


Control adaptable basado en el regresor para seguimiento de trayectorias aplicado a un quadrotor

Regressor-based adaptive control for trajectory tracking applied to a quadrotor

I. Lopez-Sanchez ^{a,*}, J. Moreno-Valenzuela ^a, R. Pérez-Alcocer ^b

^aCentro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital, Instituto Politécnico Nacional, 22435, Tijuana, Baja California, México.

^bDepartamento de Investigación en Física, Universidad de Sonora, 83000, Hermosillo, Sonora, México.

Resumen

En este documento se presenta un controlador adaptable basado en el regresor que funge como controlador de lazo externo para un quadrotor que ya cuenta con un controlador interno al cual no se tiene acceso. El controlador propuesto está concebido para tareas de seguimiento de trayectorias y operar sin conocimiento previo de los parámetros del quadrotor, así como del controlador interno. La estabilidad del origen del espacio de estados del sistema en lazo cerrado es analizada mediante la teoría de Lyapunov con lo que se obtiene la ley de adaptación de parámetros y reglas de sintonía, garantizando así la convergencia a cero del error de seguimiento de trayectoria y su derivada. Además, los resultados de las simulaciones numéricas validan la funcionalidad del controlador propuesto y se demuestra la robustez de este ante incertidumbre paramétrica.

Palabras Clave: Control adaptable, estabilidad de Lyapunov, control no lineal, incertidumbre paramétrica, quadrotor.

Abstract

This document presents a regressor-based adaptive controller that works as an external loop controller for a quadrotor that already has an inaccessible inner loop controller. The proposed controller is conceived for trajectory tracking tasks and to operate without prior knowledge of the quadrotor parameters, as well as the internal controller. The stability of the state space origin is analyzed by means of the Lyapunov theory from which the parameter adaptation law is obtained, as well as the tuning rules, thus guaranteeing the functionality of the proposed controller. In addition, the results of the numerical simulations demonstrated the functionality of the proposed controller as well its robustness to parameter uncertainties.

Keywords: Adaptive control, Lyapunov stability, nonlinear control, parameter uncertainty, quadrotor.

1. Introducción

En la actualidad existen una gran variedad de aeronaves, tanto tripuladas como no tripuladas. Entre esta gran variedad, los vehículos aéreos no tripulados (UAVs por sus siglas en inglés) se han vuelto muy populares y precisamente, de entre las diferentes clases de UAVs los quadrotoros son actualmente los más conocidos. Esto se debe a que presentan ventajas importantes con respecto a otras clases de UAVs, e.g., despegues y aterrizajes verticales, vuelo estacionario, portabilidad y simplicidad mecánica están entre las más representativas. Debido a que poseen tales características, diversas aplicaciones se han encontrado para ellos (Chen et al., 2014; Dupont et al., 2017; Wang and Ahn, 2021; Kourani and Daher, 2021). Para lograr

desempeñarse de forma efectiva y cumplir con la tarea que se le asigna, el uso de algoritmos de control es requerido. Sin embargo, el desarrollo de algoritmos de control para tales vehículos representa un desafío, principalmente debido a que son sistemas no lineales, subactuados y con dinámica fuertemente acoplada. Además, los entornos en los que operan son dinámicos y cambiantes. Por lo tanto, los algoritmos de control para dichas aeronaves deben ser capaces de garantizar su estabilidad y el cumplimiento de la tarea asignada. Existen diversas tareas de vuelo, e.g., estabilización, despegue y aterrizaje, regulación de posición y seguimiento de trayectorias, dentro de las cuales, una de las más importantes es el seguimiento de trayectorias. Por tal motivo, diversas estrategias de control se han empleado para

* Autor para correspondencia: ilopez@citedi.mx

Correo electrónico: ilopez@citedi.mx (Ivan Lopez-Sanchez), moreno@citedi.mx (Javier Moreno-Valenzuela) y ricardoramon.perez@unison.mx (Ricardo Pérez-Alcocer).

Historial del manuscrito: recibido el 09/05/2022, última versión-revisada recibida el 11/08/2022, aceptado el 27/08/2022, publicado el 05/10/2022. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v10iEspecial4.9191>



abordar este problema (Mo and Farid, 2019; Kim et al., 2019; Nguyen et al., 2020, 2021; Idrissi et al., 2022).

Se han reportado trabajos utilizando técnicas de control lineal como esquemas PID, H_∞ , LQR entre otros. Sin embargo, el desarrollo de tales esquemas requiere de la linealización del sistema. Esto implica que la representación del sistema solo será fidedigna dentro de un espacio cercano al punto de operación en el que fue linealizado el sistema. Lo que restringe la operación del sistema de forma considerable limitando así los ángulos de orientación y la velocidad de desplazamiento del vehículo, además, varios fenómenos aerodinámicos son despreciados. Para superar tales restricciones, se implementaron técnicas de control no lineales como lo son *backstepping*, linealización por realimentación, modos deslizantes, control basado en modelo, control adaptable, lógica difusa y redes neuronales. Gran parte de los esquemas no lineales son capaces de agregar robustez contra incertidumbre paramétrica, dinámica no modelada y perturbaciones externas. Cabe mencionar que la gran mayoría de todos estos esquemas se desarrollan bajo la suposición de que se tiene completo acceso a las señales y entradas de control del quadrotor. Lo que es válido para las plataformas comerciales enfocadas a la investigación o aquellas que son construidas en universidades o laboratorios con el objetivo de desarrollar y probar tales algoritmos de control. Sin embargo, dichas propuestas de control no pueden ser directamente aplicadas a quadrotores comerciales enfocados al entretenimiento, esto debido a que requieren de un piloto para realizar tareas de vuelo. A pesar de requerir de un piloto, estos vehículos cuentan con un controlador interno que se encarga de mantener la estabilidad de aeronave y sirve como interprete entre los comandos del piloto y el quadrotor.

De acuerdo a (Tomáš et al., 2011; Engel et al., 2012; Falcón et al., 2013), esto no es un impedimento para utilizarlos como plataformas de prueba de algoritmos de control o incluso aplicaciones reales. Estas plataformas comerciales de uso recreativo representan una opción viable y económica para el desarrollo y evaluación de algoritmos de control. En los trabajos de (Santana et al., 2014; Santos et al., 2015; Santana et al., 2016; Santos et al., 2016, 2017b; Rosales et al., 2018; Sarapura et al., 2020; Lopez-Sanchez et al., 2021) se ha abordado el control de esta clase de vehículos utilizando técnicas como PID con redes neuronales adaptables, control en cascada y redes neuronales de regresión generalizada. Sin embargo, estos esquemas aún requieren del conocimiento de los parámetros del sistema o en el mejor de los casos un valor aproximado de ellos. Precisamente este trabajo busca proveer de una solución a esta problemática.

La contribución de este trabajo es el desarrollo de un controlador adaptable basado en el regresor para el sistema formado por un quadrotor con un controlador de lazo interno aplicado en el seguimiento de trayectorias. Cabe resaltar que este es el primer esquema de control adaptable basado en el regresor reportado para este sistema. El controlador propuesto está concebido para no requerir del conocimiento previo de los parámetros del sistema para su operación. Se presenta el análisis de estabilidad utilizando la teoría de Lyapunov con lo que se garantiza teóricamente la funcionalidad del esquema propuesto. Además, se presenta una comparación en simulación con respecto de otros dos esquemas de control. Los resultados de las simulaciones respaldan la funcionalidad del esquema propuesto.

El documento está organizado de la siguiente manera. El modelo dinámico del sistema formado por un quadrotor con controlador de lazo interno y el objetivo de control se describen en la sección 2. El desarrollo del controlador y el análisis de estabilidad se presentan en la sección 3. En la sección 4 se presentan los resultados de la comparación en simulación y las conclusiones se dan en la sección 5.

Notación: La notación utilizada a lo largo de este documento es la siguiente. $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$ es la norma euclidiana del vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dada una matriz simétrica y positiva definida $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sus valores propios mínimo y máximo se denotan como $\lambda_{\min}\{A\}$ y $\lambda_{\max}\{A\}$, respectivamente. $\text{diag}_n\{a\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal con a en cada elemento de su diagonal.

2. Representación matemática de la dinámica de un quadrotor y objetivo de control

En esta sección se presenta el modelo dinámico de un quadrotor con respecto al marco de referencia inercial obtenido a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange, la estructura de un controlador interno cuyos parámetros no pueden ser modificados, la dinámica del sistema que resulta del quadrotor en lazo cerrado con el controlador interno y el objetivo de control.

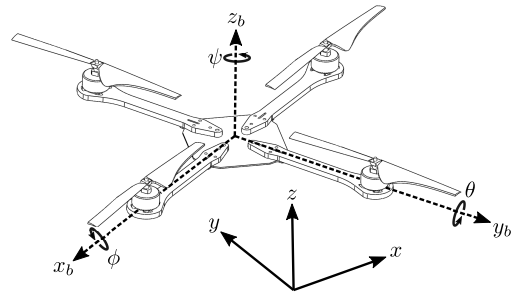


Figura 1: Representación gráfica de un quadrotor y los marcos de referencia inercial (líneas continuas) y en el cuerpo (líneas discontinuas).

2.1. Modelo dinámico

El modelo dinámico de un quadrotor descrito con respecto al marco de referencia inercial está dado como (Pérez-Alcocer et al., 2016; Moreno-Valenzuela et al., 2018; Pérez-Alcocer and Moreno-Valenzuela, 2019; Lopez-Sanchez et al., 2021)

$$m\ddot{\mathbf{p}} + m\mathbf{g}_z + D_p(\boldsymbol{\eta})\dot{\mathbf{p}} = R_3(\boldsymbol{\eta})F, \quad (1)$$

$$M(\boldsymbol{\eta})\ddot{\boldsymbol{\eta}} + C(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})\dot{\boldsymbol{\eta}} + D_\eta(\boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}} = W(\boldsymbol{\eta})^{-T}\boldsymbol{\tau}, \quad (2)$$

donde (1) y (2) representan la dinámica de posición y orientación, respectivamente, $\mathbf{p} = [x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^3$ es el vector de posición que contiene las coordenadas de la aeronave en el espacio tridimensional, $\boldsymbol{\eta} = [\phi \ \theta \ \psi]^T \in \mathbb{R}^3$ es el vector que contiene los ángulos de Euler que describen la orientación de la aeronave, siendo ϕ el ángulo de alabeo, θ el ángulo de cabeceo y ψ el ángulo de guiñada, $m \in \mathbb{R}$ es la masa, $\mathbf{g}_z = [0 \ 0 \ g]^T \in \mathbb{R}^3$, siendo g la constante de aceleración gravitacional, $D_p(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $D_\eta(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ son matrices diagonales y positivas definidas que representan los fenómenos de arrastre aerodinámico y amortiguamiento, respectivamente, $R_3(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^3$ es la tercera columna de la matriz de rotación $R(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $M(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz de inercia, $C(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz de Coriolis que representa los efectos giroscópicos y centrífugos, $W(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es una

matriz de transformación que relaciona las velocidades angulares de la aeronave con la tasa de cambio de los ángulos de Euler, $F \in \mathbb{R}$ y $\tau \in \mathbb{R}^3$ son las entradas de control, siendo F el empuje total provisto por los actuadores y τ el vector de torques. Cabe mencionar que la representación (1)-(2) es válida para ángulos de Euler $|\theta| < \pi/2$, y $\phi, \psi \in \mathbb{R}$. La representación gráfica de un quadrotor se muestra en la figura 1.

2.2. Controlador interno

De acuerdo a lo discutido en (Santos et al., 2015, 2016, 2017a,b, 2019), el caso donde un quadrotor ya cuenta con un controlador interno es comúnmente encontrado en plataformas comerciales o de uso recreativo. Dicho controlador interno ayuda al piloto a estabilizar el quadrotor sirviendo como intermediario entre los comandos del piloto y las entradas de control del modelo dinámico del quadrotor, disminuyendo así la complejidad de la tarea de pilotaje. Se supone que el controlador de lazo interno está dado por

$$F = \frac{m}{\cos(\phi) \cos(\theta)} \left(g + \frac{\dot{z}_{\max} u_z - \dot{z}}{\tau_z} \right), \quad (3)$$

$$\tau = W(\eta)^T [M(\eta)\tilde{\tau} + C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta}], \quad (4)$$

$$\tilde{\tau} = \begin{bmatrix} \omega_\phi^2 \phi_{\max} u_\phi - 2\xi_\phi \omega_\phi \dot{\phi} - \omega_\phi^2 \phi, \\ \omega_\theta^2 \theta_{\max} u_\theta - 2\xi_\theta \omega_\theta \dot{\theta} - \omega_\theta^2 \theta, \\ \frac{\dot{\psi}_{\max} u_\psi - \dot{\psi}}{\tau_\psi} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

donde ω_ϕ y ω_θ son las frecuencias naturales y ξ_ϕ y ξ_θ son las constantes de amortiguamiento de sistemas lineales de segundo orden, τ_z y τ_ψ son constantes relacionadas al tiempo de respuesta de sistemas lineales de primer orden, θ_{\max} , ϕ_{\max} , \dot{z}_{\max} y $\dot{\psi}_{\max}$ son constantes positivas y u_θ , u_ϕ , u_z y u_ψ son los comandos de entrada para el controlador interno. Es importante mencionar que el controlador interno así como los parámetros que definen su operación y comportamiento no pueden ser modificados por el piloto.

2.3. Quadrotor con controlador interno

Según el procedimiento descrito en (Lopez-Sanchez et al., 2021), el sistema que representa al modelo dinámico de un quadrotor en (1)-(2) en lazo cerrado con el controlador interno (3)-(4) está dado como

$$\dot{\mathbf{q}} = T(\psi)K_u \mathbf{u} - K_v \dot{\mathbf{q}}, \quad (6)$$

donde

$$\mathbf{q} = [x \ y \ z \ \psi]^T \in \mathbb{R}^4 \quad (7)$$

es el vector de coordenadas generalizadas que contiene la posición en el espacio tridimensional y el ángulo de guiñada, la matriz

$$T(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 & 0 \\ \sin(\psi) & -\cos(\psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

es una matriz de transformación homogénea,

$$K_u = \begin{bmatrix} g\theta_{\max} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g\phi_{\max} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{z}_{\max}}{\tau_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\dot{\psi}_{\max}}{\tau_\psi} \end{bmatrix} \quad (9)$$

y

$$K_v = \begin{bmatrix} d_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tau_z} + d_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tau_\psi} + d_\psi \end{bmatrix} \quad (10)$$

son matrices diagonales y positivas definidas que contienen parámetros relacionados al quadrotor y al controlador interno, siendo g la constante de aceleración gravitacional, ϕ_{\max} y θ_{\max} los ángulos máximos de alabeo y cabeceo, respectivamente, \dot{z}_{\max} la velocidad máxima en el eje vertical, $\dot{\psi}_{\max}$ la tasa de cambio máxima para el ángulo de guiñada, τ_z y τ_ψ parámetros del controlador interno relacionados al tiempo de respuesta del sistema, d_x , d_y , d_z y d_ψ constantes relacionadas a la masa y al arrastre aerodinámico del quadrotor y finalmente, $\mathbf{u} = [u_\theta \ u_\phi \ u_z \ u_\psi]^T \in \mathbb{R}^4$ es el vector de entradas de control cuyos valores están en el intervalo $[-1, 1]$ donde:

- u_θ es un comando de posición angular relacionado al desplazamiento en el eje x .
- u_ϕ es un comando de posición angular relacionado al desplazamiento en el eje y .
- u_z es un comando de velocidad relacionado al movimiento en el eje z .
- u_ψ es un comando de tasa de cambio del ángulo de guiñada relacionado con la rotación sobre el eje z .

Suposición 1. Considerando que los parámetros relacionados a los valores máximos para los comandos de alabeo y cabeceo del controlador interno (3)-(4) son iguales, i.e., $\phi_{\max} = \theta_{\max}$, se cumple que

$$T(\psi)K_u = K_u T(\psi).$$

2.4. Objetivo de control

Considerando que se desconocen los parámetros del quadrotor así como del controlador interno, i.e., las matrices K_u y K_v en (9) y (10) son desconocidas. Se define el error de seguimiento de trayectoria como

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{q}_d(t) - \mathbf{q} \in \mathbb{R}^4, \quad (11)$$

donde $\mathbf{q}_d(t) = [x_d(t) \ y_d(t) \ z_d(t) \ \psi_d(t)]^T \in \mathbb{R}^4$ es el vector de trayectorias deseadas y \mathbf{q} fue definido en (7). El objetivo es diseñar un controlador de lazo externo $\mathbf{u}(t) = [u_\theta(t) \ u_\phi(t) \ u_z(t) \ u_\psi(t)]^T \in \mathbb{R}^4$ que no requiera del conocimiento de los parámetros del quadrotor así como del controlador interno que garantice que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \mathbf{e}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (12)$$

La representación gráfica del sistema formado por el quadrotor con controlador interno y la interacción con el controlador de lazo externo $\mathbf{u}(t)$ se muestra en la figura 2.

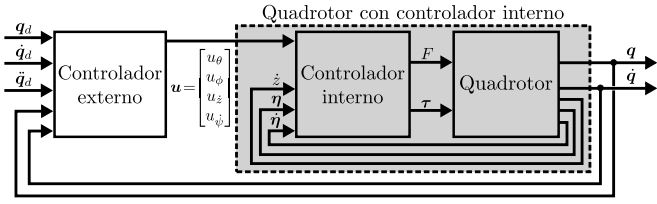


Figura 2: Diagrama del sistema quadrotor con controlador interno y el controlador de lazo externo.

3. Controlador adaptable basado en el regresor

El esquema propuesto se desarrolla para el sistema (6) como un lazo de control externo que genera los comandos necesarios para lograr la tarea de seguimiento de trayectorias y satisfacer el objetivo de control (12).

Con base en la definición del error de seguimiento de trayectorias (11), su dinámica está dada como

$$\ddot{\mathbf{e}} = \ddot{\mathbf{q}}_d + K_v \dot{\mathbf{q}} - T(\psi) K_u \mathbf{u},$$

de acuerdo a la Suposición 1 es posible multiplicar ambos miembros por K_u^{-1} para obtener

$$\Lambda_1 \ddot{\mathbf{e}} = \Lambda_1 \ddot{\mathbf{q}}_d + \Lambda_2 \dot{\mathbf{q}} - T(\psi) \mathbf{u}, \quad (13)$$

donde $\Lambda_1 = K_u^{-1}$ y $\Lambda_2 = \Lambda_1 K_v$. La representación (13) es de utilidad ya que puede ser parametrizada fácilmente como

$$\Lambda_1 \ddot{\mathbf{e}} = \Phi(\ddot{\mathbf{q}}_d, \dot{\mathbf{q}}) \Theta - T(\psi) \mathbf{u}, \quad (14)$$

siendo

$$\Phi(\ddot{\mathbf{q}}_d, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \ddot{x}_d & 0 & 0 & 0 & \dot{x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddot{y}_d & 0 & 0 & 0 & \dot{y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddot{z}_d & 0 & 0 & 0 & \dot{z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddot{\psi}_d & 0 & 0 & 0 & \dot{\psi} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 8}$$

la matriz de regresión y

$$\Theta = \left[\frac{1}{g\theta_{\max}} \quad \frac{1}{g\phi_{\max}} \quad \frac{\tau_z}{z_{\max}} \quad \frac{\tau_\psi}{\psi_{\max}} \quad \frac{d_x}{g\theta_{\max}} \quad \frac{d_y}{g\phi_{\max}} \quad \frac{d_z \tau_z + 1}{z_{\max}} \quad \frac{d_\psi \tau_\psi + 1}{\psi_{\max}} \right]^T \in \mathbb{R}^8 \quad (15)$$

el vector de parámetros. Nótese que en (14) la entrada de control \mathbf{u} ya no se está multiplicando por la matriz K_u .

Con el objetivo de estabilizar el sistema (14) y cumplir con el objetivo de control (12) se propone el siguiente controlador adaptable basado en el regresor

$$\mathbf{u} = T(\psi)^{-1} \left[K_p \mathbf{e} + K_d \dot{\mathbf{e}} + \Phi(\ddot{\mathbf{q}}_d, \dot{\mathbf{q}}) \hat{\Theta} \right], \quad (16)$$

donde K_p y $K_d \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ son matrices diagonales y positivas definidas, $\hat{\Theta} \in \mathbb{R}^8$ es la estimación del vector de parámetros (15) obtenida mediante la ley de adaptación

$$\dot{\hat{\Theta}} = N \Phi(\ddot{\mathbf{q}}_d, \dot{\mathbf{q}})^T (\beta \mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}}), \quad (17)$$

siendo $N \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ una matriz diagonal y positiva definida y $\beta \in \mathbb{R}$ una constante positiva. Entonces, la dinámica del error de seguimiento de trayectorias en (14) en lazo cerrado con el controlador (16)-(17) resulta en

$$\Lambda_1 \ddot{\mathbf{e}} = -K_p \mathbf{e} - K_d \dot{\mathbf{e}} + \Phi(\ddot{\mathbf{q}}_d, \dot{\mathbf{q}}) \tilde{\Theta},$$

donde

$$\tilde{\Theta} = \Theta - \hat{\Theta} \in \mathbb{R}^8 \quad (18)$$

es el vector de error de estimación de parámetros.

3.1. Análisis de estabilidad

El sistema en lazo cerrado formado por la dinámica del quadrotor con un controlador interno (6), el controlador adaptable basado en el regresor (16) y la ley de adaptación (17) está dado como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{e} &= \dot{\mathbf{e}}, \\ \Lambda_1 \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{e}} &= -K_p \mathbf{e} - K_d \dot{\mathbf{e}} + \Phi(\ddot{\mathbf{q}}_d, \dot{\mathbf{q}}) \tilde{\Theta}, \\ \frac{d}{dt} \tilde{\Theta} &= -N \Phi(\ddot{\mathbf{q}}_d, \dot{\mathbf{q}})^T (\beta \mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}}). \end{aligned} \quad (19)$$

Nótese que $\chi = [\mathbf{e}^T \quad \dot{\mathbf{e}}^T \quad \tilde{\Theta}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{16}$ es un punto de equilibrio del sistema (19).

Proposición 1. Considere matrices diagonales y definidas positivas $K_p, K_d \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, $N \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ y la constante $\beta > 0$ que satisfagan las siguientes condiciones

$$\beta < \sqrt{\frac{\lambda_{\max}\{K_p\}}{\lambda_{\min}\{\Lambda_1\}}}, \quad (20)$$

$$\beta > \frac{4\lambda_{\max}\{K_d\} \lambda_{\min}\{K_p\}}{\lambda_{\max}\{K_d\}^2 + 4\lambda_{\max}\{\Lambda_1\} \lambda_{\min}\{K_p\}}. \quad (21)$$

Entonces, el origen del espacio de estados $\chi = \mathbf{0}$ es uniformemente estable, el vector de error de estimación de parámetros $\tilde{\Theta}(t)$ permanece acotado y además, $\mathbf{e}(t), \dot{\mathbf{e}}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración. Considere la función candidata de Lyapunov

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T (K_p - \beta^2 \Lambda_1) \mathbf{e} + \frac{1}{2} (\beta \mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}})^T \Lambda_1 (\beta \mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}}) + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^T N^{-1} \tilde{\Theta}, \quad (22)$$

que es globalmente positiva definida, decreciente y radialmente desacotada mientras se cumpla la condición (20).

La derivada temporal de (22) a lo largo de las trayectorias de sistema en lazo cerrado está dada como

$$\dot{L} = -\beta (\mathbf{e}^T K_p \mathbf{e} + \mathbf{e}^T K_d \dot{\mathbf{e}}) - \dot{\mathbf{e}}^T (K_d - \beta \Lambda_1) \dot{\mathbf{e}} + (\beta \mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}})^T \Phi \tilde{\Theta} + \tilde{\Theta}^T N^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}, \quad (23)$$

con base en la definición del vector de error de estimación de parámetros en (18) se tiene que su derivada temporal es $\dot{\tilde{\Theta}} = -\dot{\hat{\Theta}}$. Haciendo uso de lo anterior y sustituyendo la ley de adaptación (17) en (23) se obtiene

$$\dot{L} = -\beta (\mathbf{e}^T K_p \mathbf{e} + \mathbf{e}^T K_d \dot{\mathbf{e}}) - \dot{\mathbf{e}}^T (K_d - \beta \Lambda_1) \dot{\mathbf{e}}$$

que puede ser expresada como

$$\dot{L} = -\rho^T Q \rho \quad (24)$$

siendo $\rho = [\mathbf{e}^T \quad \dot{\mathbf{e}}^T]^T \in \mathbb{R}^8$ y

$$Q = \begin{bmatrix} \beta K_p & \frac{\beta}{2} K_d \\ \frac{\beta}{2} K_d & K_d - \beta \Lambda_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 8}. \quad (25)$$

Nótese que la matriz Q en (25) es una matriz por bloques y de acuerdo al complemento de Schur (Zhang, 2006), Q es definida positiva si $\beta K_p > 0$ y $K_d - \beta \Lambda_1 - \frac{\beta}{4} K_d^2 K_p^{-1} > 0$, lo cual se garantiza si se satisface la condición (21). Entonces, mientras

se satisfagan (20) y (21), L en (22) es positiva definida y \dot{L} en (24) es semidefinida negativa. Lo que implica que el equilibrio $\chi = \mathbf{0}$ es uniformemente estable.

Una cota superior de \dot{L} es

$$\dot{L} \leq -\lambda_{\min}\{Q\} \|\rho\|^2,$$

integrando ambos miembros y resolviendo el miembro izquierdo se obtiene

$$\frac{L(0)}{\lambda_{\min}\{Q\}} \geq \int_0^t \|\rho(t)\|^2 dt,$$

con lo que se puede observar que dicha integral existe y está acotada. Aplicando el lema de Barbalat (Khalil, 2002), se concluye que $\rho(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, i.e., $e(t), \dot{e}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, garantizando así el cumplimiento del objetivo de control en (12). \square

4. Resultados en simulación

Para validar la funcionalidad del controlador propuesto y con el propósito de evaluar su desempeño se realizó una comparación en simulación numérica. La comparación consiste en realizar una tarea de seguimiento de trayectoria. El controlador propuesto es comparado con respecto a dos esquemas de control: un controlador basado en modelo y un controlador adaptable. El controlador basado en modelo corresponde a la versión no adaptable del controlador propuesto, por lo que posee la misma estructura. Las simulaciones numéricas se realizaron en MATLAB-Simulink utilizando un paso de integración fijo de 0.001 [s] y considerando como plataforma de prueba el quadrotor QBall 2 de Quanser. Los parámetros correspondientes al QBall 2 fueron tomados de (Lopez-Sanchez et al., 2021) y se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} K_u &= \text{diag}\{15.812 \ 15.812 \ 10.6 \ 2.38\}, & m &= 1.79 \text{ [kg]}, \\ K_v &= \text{diag}\{0.02 \ 0.02 \ 1.4136 \ 1.4036\}, & g &= 9.81 \text{ [m/s}^2\text{]}, \\ \omega_\theta &= \omega_\phi = 13.944, & \xi_\theta &= \xi_\phi = 1.593, & \tau_z &= \tau_\psi = 0.728. \end{aligned}$$

4.1. Esquemas utilizados en la comparación

4.1.1. Controlador basado en modelo

La versión no adaptable del controlador propuesto se utilizó en la comparación y será referida en el resto del documento como CBM. El esquema CBM está definido como

$$\mathbf{u} = T(\psi)^{-1} [K_p \mathbf{e} + K_d \dot{\mathbf{e}} + \Phi(\hat{\mathbf{q}}_d, \hat{\mathbf{q}}) \hat{\Theta}_f],$$

donde K_p y $K_d \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ son matrices diagonales y positivas definidas y $\hat{\Theta}_f \in \mathbb{R}^8$ corresponde al vector de parámetros fijos.

Las ganancias utilizadas en la simulación para el esquema CBM son las siguientes

$$\begin{aligned} K_p &= \text{diag}\{0.25 \ 0.25 \ 0.7 \ 1.5\}, \\ K_d &= \text{diag}\{0.2 \ 0.2 \ 0.5 \ 1.5\}, \end{aligned} \quad (26)$$

y el vector de parámetros fijo $\hat{\Theta}_f \in \mathbb{R}^8$ fue definido como

$$\hat{\Theta}_f = [0.0411 \ 0.0411 \ 0.0613 \ 0.2731 \ 0.0008 \ 0.0008 \ 0.0867 \ 0.3834]^T, \quad (27)$$

que corresponde a una disminución del 35% con respecto al vector de parámetros ideales

$$\Theta = [0.0632 \ 0.0632 \ 0.0943 \ 0.4202 \ 0.0013 \ 0.0013 \ 0.1334 \ 0.5898]^T.$$

4.1.2. Controlador cinemático con compensador dinámico de parámetros

El controlador adaptable considerado en la comparación fue reportado en (Santos et al., 2019) y será denotado como CCD en lo que resta del documento. El esquema CCD funge también como controlador de lazo externo para el sistema del quadrotor con controlador de lazo interno. Está compuesto por dos subsistemas: un controlador cinemático y un compensador dinámico. El controlador cinemático genera comandos de velocidad que alimentan al compensador dinámico que funge como estimador de parámetros del sistema. El controlador cinemático está dado como

$$\mathbf{u}_k = T(\psi)^{-1} [\hat{\mathbf{q}}_d + K_1 \tanh(K_2 \mathbf{e})], \quad (28)$$

donde $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ son matrices diagonales y positivas definidas. El compensador dinámico de parámetros está dado como

$$\mathbf{u} = \Upsilon(\dot{\mathbf{u}}_k, \mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{q}}) \hat{\Theta}, \quad (29)$$

donde

$$\Upsilon(\dot{\mathbf{u}}_k, \mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \Upsilon_{11} & 0 & 0 & 0 & \Upsilon_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Upsilon_{22} & 0 & 0 & 0 & \Upsilon_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Upsilon_{33} & 0 & 0 & 0 & \Upsilon_{37} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Upsilon_{44} & 0 & 0 & 0 & \Upsilon_{48} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 8},$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{11} &= \dot{u}_{k1} + k_{31}(u_{k1} - \dot{x}), & \Upsilon_{22} &= \dot{u}_{k2} + k_{32}(u_{k2} - \dot{y}), \\ \Upsilon_{33} &= \dot{u}_{k3} + k_{33}(u_{k3} - \dot{z}), & \Upsilon_{44} &= \dot{u}_{k4} + k_{34}(u_{k4} - \dot{\psi}), \\ \Upsilon_{15} &= \dot{x}, & \Upsilon_{26} &= \dot{y}, & \Upsilon_{37} &= \dot{z}, & \Upsilon_{48} &= \dot{\psi}, \end{aligned}$$

siendo $K_3 = \text{diag}\{k_{31} \ k_{32} \ k_{33} \ k_{34}\} > \mathbf{0}$ y $\hat{\Theta} \in \mathbb{R}^8$ el vector de parámetros estimados, obtenido mediante la siguiente ley de adaptación

$$\dot{\hat{\Theta}} = \Gamma^{-1} \Upsilon(\dot{\mathbf{u}}_k, \mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{q}})^T (\mathbf{u}_k - \hat{\mathbf{q}}),$$

donde $\Gamma \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ es una matriz diagonal y positiva definida. Cabe resaltar que debido a la estructura del esquema CCD, es requerida la derivada temporal $\dot{\mathbf{u}}_k$ del controlador cinemático \mathbf{u}_k en (28). Calcular tal derivada analíticamente es más complicado en contraste con el controlador propuesto que no la requiere. Además, obtener dicha derivada a través de métodos numéricos podría producir ruido de alta frecuencia durante la implementación real.

Las ganancias utilizadas en la simulación para el esquema CCD son las siguientes

$$\begin{aligned} K_1 &= \text{diag}_4\{5\}, & K_2 &= \text{diag}\{6 \ 6 \ 1 \ 1\}, \\ K_3 &= \text{diag}_4\{2.5\}, & \Gamma^{-1} &= \text{diag}_8\{6\}. \end{aligned} \quad (30)$$

El vector de parámetros estimados se inicializó como en (27), i.e., $\hat{\Theta}(t_0) = \hat{\Theta}_f$.

4.1.3. Controlador propuesto

El controlador propuesto (16)-(17) será denotado como CABR de aquí en adelante. El esquema propuesto CABR fue simulado utilizando las mismas ganancias que el esquema CBM en (26) y la matriz de ganancias de la ley de adaptación es la misma que el esquema CCD en (30), i.e., $N = \Gamma^{-1}$. De acuerdo a las condiciones (20) y (21) y con base en la selección de ganancias, $0.562 < \beta < 4.87$. Por lo tanto, cualquier valor de β dentro de ese intervalo satisfará dichas condiciones. En las simulaciones se seleccionó $\beta = 0.6$ Cabe destacar que las ganancias del esquema propuesto CABR fueron seleccionadas de esta manera con el objetivo de proveer de una comparación lo más justa posible.

4.2. Seguimiento de trayectoria

La tarea consiste en realizar el seguimiento de una trayectoria que dibuja una figura similar a un ocho en el plano (x, y) mientras la altura y el ángulo de guiñada varían. La trayectoria deseada está descrita por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} x_d &= \begin{cases} 0.8 \sin\left(\frac{2\pi}{4}t\right) (1 - e^{-0.1t^3}) & [\text{m}], \quad t \leq 2\pi, \\ 0.8 \sin\left(\frac{2\pi}{4}t\right) & [\text{m}], \quad t > 2\pi, \end{cases} \\ y_d &= \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{8}t\right) (1 - e^{-0.1t^3}) & [\text{m}], \quad t \leq 2\pi, \\ \cos\left(\frac{2\pi}{8}t\right) & [\text{m}], \quad t > 2\pi, \end{cases} \\ z_d &= \begin{cases} 0.9025 - 0.6025e^{-0.05t^3} & [\text{m}], \quad t \leq 2\pi, \\ 1 + 0.1 \sin\left(\frac{2\pi}{8}t\right) & [\text{m}], \quad t > 2\pi, \end{cases} \\ \psi_d &= \begin{cases} 30 \sin\left(\frac{2\pi}{8}t\right) (1 - e^{-0.1t^3}) & [^\circ], \quad t \leq 2\pi, \\ 30 \sin\left(\frac{2\pi}{8}t\right) & [^\circ], \quad t > 2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Las trayectorias producidas por el quadrotor en el espacio (x, y, z) al simular los esquemas CBM, CCD y CABR junto con la trayectoria deseada (x_d, y_d, z_d) se muestran en la figura 3. Como puede apreciarse, todos los esquemas son capaces de cumplir con la tarea asignada. Sin embargo, los esquemas CCD y CABR producen trayectorias más cercanas a la referencia en comparación con el esquema CBM.

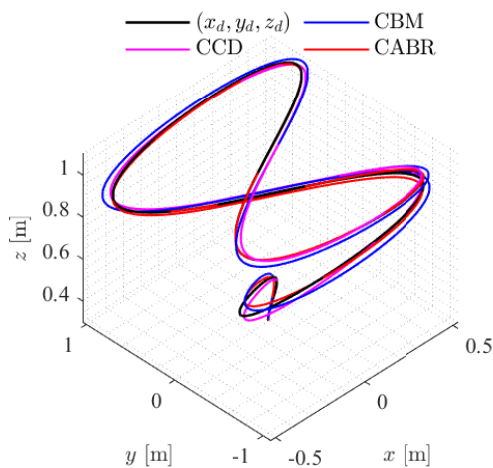


Figura 3: Trayectorias trazadas por el quadrotor en simulación utilizando los esquemas CBM, CCD y CABR.

El seguimiento de cada una de las trayectorias deseadas se ilustra en la figura 4. En la figura 5 se muestran los errores de

seguimiento de trayectoria para la posición (x, y, z) y el ángulo de guiñada ψ . En dicha figura es más sencillo apreciar que el controlador CBM tiene el peor desempeño, especialmente en el eje x . También se puede observar que a pesar de que el controlador CABR presenta algunos de los mayores sobre impulsos al inicio de la simulación, es el que brinda el mejor desempeño ya que mantiene los errores más cerca de cero a medida que avanza el tiempo. Las acciones de control generadas por los controladores durante la simulación se presentan en la figura 6. De forma general, puede verse que las acciones de control son bastante similares entre todos los esquemas. Sin embargo, la señal u_z correspondiente al controlador CCD presenta un pico que no se observa en los otros esquemas. Tal variación se hace presente justo al momento de la transición entre la trayectoria de despegue y la trayectoria en forma de ocho. Puede deberse a que el esquema CCD requiere de la derivada de la señal de control provista por el controlador cinemático, generando estos picos al presentarse cambios abruptos en la trayectoria deseada. En la figura 7 se puede apreciar la evolución de los errores de estimación de parámetros obtenidos con el esquema propuesto CABR. Nótese que todos los errores se acercan a cero conforme el tiempo avanza.

Con el objetivo de evaluar de forma cuantitativa el rendimiento de los esquemas CBM, CCD y CABR se seleccionó como índice de desempeño el valor cuadrático medio (RMS por sus siglas en inglés) del error de seguimiento de trayectorias. Los valores RMS de los errores de seguimiento fueron calculados en el intervalo $20 \text{ [s]} \leq t \leq 60 \text{ [s]}$, que corresponde al periodo donde se ha alcanzado el estado estable. Adicionalmente, se calcularon la media μ y desviación estándar σ de las señales de control dentro del mismo intervalo. Los valores RMS de los errores de seguimiento de trayectorias así como la media y desviación estándar de las acciones de control se muestran en la tabla 1. Como puede apreciarse, los valores menores fueron obtenidos con el esquema CABR, lo que indica un mejor desempeño en comparación con los esquemas CBM y CCD.

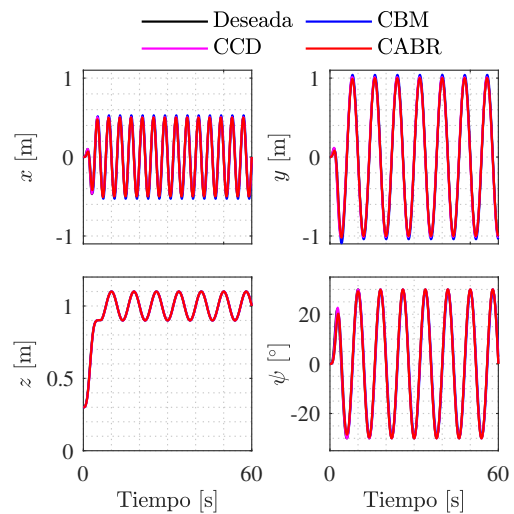


Figura 4: Evolución en el tiempo de las señales $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ y $\psi(t)$ obtenidas en simulación utilizando los esquemas CBM, CCD y CABR.

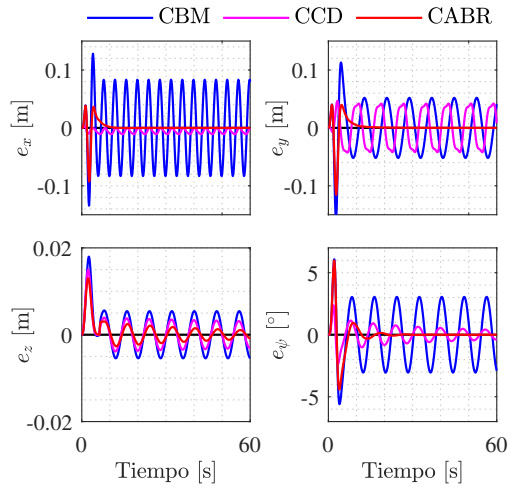


Figura 5: Evolución en el tiempo de los errores de seguimiento de trayectoria obtenidos en simulación utilizando los esquemas CBM, CCD y CABR.

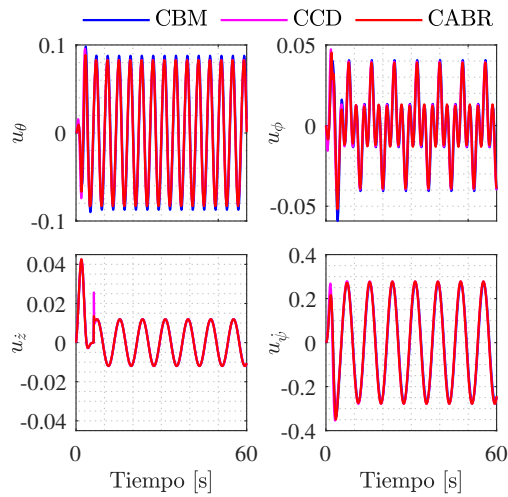


Figura 6: Acciones de control proveídas por los esquemas CBM, CCD y CABR en simulación.

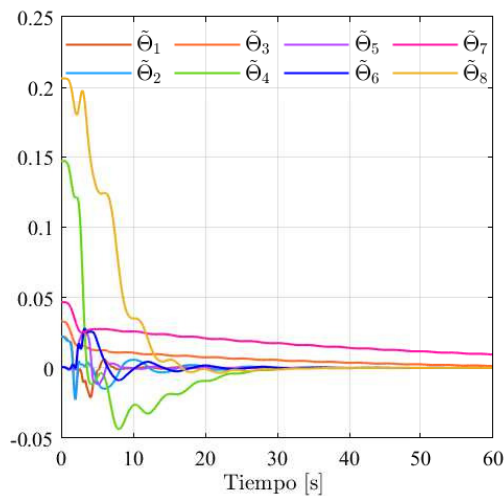


Figura 7: Evolución en el tiempo de los errores de estimación de parámetros $\hat{\Theta}(t)$ obtenidos con el esquema propuesto CABR en simulación.

Tabla 1: Valores RMS del error de seguimiento $e(t)$, media μ y desviación estándar σ de las acciones de control $u(t)$.

Señal	CBM	CCD	CABR
e_x [m]	0.05886	0.00695	0.00003
e_y [m]	0.03674	0.03220	0.00023
e_z [m]	0.00384	0.00239	0.00114
e_ψ [°]	2.15740	0.41246	0.02109
u_θ	μ	0.0003	0.0003
	σ	0.0618	0.0583
u_ϕ	μ	0.0	0.0
	σ	0.0203	0.0198
u_z	μ	0.0	0.0
	σ	0.0084	0.0085
u_ψ	μ	0.0	-0.0001
	σ	0.1913	0.1969

5. Conclusiones

En este trabajo, se presentó el desarrollo de un controlador para el seguimiento de trayectorias utilizando la técnica de control adaptable basado en el regresor. El controlador propuesto actúa como un lazo externo de control para el sistema formado por un quadrotor que ya cuenta con un controlador de lazo interno al que no se tiene acceso. Con base en los resultados obtenidos en simulación se concluye que el controlador propuesto es competente ya que produjo un mejor desempeño con respecto a otro esquema de la literatura. Se resaltó la ventaja de la adaptación de los parámetros con respecto a un esquema con parámetros fijos. Además, el controlador propuesto es más sencillo en comparación con el controlador con compensación dinámica ya que su estructura es más sencilla y no requiere de la derivada de las señales de control provistas por el controlador cinemático. El controlador propuesto está pensado para ser implementado en quadrotores comerciales, lo que es útil ya que permite aplicar dichas plataformas en la investigación y desarrollo de algoritmos de control.

Agradecimientos

Trabajo apoyado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT-Fondo Sectorial de Investigación para la Educación con el proyecto A1-S-24762 y por SIP-IPN, México. Proyecto apoyado por el Fondo Sectorial de Investigación para la Educación.

Referencias

- Chen, A. Y., Huang, Y.-N., Han, J.-Y., and Kang, S.-C. J. (2014). A review of rotorcraft unmanned aerial vehicle (UAV) developments and applications in civil engineering. *Smart Structures and Systems*, 13(6):1065–1094. DOI: <http://dx.doi.org/10.12989/sss.2014.13.6.1065>.
- Dupont, Q. F., Chua, D. K., Tashrif, A., and Abbott, E. L. (2017). Potential applications of UAV along the construction's value chain. *Procedia Engineering*, 182:165–173. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.03.155>.

- Engel, J., Sturm, J., and Cremers, D. (2012). Camera-based navigation of a low-cost quadcopter. In *Proc. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 2815–2821. DOI: 10.1109/IROS.2012.6385458.
- Falcón, P., Barreiro, A., and Cacho, M. D. (2013). Modeling of Parrot Ardrone and passivity-based reset control. In *Proc. 9th Asian Control Conference*, pages 1–6. DOI: 10.1109/ASCC.2013.6606362.
- Idrissi, M., Salami, M., and Annaz, F. (2022). A review of quadrotor unmanned aerial vehicles: Applications, architectural design and control algorithms. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 104(2):1–33. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10846-021-01527-7>.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 3 edition.
- Kim, J., Gadsden, S. A., and Wilkerson, S. A. (2019). A comprehensive survey of control strategies for autonomous quadrotors. *Canadian Journal of Electrical and Computer Engineering*, 43(1):3–16. DOI: 10.1109/CJCE.2019.2920938.
- Kourani, A. and Daher, N. (2021). Marine locomotion: A tethered UAV-buoy system with surge velocity control. *Robotics and Autonomous Systems*, 145 (103858):1–17. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.robot.2021.103858>.
- Lopez-Sanchez, I., Rossomando, F., Pérez-Alcocer, R., Soria, C., Carelli, R., and Moreno-Valenzuela, J. (2021). Adaptive trajectory tracking control for quadrotors with disturbances by using generalized regression neural networks. *Neurocomputing*, 460:243–255. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2021.06.079>.
- Mo, H. and Farid, G. (2019). Nonlinear and adaptive intelligent control techniques for quadrotor UAV—a survey. *Asian Journal of Control*, 21(2):989–1008. DOI: <https://doi.org/10.1002/asjc.1758>.
- Moreno-Valenzuela, J., Pérez-Alcocer, R., Guerrero-Medina, M., and Dzul, A. (2018). Nonlinear PID-type controller for quadrotor trajectory tracking. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 23(5):2436–2447. DOI: 10.1109/TMECH.2018.2855161.
- Nguyen, H., Kamel, M., Alexis, K., and Siegwart, R. (2021). Model predictive control for micro aerial vehicles: A survey. In *Proc. European Control Conference*, pages 1556–1563. DOI: 10.23919/ECC54610.2021.9654841.
- Nguyen, H. T., Quyen, T. V., Nguyen, C. V., Le, A. M., Tran, H. T., and Nguyen, M. T. (2020). Control algorithms for UAVs: A comprehensive survey. *EAI Endorsed Transactions on Industrial Networks and Intelligent Systems*, 7(23):1–11. DOI: 10.4108/eai.18-5-2020.164586.
- Pérez-Alcocer, R. and Moreno-Valenzuela, J. (2019). Adaptive control for quadrotor trajectory tracking with accurate parametrization. *IEEE Access*, 7:53236–53247. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2912608.
- Pérez-Alcocer, R., Moreno-Valenzuela, J., and Miranda-Colorado, R. (2016). A robust approach for trajectory tracking control of a quadrotor with experimental validation. *ISA Transactions*, 65:262–274. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2016.08.001>.
- Rosales, C., Rossomando, F., Soria, C., and Carelli, R. (2018). Neural control of a quadrotor: A state-observer based approach. In *Proc. Int. Conf. on Unmanned Aircraft Systems*, pages 647–653. DOI: 10.1109/ICUAS.2018.8453303.
- Santana, L. V., Brandão, A. S., and Sarcinelli-Filho, M. (2016). Navigation and cooperative control using the AR.Drone quadrotor. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 84(1-4):327–350. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10846-016-0355-y>.
- Santana, L. V., Brandao, A. S., Sarcinelli-Filho, M., and Carelli, R. (2014). A trajectory tracking and 3D positioning controller for the AR.Drone quadrotor. In *Proc. Int. Conf. on Unmanned Aircraft Systems*, pages 756–767. DOI: 10.1109/ICUAS.2014.6842321.
- Santos, M. C., Santana, L. V., Brandão, A. S., Sarcinelli-Filho, M., and Carelli, R. (2017a). Indoor low-cost localization system for controlling aerial robots. *Control Engineering Practice*, 61:93–111. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2017.01.011>.
- Santos, M. C., Santana, L. V., Martins, M. M., Brandão, A. S., and Sarcinelli-Filho, M. (2015). Estimating and controlling UAV position using RGB-D/IMU data fusion with decentralized information/Kalman filter. In *Proc. IEEE International Conference on Industrial Technology*, pages 232–239. DOI: 10.1109/ICIT.2015.7125104.
- Santos, M. C., Sarcinelli-Filho, M., and Carelli, R. (2016). Trajectory tracking for UAV with saturation of velocities. In *Proc. International Conference on Unmanned Aircraft Systems*, pages 643–648. DOI: 10.1109/ICUAS.2016.7502598.
- Santos, M. C. P., Rosales, C. D., Sarapura, J. A., Sarcinelli-Filho, M., and Carelli, R. (2019). An adaptive dynamic controller for quadrotor to perform trajectory tracking tasks. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 93(1):5–16. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10846-018-0799-3>.
- Santos, M. C. P., Rosales, C. D., Sarcinelli-Filho, M., and Carelli, R. (2017b). A novel null-space-based UAV trajectory tracking controller with collision avoidance. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 22(6):2543–2553. DOI: 10.1109/TMECH.2017.2752302.
- Sarapura, J. A., Roberti, F., Toibero, J. M., Sebastián, J. M., and Carelli, R. (2020). Visual servo controllers for an UAV tracking vegetal paths. In *Machine Vision and Navigation*, pages 597–625. Springer, Cham, Switzerland. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-22587-2_18.
- Tomáš, K., Vonásek, V., Fišer, D., and Faigl, J. (2011). AR-Drone as a robotic platform for research and education. In *Proc. International Conference on Research and Education in Robotics—EUROBOT 2011*, pages 172–186. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-21975-7_16.
- Wang, N. and Ahn, C. K. (2021). Coordinated trajectory-tracking control of a marine aerial-surface heterogeneous system. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 26(6):3198–3210. DOI: 10.1109/TMECH.2021.3055450.
- Zhang, F. (2006). *The Schur complement and its applications*, volume 4 of *Numerical Methods and Algorithms*. Springer, Boston, MA, USA.