una contribución adicional del trabajo es la implementación práctica de la ley de control propuesta para el caso de estimación de velocidad mencionado, la cual ayuda a verificar la estabilidad del sistema de control.

2. Preliminares

2.1. Definiciones de estabilidad

El principal objetivo en la teoría de estabilidad de Lyapunov es estudiar el comportamiento de sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias en la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^+, \quad (1)$$

donde \mathbf{x} corresponde al vector de estados del sistema. Se hace énfasis que la noción de estabilidad a definir se considera como atributo del estado de equilibrio de las ecuaciones diferenciales y no de las ecuaciones en sí. Sin pérdida de generalidad se plantea que el origen del espacio de estados, $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, es un punto de equilibrio de (1) y por tanto se enuncian a continuación las definiciones de estabilidad en el origen.

Definición 1. Estabilidad.

El origen de (1) es un punto de equilibrio estable (en el sentido de Lyapunov) si para un número $\epsilon > 0$ y un tiempo inicial $t_o \geq 0$, existe un número $\delta = \delta(t_o, \epsilon) > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x}(t_o)\| < \delta \implies \|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq t_o \geq 0. \quad (2)$$

Lo mencionado en esta definición se ilustra en la Figura 1 y en otras palabras, la definición anterior establece que “el origen es un punto de equilibrio estable si para cualquier condición inicial acotada, la solución correspondiente también está acotada”.

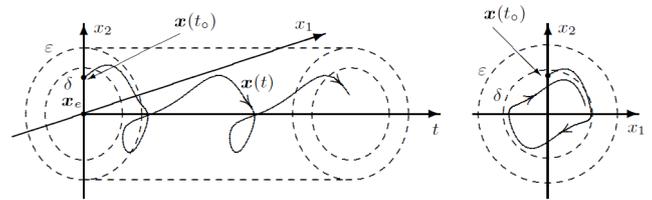


Figura 1: Noción de estabilidad.

Definición 2. Estabilidad asintótica. El origen de (1) es un punto de equilibrio asintóticamente estable si: 1. el origen es estable; 2. el origen es atraente, esto es, para cada $t_o \geq 0$, existe un número $\delta' = \delta'(t_o) > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x}(t_o)\| < \delta' \implies \|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Esta definición se ilustra en la Figura 2 y se entiende que “el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable si para cualquier condición inicial acotada, la solución del estado convergerá al mismo origen conforme el tiempo crece”.

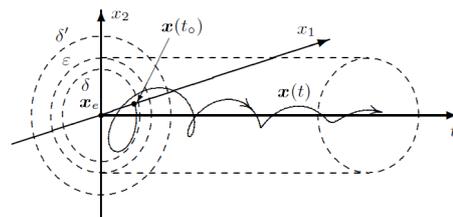


Figura 2: Estabilidad Asintótica.

2.2. Descripción cinemática del robot paralelo

La Figura 3 muestra un esquema del robot junto con un marco coordinado $x_R - y_R$. Todos los eslabones de los brazos se consideran de la misma longitud, $L = a_i = b_i$, $i = 1, 2, 3$. El término A_i representa la i -ésima articulación activa con coordenadas $\mathbf{X}_{A_i} = [x_{A_i} \ y_{A_i}]^T$ con respecto al marco de referencia $x_R - y_R$. El término P_i representa la articulación pasiva del brazo i con coordenadas $\mathbf{X}_{P_i} = [x_{P_i} \ y_{P_i}]^T$. El vector $\mathbf{X} = [x \ y]^T$ define la posición del órgano terminal, la variable θ_i denota el ángulo de la i -ésima articulación activa y la variable α_i es el ángulo de la i -ésima articulación pasiva. Estos ángulos permiten definir los siguientes vectores de posición para las articulaciones activas y pasivas

$$\mathbf{q}_a = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T \in \mathbb{R}^3, \quad (4)$$

$$\mathbf{q}_p = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]^T \in \mathbb{R}^3. \quad (5)$$

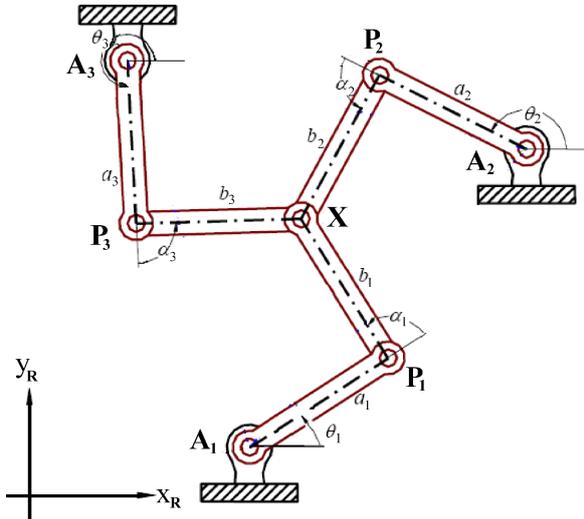


Figura 3: Esquema y marco coordinado del robot paralelo.

El vector de posiciones articulares se obtiene al combinar los vectores anteriores y se define como

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_a^T \ \mathbf{q}_p^T]^T \in \mathbb{R}^6. \quad (6)$$

Se introduce a continuación la relación entre las velocidades angulares de las articulaciones activas y la velocidad lineal del órgano terminal del robot.

$$\dot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{S}\dot{\mathbf{X}}, \quad (7)$$

donde $\dot{\mathbf{q}}_a = [\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3]^T$, $\dot{\mathbf{X}} = [\dot{x} \ \dot{y}]^T$ y $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ es la matriz Jacobiana que realiza el mapeo de velocidades del espacio de tarea al espacio articular correspondiente a las articulaciones activas.

2.3. Modelo dinámico del robot paralelo

Para el diseño y análisis de la propuesta de control, el presente trabajo considera el siguiente modelo dinámico en términos de las coordenadas del espacio de trabajo del robot

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{N} = \mathbf{S}^T \boldsymbol{\tau}_a, \quad (8)$$

donde $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es la matriz de inercia a nivel espacio de trabajo y $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es la matriz de Coriolis y fuerzas centrípetas a nivel espacio de trabajo, $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^2$ denota el vector de perturbaciones constantes que afectan al robot a nivel espacio de trabajo y $\boldsymbol{\tau}_a \in \mathbb{R}^3$ es el vector de pares articulares activos. Por otro lado, el movimiento del robot se realiza en el plano horizontal $x_R - y_R$. En consecuencia el modelo dinámico del robot paralelo no presentará fuerzas ocasionadas por el efecto de la gravedad y éste puede escribirse de la siguiente forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{S}^T \boldsymbol{\tau}_a. \quad (9)$$

La matriz de inercia \mathbf{M} y la matriz de Coriolis \mathbf{C} satisfacen las siguientes propiedades estructurales siempre que la matriz Jacobiana del robot tenga rango completo (Yiu et al., 2001; Cheng et al., 2003).

Propiedad 1. La matriz \mathbf{M} es simétrica definida positiva.

Propiedad 2. La matriz $\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C}$ es anti-simétrica.

Propiedad 3. Existe una constante positiva k_C tal que

$$\|\mathbf{C}\| \leq k_C \|\dot{\mathbf{X}}\|. \quad (10)$$

2.4. Sistema de visión: coordenadas en espacio imagen

En Figura. 4 se muestra la configuración del robot junto con el sistema de visión implementados en este trabajo, así también se observa en ella que la posición del órgano terminal del robot con respecto a este marco coordinado es denotada por $\mathbf{X} = [x \ y]^T$. La cámara, que proporciona una imagen del espacio de trabajo del robot como también del órgano terminal, se coloca perpendicularmente al plano donde el robot se mueve. El centro óptico de la cámara se localiza a una distancia z con respecto al plano $x_R - y_R$ y el eje óptico intercepta este plano en el punto $\mathbf{O} = [O_x \ O_y]^T$. La orientación de la cámara alrededor del eje óptico con respecto al lado negativo del eje x_R del marco coordinado del robot, medido en sentido de las manecillas del reloj es denotado por β y satisface la condición $-\pi/2 < \beta < \pi/2$. Se define el marco coordinado imagen denotado por $x_i - y_i$ colocado en el centro de la imagen y paralelo al marco coordinado del robot. Así, la característica visual de interés es la posición del órgano terminal $\mathbf{X}_i = [x_i \ y_i]^T$ en el marco coordinado imagen.

Considerando una transformación en perspectiva, como el modelo ideal de una cámara *pinhole* (Corke et al., 1996), determina la expresión de la posición del órgano terminal en el marco coordinado imagen proporcionada en la pantalla del sistema de visión

$$\mathbf{X}_i = \eta h R(\beta) [\mathbf{X} - \mathbf{O}] + \mathbf{c}_i, \quad (11)$$

donde el parámetro $\mathbf{c}_i = [c_{xi} \ c_{yi}]^T$ es el centro de la imagen, η es el factor de escala de la lente dado en *pixeles/m* y se considera negativo, h es el factor de aumento definido como

$$h = \frac{f}{f - z} < 0, \quad (12)$$

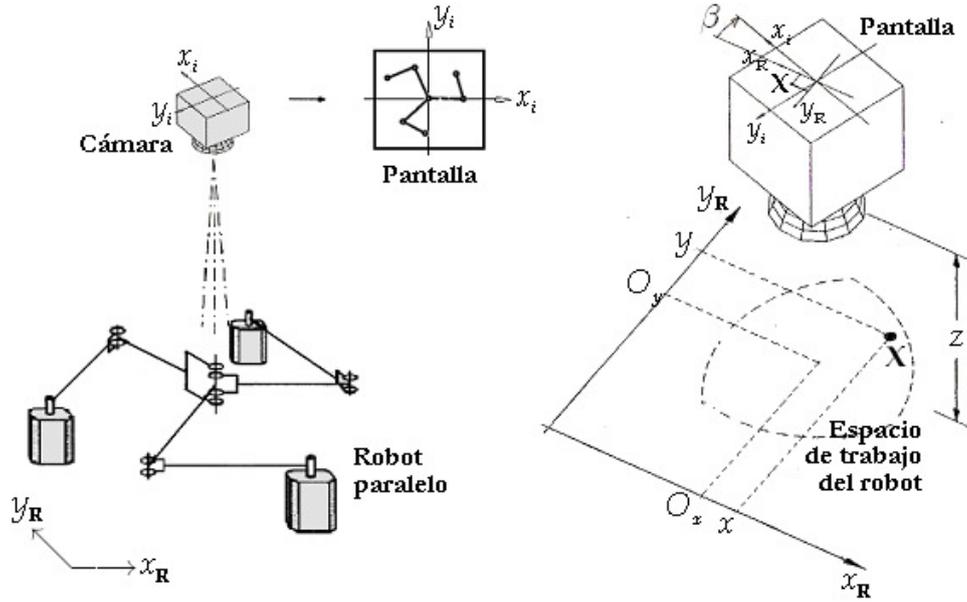


Figura 4: Izquierda - Sistema robótico en configuración cámara fija. Derecha - Marcos coordenados del robot y del sistema de visión.

donde f es la distancia focal de la cámara. La matriz $R(\beta)$, del grupo especial ortonormal, denota la rotación generada al rotar β radianes la cámara alrededor de su eje óptico en sentido de las manecillas del reloj

$$R(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Al derivar respecto del tiempo a la posición imagen expresada en (11) determina la velocidad lineal del órgano terminal expresada en coordenadas imagen de la siguiente forma

$$\dot{\mathbf{X}}_i = \eta h R(\beta) \dot{\mathbf{X}}. \quad (14)$$

Por otro lado, la posición deseada del órgano terminal en coordenadas imagen está dada por

$$\mathbf{X}_i^* = \eta h R(\beta) [\mathbf{X}^* - \mathbf{O}] + \mathbf{c}_i \quad (15)$$

donde $\mathbf{X}^* = [x^* \ y^*]^T$ denota la posición deseada del órgano terminal expresada en el marco coordenado $x_R - y_R$. Por otro lado, se considera que la posición deseada está localizada estrictamente dentro del espacio de trabajo del robot; en consecuencia, existe al menos un vector constante de ángulos en las articulaciones activas \mathbf{q}_{ad} para el cual el órgano terminal alcanza la posición deseada; en otras palabras, existe un conjunto no vacío $\mathbf{Q} \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{X}^* = f(\mathbf{q}_{ad}) \in \Omega$ para $\mathbf{q}_{ad} \in \mathbf{Q}$.

Finalmente, se define el error de posición imagen $\tilde{\mathbf{X}}_i$ como la distancia visual entre el órgano terminal y la posición deseada dada por la siguiente expresión

$$\tilde{\mathbf{X}}_i = \mathbf{X}_i^* - \mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} x_i^* \\ y_i^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Al proponer una posición deseada fija, la derivada respecto al tiempo del error de posición imagen es

$$\frac{d\tilde{\mathbf{X}}_i}{dt} = -\dot{\mathbf{X}}_i = -\eta h R(\beta) \dot{\mathbf{X}}. \quad (17)$$

3. Control Visual Proporcional Derivativo

3.1. Formulación del problema de control

Para el sistema robótico descrito en la Figura 4, al igual que en (Kelly, 1996), se hace la suposición de que el sistema de visión proporciona la posición del órgano terminal en coordenadas imagen \mathbf{X}_i y se especifica una posición fija deseada localizada estrictamente dentro del espacio de trabajo del robot en coordenadas imagen \mathbf{X}_i^* . Entonces, el problema de control del presente trabajo se establece como el diseño de una ley de control que calcule los pares de las articulaciones activas τ_a tal que el órgano terminal del robot alcance en la imagen en pantalla la posición fija deseada. En otras palabras, el propósito de control es lograr que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{X}}_i(t) = \mathbf{0}$.

Para resolver el problema establecido previamente, se propone que la ley de control debe ser de la forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{S}^T \tau_a \quad (18)$$

para determinar los pares requeridos en el modelo dinámico (8).

El vector de pares de las articulaciones activas τ_a es la solución de (18). Sin embargo, el robot paralelo es redundante y la matriz Jacobiana $\mathbf{S}^T \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ no es una matriz cuadrada lo que implica que no tiene inversa. Para determinar los pares de las articulaciones activas en (18) se usa la pseudo-inversa de Moore-Penrose (Lancaster and Tismenetsky, 1985) de la matriz \mathbf{S}^T definida como

$$(\mathbf{S}^T)^+ = \mathbf{S} (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \quad (19)$$

la cual satisface $\mathbf{S}^T (\mathbf{S}^T)^+ = \mathbf{I}$. Así, los pares de control τ_a se calculan como

$$\tau_a = (\mathbf{S}^T)^+ \mathbf{u} \quad (20)$$

que es equivalente a resolver (18) en el sentido de mínimos cuadrados. La solución (20) tendrá sentido solo si la pseudo-inversa (19) está bien definida, esto es, si la matriz Jacobiana $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ es de rango completo. La matriz Jacobiana \mathbf{S} perderá rango si el robot paralelo presenta una configuración singular y eso no pasa al considerar que el órgano terminal se mueve siempre dentro del espacio de trabajo por lo tanto la matriz Jacobiana \mathbf{S} se supone siempre de rango completo.

3.2. Ley de control IBVS PD y su análisis de estabilidad

Como primer caso de estudio, el controlador propuesto requiere la medición de la posición del órgano terminal en coordenadas imagen para determinar el error de posición imagen $\tilde{\mathbf{X}}_i$; éste a su vez determina la variable de control $\mathbf{Y} = R(\beta)^T \tilde{\mathbf{X}}_i$. También requiere las mediciones de los ángulos de las articulaciones \mathbf{q} para obtener la matriz Jacobiana \mathbf{S} que es usada para calcular la matriz pseudo-inversa $(\mathbf{S}^T)^+$. La velocidad visual $\dot{\tilde{\mathbf{X}}}_i$ se supone medible y también se supone que la matriz Jacobiana \mathbf{S} se conoce exactamente. La derivada respecto al tiempo de la variable de control $\dot{\mathbf{Y}}$ es

$$\dot{\mathbf{Y}} = -R(\beta)^T \dot{\tilde{\mathbf{X}}}_i \quad (21)$$

Entonces, utilizando (20) se propone la siguiente ley de control visual PD para obtener los pares activos τ_a

$$\tau_a = (\mathbf{S}^T)^+ [\alpha^2 k_1 \mathbf{Y} + \alpha^2 k_2 \dot{\mathbf{Y}}] \quad (22)$$

donde k_1 , k_2 y α son constantes positivas. El diagrama de bloques correspondiente a esta ley de control se muestra en la Figura 5.

Al sustituir la ley de control (22) en el modelo dinámico (9) se obtiene el siguiente sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{S}^T (\mathbf{S}^T)^+ [\alpha^2 k_1 \mathbf{Y} + \alpha^2 k_2 \dot{\mathbf{Y}}] \\ &= \alpha^2 k_1 \mathbf{Y} + \alpha^2 k_2 \dot{\mathbf{Y}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Sustituyendo $\dot{\tilde{\mathbf{X}}}_i$ dada por (14) en (21) y considerando como estados $(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}})$ permite escribir el sistema en lazo cerrado anterior como un sistema no lineal autónomo de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\eta h \dot{\mathbf{X}} \\ \mathbf{M}^{-1} \{ \alpha^2 k_1 \mathbf{Y} - \eta h \alpha^2 k_2 \dot{\mathbf{X}} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} \} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Las condiciones para establecer estabilidad asintótica de este sistema en lazo cerrado se presentan en la siguiente proposición.

Proposición 1. *Considere el modelo dinámico de un robot paralelo plano redundante (9) junto con la ley de control visual PD (22). Eligiendo la constante positiva α suficientemente grande, entonces, el punto de equilibrio $\mathbf{Y} = \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$ del sistema en lazo cerrado (24) es asintóticamente estable y la función de Lyapunov estricta que lo garantiza es la siguiente*

$$V(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}) = \frac{1}{2\alpha} \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{k_1}{\eta h} + k_2 \right) \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}}. \quad (25)$$

Demostración:

En ésta y la siguiente demostración se empleará la siguiente notación: \mathbf{I} denotará la matriz identidad de dimensión apropiada, $\|\bullet\|$ establecerá la norma Euclidiana para vectores y matrices, $\lambda_m \{\mathcal{A}\}$ y $\lambda_M \{\mathcal{A}\}$ con $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ denotarán respectivamente, el valor propio más pequeño y el valor propio más grande de la matriz \mathcal{A} .

La función candidata de Lyapunov (25) puede describirse como

$$V(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}) = \frac{1}{2\alpha} [\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{Y}]^T \mathbf{M} [\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{Y}] + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{k_1}{\eta h} + k_2 \right) \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \frac{1}{2\alpha} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}}, \quad (26)$$

la cual será una función definida positiva y radialmente no acotada probando que

$$\frac{\alpha}{2} \left(\frac{k_1}{\eta h} + k_2 \right) \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \frac{1}{2\alpha} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} \quad (27)$$

es también una función definida positiva radialmente no acotada para \mathbf{Y} .

Puesto que (27) se elimina cuando $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$, solo hay que mostrar que esta es radialmente no acotada y positiva para todo $\mathbf{Y} \neq \mathbf{0}$. Puesto que la matriz \mathbf{M} es simétrica definida positiva, por la desigualdad de Rayleigh–Ritz (Lancaster and Tismenetsky, 1985) se tiene que

$$\frac{1}{2\alpha} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} \leq \frac{1}{2\alpha} \lambda_M \{\mathbf{M}\} \|\mathbf{Y}\|^2. \quad (28)$$

Por lo tanto, se obtiene que

$$\frac{\alpha}{2} \left(\frac{k_1}{\eta h} + k_2 \right) \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \frac{1}{2\alpha} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} \geq \left[\frac{\alpha}{2} \left(\frac{k_1}{\eta h} + k_2 \right) - \frac{1}{2\alpha} \lambda_M \{\mathbf{M}\} \right] \|\mathbf{Y}\|^2. \quad (29)$$

Con lo que se muestra que (27) es una función definida positiva de \mathbf{Y} para un valor suficientemente grande de α . Por lo tanto, la función de Lyapunov candidata (25) es una función definida positiva radialmente no acotada.

Al calcular la derivada respecto del tiempo de la función candidata de Lyapunov (25) a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado (24) con uso de la Propiedad 2 y después de varias simplificaciones se obtiene

$$\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}) = -\eta h \alpha k_2 \dot{\mathbf{X}}^T \dot{\mathbf{X}} + \frac{\eta h}{\alpha} \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} - \alpha k_1 \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{X}}. \quad (30)$$

Ahora, se proporcionan cotas superiores en los siguientes términos

$$\frac{\eta h}{\alpha} \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} \leq \frac{\eta h}{\alpha} \lambda_M \{\mathbf{M}\} \|\dot{\mathbf{X}}\|^2 \quad (31)$$

$$-\frac{1}{\alpha} \mathbf{Y}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{X}} \leq \frac{k_C}{\alpha} \|\mathbf{Y}\| \|\dot{\mathbf{X}}\|^2 \quad (32)$$

donde se han usado la desigualdad de Rayleigh–Ritz y la Propiedad 3. Por lo tanto, la derivada respecto del tiempo $\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}})$ en (30) satisface

$$\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}) \leq -\eta h \alpha k_2 \|\dot{\mathbf{X}}\|^2 + \frac{\eta h}{\alpha} \lambda_M \{\mathbf{M}\} \|\dot{\mathbf{X}}\|^2 - \alpha k_1 \|\mathbf{Y}\|^2 + \frac{k_C}{\alpha} \|\mathbf{Y}\| \|\dot{\mathbf{X}}\|^2. \quad (33)$$

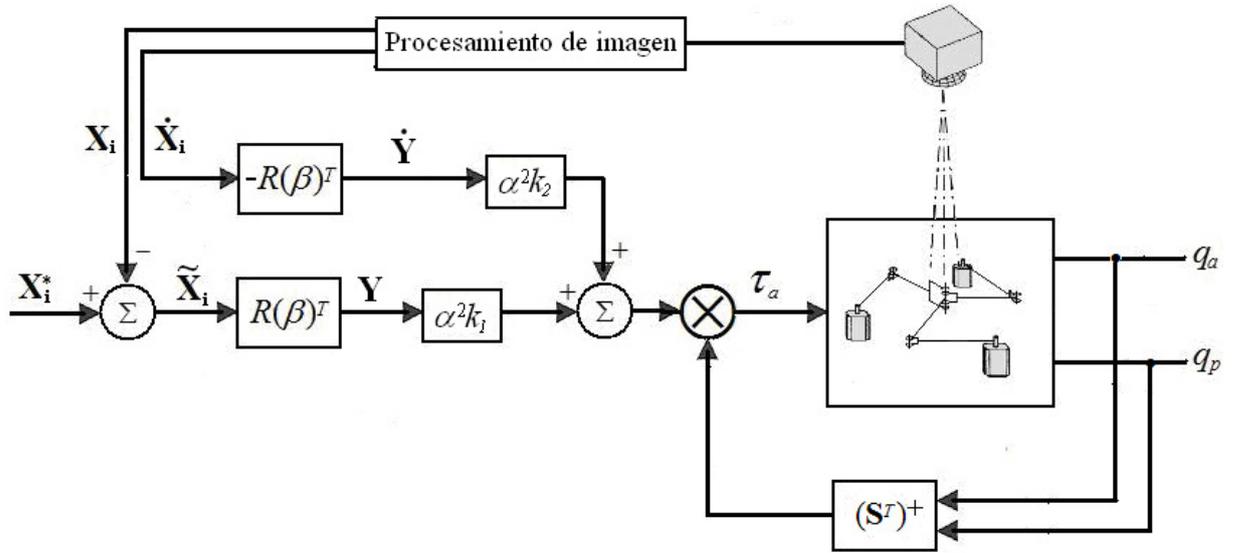


Figura 5: Diagrama de bloques de la ley de control IBVS PD.

Al definir $\varphi = [\|\mathbf{Y}\| \|\dot{\mathbf{X}}\|]^T$, $\Gamma_1 = \frac{k_C}{\alpha} \|\mathbf{Y}\| \|\dot{\mathbf{X}}\|^2$ y

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha k_1 & 0 \\ 0 & \eta h \left(\alpha k_2 - \frac{\lambda_M(\mathbf{M})}{\alpha} \right) \end{bmatrix}$$

que es una matriz definida positiva si α es suficientemente grande, permite escribir la desigualdad (33) como

$$\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}) \leq -\varphi^T \mathbf{A} \varphi + \Gamma_1 \quad (34)$$

De la función candidata de Lyapunov (25) se puede suponer lo siguiente

$$V(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}) \geq \frac{\alpha k_2}{2} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y},$$

lo que implica que

$$\|\mathbf{Y}\| \leq \sqrt{\frac{2}{\alpha k_2}} V^{1/2}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}). \quad (35)$$

Además, por la definición de φ , la siguiente desigualdad siempre es cierta

$$\|\dot{\mathbf{X}}\|^2 \leq \|\varphi\|^2. \quad (36)$$

Así, las desigualdades (35) y (36) permiten determinar la siguiente cota superior para Γ_1

$$\Gamma_1 \leq \frac{c_1}{\alpha} V^{1/2}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}) \|\varphi\|^2 \quad (37)$$

con $c_1 = k_C \sqrt{\frac{2}{\alpha k_2}}$. Entonces, la desigualdad (34) puede escribirse como

$$\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}) \leq -\left[\lambda_m\{\mathbf{A}\} - \frac{c_1}{\alpha} V^{1/2}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}) \right] \|\varphi\|^2. \quad (38)$$

Nótese que el cociente $\frac{c_1}{\alpha}$ decrece a medida que α crece y a la vez los valores propios de la matriz \mathbf{A} crecerán a medida que α crezca. Sea

$$b_1(t) = \lambda_m\{\mathbf{A}\} - \frac{c_1}{\alpha} V^{1/2}(\mathbf{Y}(t), \dot{\mathbf{X}}(t)),$$

se escoge α de tal forma que para $t = 0$, $b_1(0) > 0$. Con esta suposición, para condiciones iniciales $(\mathbf{Y}(0), \dot{\mathbf{X}}(0))$ dadas; la desigualdad (38) implica que la función de Lyapunov candidata (25) es una función decreciente. En consecuencia $b_1(0) < b_1(t)$, para todo $t \neq 0$ y asegura que la derivada $\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}})$ satisface

$$\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}) \leq -b_1(0) \|\varphi\|^2 \quad (39)$$

la cual es una función definida negativa.

Finalmente, invocando el segundo método de estabilidad de Lyapunov, ver (Khalil, 1996), se concluye que el punto de equilibrio $\mathbf{Y} = \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$ del sistema en lazo cerrado (24) es asintóticamente estable. \square

3.3. IBVS PD utilizando un estimado de la velocidad y su análisis de estabilidad

Se emplea un enfoque similar al empleado en la referencia (Berghuis and Nijmeijer, 1993) para evitar el uso de la medición de la velocidad del órgano terminal. La ley de control (22) requiere la derivada $\dot{\mathbf{Y}}$ definida en (21) para poder agregar amortiguamiento. Entonces, para evitar el uso de $\dot{\mathbf{Y}}$ se modifica la ley de control (22) como

$$\tau_a = (\mathbf{S}^T)^+ \left[\alpha^2 k_1 \mathbf{Y} + \alpha^2 k_2 \dot{\xi} \right] \quad (40)$$

$$\dot{\xi} = -2\alpha \xi + \alpha^2 \mathbf{Y} \quad (41)$$

donde α, k_1 y k_2 son constantes escalares positivas y esta ley de control agrega amortiguamiento utilizando la estimación $\dot{\xi}$ dada por (41). Esta estimación corresponde a un filtro pasaltas presentado primero en (Berghuis and Nijmeijer, 1993) y reformulado aquí ligeramente para conveniencia del análisis de estabilidad. La función de transferencia correspondiente a (41) es

$$G_{\xi}(s) = \frac{\alpha^2 s}{s + 2\alpha}. \quad (42)$$

El diagrama de Bode en la componente de magnitud de este filtro se comporta como la función de transferencia "s" a bajas frecuencias, esto es, que este filtro se comporta como el operador de derivada respecto del tiempo a bajas frecuencias. El diagrama de bloques correspondiente a la ley de control descrita por (40) y (41) se muestra en la Figura 6.

Sustituyendo la ley de control (40) en el modelo dinámico del robot paralelo (9) genera el siguiente sistema en lazo cerrado

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} = \alpha^2 k_1 \mathbf{Y} + \alpha^2 k_2 \dot{\xi}. \quad (43)$$

Al definir como estados del sistema $(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\xi})$, el sistema en lazo cerrado (43) puede ser escrito como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\eta h \dot{\mathbf{X}} \\ \mathbf{M}^{-1} \{ \alpha^2 k_1 \mathbf{Y} + \alpha^2 k_2 \dot{\xi} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} \} \\ -2\alpha \dot{\xi} - \eta h \alpha^2 \dot{\mathbf{X}} \end{bmatrix}, \quad (44)$$

el cual es un sistema diferencial autónomo con $\mathbf{Y} = \dot{\mathbf{X}} = \dot{\xi} = \mathbf{0}$ siendo un punto de equilibrio. El resultado de estabilidad se establece en la siguiente proposición.

Proposición 2. *Considere la dinámica del robot paralelo (9) junto con la ley de control dada por (40) y (41). Si el valor de α es suficientemente grande, entonces el sistema en lazo cerrado (44) en el punto de equilibrio $\mathbf{Y} = \dot{\mathbf{X}} = \dot{\xi} = \mathbf{0}$ es asintóticamente estable y la función estricta de Lyapunov que lo garantiza está dada por*

$$V(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\xi}) = \frac{\eta h}{2} \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} + \frac{\alpha^2 k_1}{2} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} + \frac{k_2}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi} - \frac{k_1}{\alpha k_2} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{\alpha} \dot{\xi}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}}. \quad (45)$$

Demostración:

Definiendo las variables

$$\psi_1 = \frac{\sqrt{\eta h}}{2} \dot{\mathbf{X}} - \frac{k_1}{\alpha k_2 \sqrt{\eta h}} \mathbf{Y}, \quad (46)$$

$$\psi_2 = \frac{\sqrt{\eta h}}{2} \dot{\mathbf{X}} - \frac{1}{\alpha \sqrt{\eta h}} \dot{\xi}, \quad (47)$$

permite escribir la función candidata de Lyapunov (45) en la siguiente forma

$$V(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\xi}) = \psi_1^T \mathbf{M} \psi_1 + \psi_2^T \mathbf{M} \psi_2 + \frac{\alpha^2 k_1}{2} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \frac{k_1^2}{\alpha^2 \eta h k_2^2} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} + \frac{k_2}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi} - \frac{1}{\alpha^2 \eta h} \dot{\xi}^T \mathbf{M} \dot{\xi}. \quad (48)$$

Ésta será una función definida positiva y radialmente no acotada probando que

$$\frac{\alpha^2 k_1}{2} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \frac{k_1^2}{\alpha^2 \eta h k_2^2} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} \quad (49)$$

es una función positiva definida y radialmente no acotada para \mathbf{Y} y

$$\frac{k_2}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi} - \frac{1}{\alpha^2 \eta h} \dot{\xi}^T \mathbf{M} \dot{\xi} \quad (50)$$

es una función definida positiva y radialmente no acotada para $\dot{\xi}$.

Los términos en (49) desaparecen cuando $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$. Por otro lado, cuando $\dot{\xi} = \mathbf{0}$ los términos en (50) desaparecen. Entonces, hay que mostrar que (49) y (50) son radialmente no acotadas para $\mathbf{Y} \neq \mathbf{0}$ y $\dot{\xi} \neq \mathbf{0}$, respectivamente. La matriz \mathbf{M} es simétrica y definida positiva, junto con la desigualdad de Rayleigh–Ritz se tiene

$$\frac{k_1^2}{\alpha^2 \eta h k_2^2} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} \leq \frac{k_1^2 \lambda_M \{\mathbf{M}\}}{\alpha^2 \eta h k_2^2} \|\mathbf{Y}\|^2, \\ \frac{1}{\alpha^2 \eta h} \dot{\xi}^T \mathbf{M} \dot{\xi} \leq \frac{\lambda_M \{\mathbf{M}\}}{\alpha^2 \eta h} \|\dot{\xi}\|^2.$$

Así, implica que

$$\frac{\alpha^2 k_1}{2} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \frac{k_1^2}{\alpha^2 \eta h k_2^2} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} \geq \left[\frac{\alpha^2 k_1}{2} - \frac{k_1^2 \lambda_M \{\mathbf{M}\}}{\alpha^2 \eta h k_2^2} \right] \|\mathbf{Y}\|^2, \\ \frac{k_2}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi} - \frac{1}{\alpha^2 \eta h} \dot{\xi}^T \mathbf{M} \dot{\xi} \geq \left[\frac{k_2}{2} - \frac{\lambda_M \{\mathbf{M}\}}{\alpha^2 \eta h} \right] \|\dot{\xi}\|^2.$$

Entonces, para un valor suficientemente grande de α , los términos en (49) y (50) son funciones definidas positivas para \mathbf{Y} y $\dot{\xi}$, respectivamente. Por lo tanto, la función candidata de Lyapunov (45) es una función definida positiva y radialmente no acotada.

La derivada respecto del tiempo de la función candidata (45) a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado (44) se escribe como

$$\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\xi}) = \eta h \dot{\mathbf{X}}^T \{ \alpha^2 k_1 \mathbf{Y} + \alpha^2 k_2 \dot{\xi} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} \} + \frac{\eta h}{2} \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} - \eta h \alpha^2 k_1 \mathbf{Y}^T \dot{\mathbf{X}} + k_2 \dot{\xi}^T (-2\alpha \dot{\xi} - \eta h \alpha^2 \dot{\mathbf{X}}) - \frac{k_1}{\alpha k_2} \mathbf{Y}^T \{ \alpha^2 k_1 \mathbf{Y} + \alpha^2 k_2 \dot{\xi} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} \} - \frac{k_1}{\alpha k_2} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} + \frac{\eta h k_1}{\alpha k_2} \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{\alpha} \dot{\xi}^T \{ \alpha^2 k_1 \mathbf{Y} + \alpha^2 k_2 \dot{\xi} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} \} + \frac{1}{\alpha} \dot{\xi}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{\alpha} \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} (-2\alpha \dot{\xi} - \eta h \alpha^2 \dot{\mathbf{X}}).$$

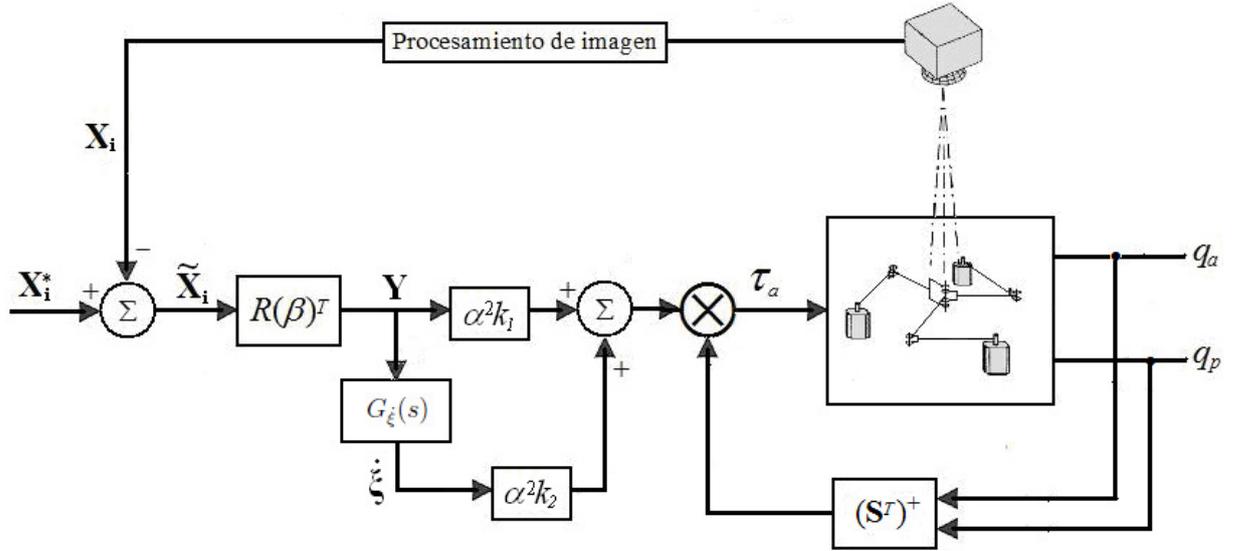


Figura 6: Diagrama de la ley de control IBVS PD con velocidad estimada.

Al usar la Propiedad 2 y simplificando términos, la derivada respecto del tiempo de la función candidata de Lyapunov (45) es

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\xi}) &= -\eta h \left(\alpha - \frac{k_1}{\alpha k_2} \right) \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} \\ &\quad - \alpha k_2 \dot{\xi}^T \dot{\xi} - \frac{\alpha k_1^2}{k_2} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \\ &\quad - 2 \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\xi} - \frac{k_1}{\alpha k_2} \mathbf{Y}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{\alpha} \dot{\xi}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{X}}. \end{aligned} \quad (51)$$

Ahora, se establecen las siguientes cotas superiores

$$\begin{aligned} -\dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} &\leq -\lambda_m \{ \mathbf{M} \} \|\dot{\mathbf{X}}\|^2, \\ -\frac{k_1}{\alpha k_2} \mathbf{Y}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{\alpha} \dot{\xi}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{X}} &\leq \frac{k_1 k_C}{\alpha k_2} \|\mathbf{Y}\| \|\dot{\mathbf{X}}\|^2 \\ &\quad + \frac{k_C}{\alpha} \|\dot{\xi}\| \|\dot{\mathbf{X}}\|^2 \end{aligned}$$

que son obtenidas de usar la desigualdad de Rayleigh–Ritz y la Propiedad 3.

Por lo tanto la derivada (51) satisface

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\xi}) &\leq -\eta h \left(\alpha - \frac{k_1}{\alpha k_2} \right) \lambda_m \{ \mathbf{M} \} \|\dot{\mathbf{X}}\|^2 - \alpha k_2 \|\dot{\xi}\|^2 \\ &\quad - \frac{\alpha k_1^2}{k_2} \|\mathbf{Y}\|^2 + \frac{k_C}{\alpha} \|\dot{\xi}\| \|\dot{\mathbf{X}}\|^2 \\ &\quad + 2 \lambda_m \{ \mathbf{M} \} \|\dot{\mathbf{X}}\| \|\dot{\xi}\| + \frac{k_1 k_C}{\alpha k_2} \|\mathbf{Y}\| \|\dot{\mathbf{X}}\|^2. \end{aligned} \quad (52)$$

Definiendo el vector $\psi = [\|\mathbf{Y}\| \|\dot{\mathbf{X}}\| \|\dot{\xi}\|]^T$, la cota $\Gamma_2 = \frac{k_C}{\alpha} \left(\frac{k_1}{k_2} \|\mathbf{Y}\| + \|\dot{\xi}\| \right) \|\dot{\mathbf{X}}\|^2$ y la matriz

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha k_1^2}{k_2} & 0 & 0 \\ 0 & \eta h \left(\alpha - \frac{k_1}{\alpha k_2} \right) \lambda_m \{ \mathbf{M} \} & -\lambda_M \{ \mathbf{M} \} \\ 0 & -\lambda_M \{ \mathbf{M} \} & \alpha k_2 \end{bmatrix}$$

que es una matriz definida positiva si α tiene un valor suficientemente grande. Entonces, la cota (52) puede ser escrita como

$$\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\xi}) \leq -\psi^T \mathbf{G} \psi + \Gamma_2. \quad (53)$$

Teniendo en cuenta que la función candidata de Lyapunov (45) es definida positiva, las siguientes cotas se establecen

$$\|\mathbf{Y}\| \leq \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{2}{k_1}} V^{1/2}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\xi}) \quad (54)$$

$$\|\dot{\xi}\| \leq \sqrt{\frac{2}{k_2}} V^{1/2}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\xi}) \quad (55)$$

y de la definición de ψ la siguiente desigualdad siempre es cierta

$$\|\dot{\mathbf{X}}\|^2 \leq \|\psi\|^2. \quad (56)$$

Así, con uso de las cotas (54)-(56) se establece una cota superior para Γ_2

$$\Gamma_2 \leq \frac{c_2}{\alpha} V^{1/2}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\xi}) \|\psi\|^2$$

con $c_2 = k_C \left(\frac{k_1}{\alpha k_2} \sqrt{\frac{2}{k_1}} + \sqrt{\frac{2}{k_2}} \right)$. Entonces, la derivada (51) tendrá la siguiente cota superior

$$\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\xi}) \leq -\left[\lambda_m \{ \mathbf{G} \} - \frac{c_2}{\alpha} V^{1/2}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\xi}) \right] \|\psi\|^2. \quad (57)$$

Nótese que el cociente $\frac{c_2}{\alpha}$ decrece a medida que α crece. Por lo tanto, sea

$$b_2(t) = \lambda_m \{G\} - \frac{c_2}{\alpha} V^{1/2} (\mathbf{Y}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), \dot{\xi}(t)),$$

se escoge un valor de α suficientemente grande de tal forma que para $t = 0$, $b_2(0) > 0$. Entonces, por (57) implica que la función de Lyapunov (45) es una función decreciente y se tendrá que $b_2(0) < b_2(t)$ para todo $t \neq 0$. Por lo tanto, la derivada $\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\xi})$ satisface

$$\dot{V}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\xi}) \leq -b_2(0) \|\psi\|^2 \quad (58)$$

y el lado derecho es una función definida negativa.

Finalmente, invocando el segundo método de estabilidad de Lyapunov, puede concluirse que el punto de equilibrio $\mathbf{Y} = \dot{\mathbf{X}} = \dot{\xi} = \mathbf{0}$ es asintóticamente estable. \square

4. Resultados experimentales

4.1. Plataforma experimental

El robot redundante plano paralelo mostrado en Figura. 7 sirve como prototipo de laboratorio para evaluar propuestas de algoritmos de control visual. La longitud de los eslabones que componen al prototipo es de $L = 15$ cm. Tres motores de corriente directa con imán permanente de la marca *Litton Poly-Scientific*, modelo C34-L80-W40, operan las articulaciones activas a través de bandas de tiempo con un radio de 3.6:1. Para controlar los motores se usan amplificadores de modulación digital de ancho de pulso que trabajan en modo corriente de la marca *Copley Controls*, modelo *Junus 90*. Seis decodificadores absolutos magnéticos de eje en miniatura de la marca *US Digital*, modelo MA3, con una resolución de 10 bits proporcionan las mediciones de los ángulos θ_i y α_i de las articulaciones activas y pasivas, respectivamente. Estas mediciones se usan para calcular la matriz pseudo-inversa $(\mathbf{S}^T)^+$.

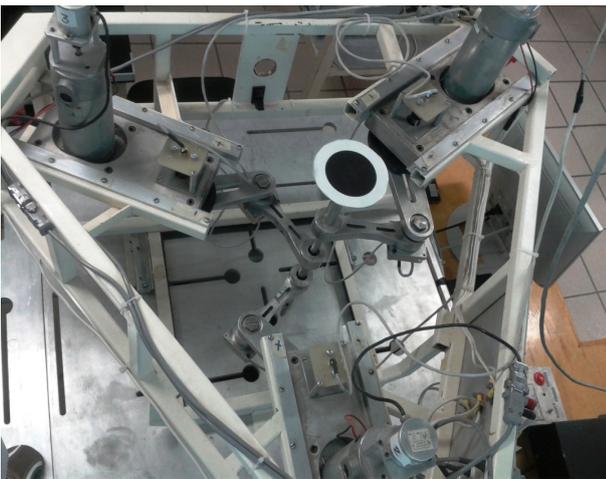


Figura 7: Plataforma experimental.

Esta arquitectura experimental es una actualización de la presentada en (Soria et al., 2006). La compone una computadora llamada *Computadora de Visión* y dotada con un procesador

Intel Core 2 Quad de 2.5 GHz que se encarga de la adquisición y procesamiento de las imágenes tomadas con una cámara marca *Dalsa*, modelo CA-1D-128A; la cual se conecta a la computadora de visión mediante una tarjeta de interfaz *National Instruments*, modelo 1422. La paquetería *Visual C++*, la librería de procesamiento de imagen *ICE* y el sistema de procesamiento de imagen *DIAS* desarrollado por (Voss et al., 1998), permiten realizar el procesamiento de imágenes requerido. Una segunda computadora llamada *Computadora de Control* que compone la arquitectura y dotada con un procesador *Intel Core 2* de 2.4 GHz, ejecuta los algoritmos de control y procesa la adquisición de datos. Esta computadora recibe información proveniente de la computadora de visión mediante un puerto RS-232 a 115 Kbaud. La transmisión y recepción de datos se realiza mediante una tarjeta de adquisición de datos *Servotogo*. Esta tarjeta mide los voltajes de las señales enviadas por los decodificadores magnéticos y proporciona voltajes de control a los amplificadores *Junus 90*. La paquetería *Matlab/Simulink R2007a*, bajo la plataforma en tiempo real *Wincon 5.2*, genera el código para poder ejecutar los algoritmos de control en tiempo real. Un contador de tiempo fija un periodo de muestreo $T_{ie} = 1$ ms, el cual corresponde al reloj principal del sistema en lazo cerrado y a su vez fija también el tiempo de muestreo de la medición de los decodificadores magnéticos. El periodo de muestreo de las imágenes es $T_{im} = 3$ ms, durante este intervalo de tiempo, la computadora de visión realiza la adquisición y procesamiento de datos; además, en este intervalo también se incluye el tiempo requerido para enviar las coordenadas del centroide del órgano terminal a la computadora de control a través del puerto RS-232.

Para poder implementar las leyes de control propuestas; se considera que la cámara usada tiene una orientación de $\beta = 0$ rads, esto supondrá que la matriz de rotación usada en la variable de control \mathbf{Y} es igual a la matriz identidad ($R(\beta) = I$). Por otro lado, la referencia $\mathbf{X}_i^* = [x_i \ y_i]^T$ se compone de la siguiente forma: la componente x_i es una señal cuadrada de 16 píxeles de amplitud con una frecuencia de 0.1 Hz más una señal constante de 80 píxeles, la componente y_i también es una señal cuadrada de 16 píxeles de amplitud con una frecuencia de 0.1 Hz más una señal constante de 70 píxeles. Así, podrán tenerse dos posiciones fijas en el espacio de trabajo que el robot tendrá que alcanzar. El siguiente filtro lineal

$$G(s) = \frac{20}{s + 20}$$

filtra las señales de referencia y sirve para suavizar sus bordes y evitar así sobreimpulsos en las señales de control. La ley de control se implementa utilizando diagrama de bloques en *MATLAB/Simulink* usando la opción de método numérico de solución *ODE 45 Domain-Price*. En la ley de control con estimación de velocidad se implementa un filtro lineal pasa-altas alimentado con la señal de error de posición imagen $\tilde{\mathbf{X}}_i$, el cual tiene como función de transferencia

$$G_d(s) = \frac{400s}{s + 400}. \quad (59)$$

4.2. *Resultados experimentales de la ley de control IBVS PD empleando estimación de velocidad*

El filtro propuesto en (41) es una descripción a conveniencia para realizar el análisis de estabilidad de la ley de control (40), cuya función de transferencia se mostró en (42). En la implementación práctica se usa el filtro (59) que tiene la estructura de un filtro lineal pasa altas, entonces, multiplicando la parametrización de la ganancia derivativa de la ley de control (40) por la función de transferencia (42), se obtiene la siguiente relación entre ambos filtros

$$\alpha^2 k_2 G_{\xi}(s) = \alpha^2 k'_2 G_d(s)$$

donde $k'_2 = \alpha k_2/2$ e implicando que $2\alpha = 400$. Las ganancias del regulador multivariable PD se obtienen siguiendo la metodología presentada en (Spong and Vidyasagar, 1989), en la cual se emplea un polinomio de segundo grado para describir la dinámica deseada del error de posicionamiento, con lo que se obtienen los valores: $\alpha^2 k_1 = 118,5$ y $\alpha^2 k_2 = 3,94$. Así, los valores de parametrización son: $\alpha = 200$, $k_1 = 2,9625 \times 10^{-3}$ y $k'_2 = 98,5 \times 10^{-6}$. El valor obtenido de α satisface lo establecido en la proposición 2, con lo que la estabilidad asintótica se garantiza, esto es, que el sistema de control alcanza la referencia deseada. También esto se cumple con valores más grandes de α , sin embargo la ley de control presentaría un incremento en sobreimpulso de la respuesta del sistema debido a que aunque las ganancias para las acciones proporcional y derivativa se ajustan de acuerdo al valor de α , la relación entre estas ganancias no garantiza un amortiguamiento adecuado para atenuar el sobreimpulso generado por el incremento de la ganancia proporcional. Por otro lado, si el valor de α fuera menor al establecido, se tendría solamente estabilidad y esto se reflejaría en la presencia de error en estado estacionario, es decir, no se alcanzaría la referencia deseada.

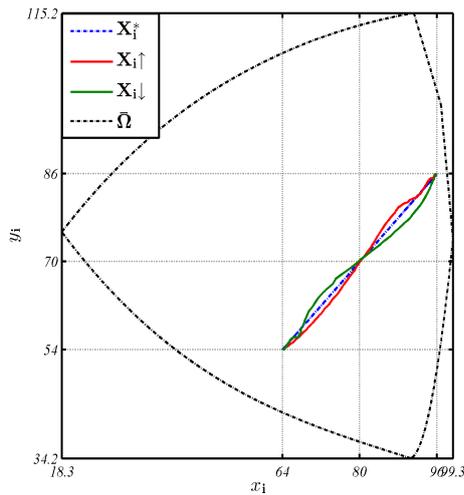


Figura 8: Desplazamiento del órgano terminal entre referencias fijas con el control IBVS PD usando un estimado de velocidad.

El comportamiento del posicionamiento se presenta en las gráficas dadas por la Figura. 8 y la Figura. 9. Se usa $\mathbf{X}_i \uparrow$ y

$\mathbf{X}_i \downarrow$ para denotar el movimiento del órgano terminal dentro de la frontera del espacio de trabajo permitida denotada por $\bar{\Omega}$.

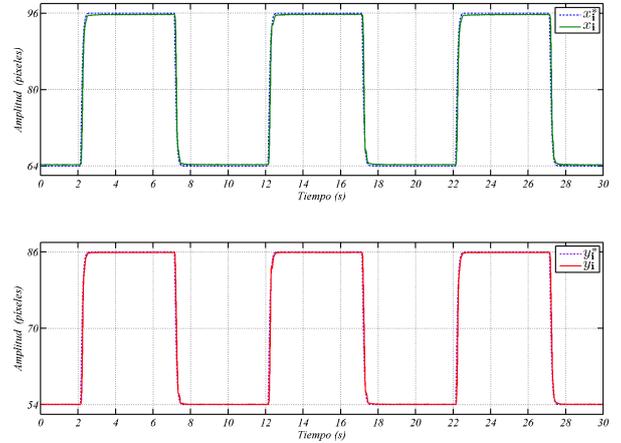


Figura 9: Respuesta del sistema en lazo cerrado con el control IBVS PD usando un estimado de velocidad.

El error de posición imagen correspondiente se muestra en Figura. 10, cuyos valores se reportan en la Tabla 1. Para cuantificar de manera precisa el desempeño del controlador se establece en la tabla de error una media aritmética de los valores absolutos de los errores reportados en ésta. La media aritmética para cada una de las componentes del error de posición imagen se definen como

$$\bar{x}_i = \frac{1}{\mathcal{K}} \sum_{j=1}^{\mathcal{K}} |\tilde{x}_{ij}|, \quad \bar{y}_i = \frac{1}{\mathcal{K}} \sum_{j=1}^{\mathcal{K}} |\tilde{y}_{ij}| \quad (60)$$

donde \mathcal{K} es el número total de valores por columna en la tabla y el índice j indica el j -ésimo renglón de los valores medidos.

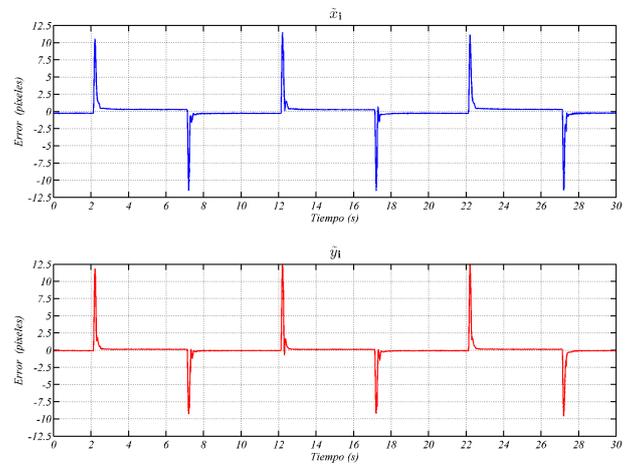


Figura 10: Error de posición imagen con la ley de control IBVS PD empleando un estimado de velocidad.

Estos resultados muestran que el controlador tiene un buen desempeño sin presentar oscilaciones al alcanzar el estado estacionario, esto es, que la referencia deseada se alcanza de manera estable y asintótica en un intervalo de tiempo finito. Esto se corrobora al apreciar las gráficas del error imagen donde los picos, que representan el movimiento transitorio debido al cambio de referencia, decrecen rápidamente indicando que se alcanzan lo antes posible las referencias deseadas. Se observa además que el error en su componente \tilde{x}_i no supera el valor de 0.4 píxeles y la componente \tilde{y}_i presenta el error más aproximado a 0. También se observa que el órgano terminal al moverse a la posición (96,86), que es la más cercana a la frontera del espacio de trabajo, el error es ligeramente mayor. Esto se debe a que uno de sus brazos del robot tiende a una configuración singular para poder alcanzar la posición deseada.

Tabla 1: Valores del error de posición imagen

Tiempo (s)	\tilde{x}_i (píxeles)	\tilde{y}_i (píxeles)
2	-0.24	-0.04
4	0.34	0.14
6	0.3	0.18
8	-0.22	-0.1
10	-0.296	0.08
12	-0.24	0.047
14	0.297	0.054
16	0.31	-0.086
18	-0.24	-0.113
20	-0.245	-0.063
22	-0.2	-0.022
24	0.32	0.2
26	0.34	0.13
28	-0.157	-0.067
30	-0.22	-0.062
Promedio valor absoluto	0,2639	0,0922

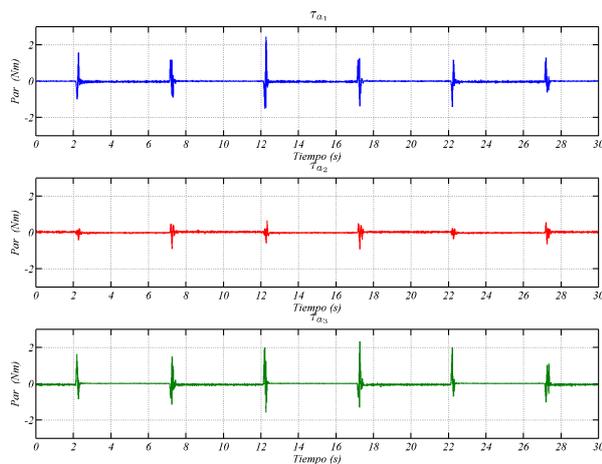


Figura 11: Pares de control en las articulaciones activas para la ley de control IBVS PD empleando un estimado de velocidad.

Los pares para las articulaciones activas se muestran en Fi-

gura. 11 y puede notarse de esas señales que los motores no presentarían saturación, implicando en un mayor tiempo de utilidad para los mismos. También estas señales describen, que para este conjunto de pruebas, los brazos controlados con los pares τ_{a1} y τ_{a3} son los que mayor movimiento realizan para alcanzar las posiciones deseadas.

5. Conclusiones

En este trabajo se presentó tanto resultados teóricos como experimentales correspondientes a algoritmos de control visual tipo PD enfocados en resolver el problema de regulación de posición de robots paralelos planos. Al considerar el esquema de control basado en imagen bajo configuración de cámara fija permite realizar el control directamente a nivel visual, obteniéndose la posición del órgano terminal en coordenadas imagen y cerrando el lazo de control sin necesidad de realizar calibración del sistema de visión y además evitando el uso de la cinemática directa.

Las leyes de control presentadas usan solamente mediciones de posición proporcionadas por el sistema de visión y por los sensores en las articulaciones y a diferencia de otros controladores visuales de robots paralelos que requieren de las mediciones de velocidad, el control propuesto toma en cuenta la estimación de velocidad usando un filtro lineal pasa-altas para la señal de error de imagen rotado.

Por otro lado, se presentan análisis de estabilidad de los sistemas en lazo cerrado. Estos análisis emplean el segundo método de estabilidad de Lyapunov, lo que permite asegurar estabilidad asintótica empleando funciones estrictas de Lyapunov y sin necesidad de usar el principio de invariancia de LaSalle como en la mayoría de análisis de estabilidad presentados en otros trabajos de control de robots. Aquí en este trabajo, el parametrizar los controladores y las funciones de Lyapunov con un parámetro de alta ganancia α permite concluir que escogiendo un valor suficientemente grande para ese parámetro se tiene una condición suficiente de estabilidad asintótica en el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado. Particularmente, para el caso de estimación de velocidad, la prueba de estabilidad toma en cuenta la dinámica del robot paralelo y la del filtro que estima la velocidad del órgano terminal.

Finalmente, los experimentos realizados en un prototipo de laboratorio muestran buen desempeño del sistema en lazo cerrado, esto de manera cualitativa al observar las señales presentadas en el conjunto de gráficas, así como de forma cuantitativa, al evaluar el desempeño usando una media aritmética de los valores absolutos de los errores registrados en tabla.

Referencias

- Andreff, N., Marchadier, A., and Martinet, P. (2005). Vision-based control of a Gough-Stewart parallel mechanism using legs observation. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Barcelona, Spain, 26:2535–2540.
- Andreff, N. and Martinet, P. (2006). Unifying kinematic modeling, identification, and control of a Gough-Stewart parallel robot into a vision-based framework. *IEEE Transactions on Robotics*, 22(6):1077–1086.
- Andreff, N. and Martinet, P. (2009). Vision-based self-calibration and control of parallel kinematic mechanism without proprioceptive sensing. *Intelligent Service Robotics*, 2(2):71–80.

- Angel, L., Traslosheros, A., Sebastián, J. M., Pari, L., Carelli, R., and Roberti, F. (2008). Vision-based control of the robotenesis system. *Recent Progress in Robotics: Viable Robotic Service to Human, Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 370:229–240.
- Arimoto, S. and Miyazaki, F. (1984). Stability and robustness of PID feedback control for robot manipulators of sensory capability. *Robotics Research I*. Cambridge: MIT, pages 783–799.
- Berghuis, H. and Nijmeijer, H. (1993). Global regulation of robots using only position measurements. *Systems and Control Letters.*, 21(4):289–293.
- Chaillet, A., Loria, A., and Kelly, R. (2006). Robustness of PID-controller manipulators with respect to external disturbances. *Proceedings of IEEE Conference on Decision & Control*, San Diego, CA, USA, pages 2949–2954.
- Chaumette, F. and Hutchinson, S. (2006). Visual servo control. i. basic approaches. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 13(4):82–90.
- Chaumette, F. and Hutchinson, S. (2007). Visual servo control. ii. advanced approaches [tutorial]. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 14(1):109–118.
- Cheah, C. C., Kawamura, S., Arimoto, S., and Lee, S. (1999). PID control of robotic manipulator with uncertain jacobian matrix. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics & Automation*, Detroit, Michigan, pages 494–499.
- Cheng, H., Liu, G., Yiu, Y. K., Xiong, Z., and Li, Z. (2001). Advantages and dynamics of parallel manipulators with redundant actuation. In *Proceedings 2001 IEEE/RJS International Conference on Intelligent Robots and Systems. Expanding the Societal Role of Robotics in the Next Millennium (Cat. No. 01CH37180)*, volume 1, pages 171–176. IEEE.
- Cheng, H., Yiu, Y.-K., and Li, Z. (2003). Dynamics and control of redundantly actuated parallel manipulators. *IEEE/ASME Transactions on mechatronics*, 8(4):483–491.
- Cheung, J. W. and Hung, Y. (2005). Modelling and control of a 2-dof planar parallel manipulator for semiconductor packaging systems. In *Proceedings, 2005 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics.*, pages 717–722. IEEE.
- Cheung, J. W. and Hung, Y. S. (2008). Robust control of a high precision 4-dof parallel manipulator. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2):15708–15713.
- Corke, P. I. et al. (1996). *Visual Control of Robots: high-performance visual servoing*. Research Studies Press Taunton, UK.
- Dahmouche, R., Andreff, N., Mezouar, Y., Ait-Aider, O., and Martinet, P. (2012). Dynamic visual servoing from sequential regions of interest acquisition. *The International Journal of Robotics Research*, 31(4):520–537.
- Dallej, T., Andreff, N., and Martinet, P. (2007). Image-based visual servoing of the I4R parallel robot without proprioceptive sensors. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Rome, Italy, pages 1709–1714.
- Hutchinson, S., Hager, G. D., and Corke, P. I. (1996). A tutorial on visual servo control. *IEEE transactions on robotics and automation*, 12(5):651–670.
- Jafarov, E. M., Parlakç̇ı, N. A., and I Stefanopulos, Y. (2005). A new variable structure PID-controller design for robot manipulators. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 13(1):122–130.
- Kelly, R. (1996). Robust asymptotically stable visual servoing of planar robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(5):759–766.
- Kelly, R. (1998). Global positioning of robot manipulators via PD control plus a class of nonlinear integral actions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(7):934–938.
- Khalil, H. (1996). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, New Jersey.
- Kock, S. and Schumacher, W. (1998). A parallel xy manipulator with actuation redundancy for high-speed and active-stiffness applications. In *Proceedings. 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 98CH36146)*, volume 3, pages 2295–2300. IEEE.
- Kock, S. and Schumacher, W. (2000a). Control of a fast parallel robot with a redundant chain and gearboxes: experimental results. In *Proceedings 2000 ICRA. Millennium Conference. IEEE International Conference on Robotics and Automation. Symposia Proceedings (Cat. No.00CH37065)*, volume 2, pages 1924–1929.
- Kock, S. and Schumacher, W. (2000b). A mixed elastic and rigid-body dynamic model of an actuation redundant parallel robot with high-reduction gears. In *Proceedings 2000 ICRA. Millennium Conference. IEEE International Conference on Robotics and Automation. Symposia Proceedings (Cat. No. 00CH37065)*, volume 2, pages 1918–1923. IEEE.
- Lancaster, P. and Tismenetsky, M. (1985). *The theory of matrices: with applications*. Elsevier.
- Liu, G. and Li, Z. (2002). A unified geometric approach to modeling and control of constrained mechanical systems. *IEEE Transactions on robotics and automation*, 18(4):574–587.
- Ortega, R., Loria, A., and Kelly, R. (1995). A semiglobally stable output feedback PI²D regulator for robot manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(8):1432–1436.
- Papanikolopoulos, N. P. and Khosla, P. K. (1993). Adaptive robotic visual tracking: Theory and experiments. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(3):429–445.
- Qi, Z. and McInroy, J. E. (2007). Nonlinear image based visual servoing using parallel robots. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Roma, Italy.
- Qi, Z. and McInroy, J. E. (2008). Improved image based visual servoing with parallel robot. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 53(4):359–379.
- Ren, L., Mills, J. K., and Sun, D. (2007). Experimental comparison of control approaches on trajectory tracking control of a 3-dof parallel robot. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 15(5):982–988.
- Santibañez, V. and Kelly, R. (1997). Strict lyapunov functions for control of robot manipulators. *Automatica*, 33(4):675–682.
- Santibañez, V. and Kelly, R. (1998). A class of nonlinearPID global regulators for robot manipulators. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics & Automation*, pages 3601–3606.
- Sebastián, J. M., Traslosheros, A., Angel, L., Roberti, F., and Carelli, R. (2007). Parallel robot high speed object tracking. *Image Analysis and Recognition, Lecture Notes in Computer Science*, 4633:295–306.
- Soria, A., Garrido, R., Vásquez, I., and R., V. (2006). Architecture for rapid prototyping of visual controllers. *Robotics and Autonomous Systems*, 54:486–495.
- Spong, M. W. and Vidyasagar, M. (1989). *Robot Dynamics and Control*. Wiley, New York.
- Su, Y., Muller, P. C., and Zheng, C. (2007). A global asymptotic stable output feedback PID regulator for robot manipulators. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Roma, Italy, pages 4484–4489.
- Su, Y., Sun, D., Ren, L., and Mills, J. K. (2006). Integration of saturated pi synchronous control and pd feedback for control of parallel manipulators. *IEEE Transactions on Robotics*, 22(1):202–207.
- Voss, K., Ortmann, W., and Suesse, H. (1998). Dias - interactive image processing system, v5.0. Technical report, Friedrich-Schiller-University Jena, Germany.
- Weiss, L., Sanderson, A., and Neuman, C. (1987). Dynamic sensor-based control of robots with visual feedback. *IEEE Journal on Robotics and Automation*, 3(5):404–417.
- Wen, J. T. (1989). PID control for manipulators. Technical report, Rensselaer Polytechnic Institute.
- Wen, J. T. and Murphy, S. H. (1990). PID control for manipulators. Technical Report 54, CIRSSSE.
- Williams, R. L. and Joshi, A. R. (1999). Planar parallel 3-rpr manipulator. In *Proceedings of the Sixth Conference on Applied Mechanisms and Robotics*, number 740. Cincinnati, OH.
- Wilson, W. J., Williams, C. C., and Bell, G. S. (1996). Relative end-effector control using cartesian position based visual servoing. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(5):684–996.
- Yiu, Y. K., Cheng, H., Xiong, Z. H., Liu, G. F., and X., L. Z. (2001). On the dynamics of parallel manipulators. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Seoul, Korea, pages 3766–3771.