

Análisis cinemático utilizando cuaterniones duales Kinematic analysis using dual quaternions

R. Vergara-Hernández ^{a,*}, M. A. Magaña-Mendez ^a, J. C. Ramos-Fernández ^a, T. Hernández-Cortes ^a

^aUniversidad Politécnica de Pachuca, Carr. Pachuca-Cd Sahagún Km. 20, Ex-Hacienda de Santa Bárbara, Zempoala, Hidalgo, México. C.P. 43830

Resumen

Este artículo presenta una metodología para la solución de los problemas cinemáticos directo e inverso utilizando cuaterniones duales y el método Jacobiano de mínimos cuadrados amortiguados. La solución del problema cinemático directo se obtiene mediante la composición de cuaterniones duales que representan la posición y orientación de las articulaciones. El problema cinemático inverso es no lineal, por lo que se aborda utilizando el método Jacobiano de mínimos cuadrados amortiguados. Este método iterativo permite obtener una solución numérica para las orientaciones de las articulaciones de la cadena cinemática que colocan al efector final en una posición y orientación deseadas. Se utiliza una cadena cinemática de tres grados de libertad para mostrar el desempeño de la metodología propuesta.

Palabras Clave: Cinemática directa, cinemática inversa, cuaterniones duales, Jacobiano de mínimos cuadrados amortiguados.

Abstract

This paper introduces a methodology for the solution of forward and inverse kinematics problems using dual quaternions and the damped least squares Jacobian method. The solution of the forward kinematics problem is given by composition of dual quaternions that represent the position and orientation of the joints. The inverse kinematics problem is nonlinear, so it is approached using the damped least squares Jacobian method. This iterative method allows to obtain a numerical solution for the orientations of the joints of the kinematic chain that places the end effector in a desired position and orientation. A three degrees of freedom kinematic chain is used to show the performance of the proposed methodology.

Keywords: Forward kinematics, inverse kinematics, dual quaternions, damped least squares Jacobian.

1. Introducción

Cuando se analiza una cadena cinemática articulada, es de interés estudiar la relación geométrica y temporal que existe entre el espacio de sus articulaciones y el espacio de trabajo de su efector final. Esta relación es tratada mediante la cinemática (Craig, 1986). El análisis cinemático directo busca determinar el efecto acumulativo que el conjunto de las articulaciones tiene sobre la postura (posición y orientación) del efector final. La solución a este problema ha sido ampliamente documentado en la literatura. En (Spong and Vidyasagar, 1989) se proporciona una descripción profunda del método para la solución del problema cinemático directo usando matrices de transformación homogénea. Sin embargo, la representación de la orientación por matrices de rotación es redundante debido a que solo tres de sus nueve parámetros son independientes (Pieper, 1968). En (Siciliano et al., 2010) se muestran otras formas para represen-

tar rotaciones: La representación mínima en términos de tres parámetros independientes, conocidos como ángulos de Euler; y la representación axis-angle que utiliza cuatro parámetros para expresar la rotación de un ángulo dado con respecto a un eje en el espacio. Estas representaciones evitan la redundancia de parámetros, sin embargo, es necesario traducirlas a una matriz de rotación para el cálculo de la cinemática directa. Diebel (2006) describe las relaciones existentes entre la cuatro principales estructuras matemáticas para representar la orientación de un cuerpo en tres dimensiones: matrices de rotación, ángulos de Euler, cuaterniones unitarios y vectores de rotación. Barrientos et al. (2007) muestran el procedimiento para el cálculo de la cinemática directa usando cuaterniones unitarios y cuaterniones puros. Esta representación requiere de siete parámetros divididos un vector de posición y un cuaternión de rotación. Jia (2015) utiliza cuaterniones para resolver el proble-

*Autor para correspondencia: rodolfovergara@micorreo.upp.edu.mx

Correo electrónico: rodolfovergara@micorreo.upp.edu.mx (Rodolfo Vergara-Hernández), maralb_mm@upp.edu.mx (Mario Alberto Magaña-Méndez), jramos@upp.edu.mx (Julio César Ramos-Fernández), tonatiuh@upp.edu.mx (Tonatiuh Hernández-Cortés).

Historial del manuscrito: recibido el 18/04/2022, última versión-revisada recibida el 18/06/2022, aceptado el 25/07/2022, en línea (postprint) desde el 26/07/2022, publicado el 05/01/2023. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v10i20.9297>



ma de registro de forma en 3D (*3D shape registration*) basado en mínimos cuadrados. Ramírez Gordillo et al. (2011) presenta una solución basada en cuaterniones duales para el desarrollo de la cinemática de manipuladores robóticos.

Por otro lado, el problema cinemático inverso consiste en determinar un conjunto de parámetros que describan las orientaciones de las articulaciones que coloquen al efector final en una postura deseada. Este problema es altamente no lineal, por lo que solucionarlo de forma analítica es posible solamente bajo condiciones geométricas especiales. Por ejemplo, para el caso de una cadena cinemática de seis Grados de Libertad (GdL) en 3D, esto implica que tres de sus seis ejes se intersecten en algún punto de la cadena (Pieper, 1968). Para analizar el problema de forma mas general, se han desarrollado métodos numéricos que se aproximan iterativamente a una solución. En la literatura, es común el uso de la matriz Jacobiana para relacionar la orientación de las articulaciones con la postura del efector final, lo que implica el cálculo de la deriva de un cuaternión. Bartelink (2012) propone el uso de métodos Jacobianos para el control de personajes virtuales con 6 GdL. Kenwright (2012) aprovecha la condición de nilpotencia de la unidad dual para encontrar el diferencial de un cuaternión dual utilizando series de Taylor. El mismo autor, en (Kenwright, 2013), presenta un método para la solución de la cinemática inversa, linealizando el problema y utilizando la matriz Jacobiana transpuesta y el algoritmo de Gauss-Siedel para determinar los ángulos en las articulaciones que colocan al efector en una posición deseada, sin imponerle una orientación. En (Vilhena-Adorno, 2017) se demuestra la relación existente entre la derivada de un cuaternión unitario y la velocidad angular de un marco coordinado e introduce el exponente y el logaritmo de un cuaternión unitario, con lo que es capaz de interpolar un vector en tres dimensiones mediante aproximación numérica. En (Pham et al., 2018) se desarrolla un esquema de control de posición utilizando la matriz Jacobiana pseudo inversa. El esquema requiere de la solución de la cinemática directa para el calculo del error, expresado como la diferencia entre los cuaterniones correspondientes a la postura deseada y la postura actual, para retroalimentarlo al sistema. El método linealiza al sistema y es capaz de encontrar una solución para posturas de referencia constantes.

En este trabajo se presenta el método para obtener la cinemática directa de una cadena articulada mediante la multiplicación entre cuaterniones duales y una solución numérica para el problema cinemático inverso que relaciona un conjunto de parámetros que describen las orientaciones articulaciones en términos de las variables logarítmicas en el espacio de los cuaterniones unitarios, y la postura del efector final deseada, expresada en un vector de seis parámetros en el espacio de trabajo. La función que realiza esta transformación está dada por el método Jacobiano de mínimos cuadrados amortiguados. El uso de cuaterniones duales permite expresar la postura de una cadena cinemática de forma compacta, mientras que el método numérico permite analizar cadenas cinemáticas que no cumplen con los criterios de Pieper (1968).

El contenido de este documento se organiza de la siguiente manera: en la sección 2 se describen las operaciones necesarias

para el desarrollo de la metodología, al tiempo que se establece la notación usada a lo largo del texto. En las sección 3 se plantea el problema. En la Sección 4 se muestra el desempeño del algoritmo implementado mediante un ejemplo y se comparan sus resultados con aquellos obtenidos utilizando la misma metodología basada en matrices de transformación homogénea. En la sección 5 se describen las conclusiones obtenidas y se incluyen algunos comentarios sobre el trabajo a futuro.

2. Preliminares

2.1. Cuaterniones

Los cuaterniones pueden entenderse como una extensión de los números complejos al definirse tres unidades imaginarias $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ con la siguiente propiedad

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1.$$

El conjunto de los cuaterniones \mathbb{H} se define como

$$\mathbb{H} \equiv \{q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Un cuaternión se puede representar como un vector columna de 4×1

$$Q = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T = \begin{bmatrix} s \\ \vec{v} \end{bmatrix},$$

donde s representa la parte escalar y \vec{v} la parte vectorial. Un cuaternión cuyas partes escalar y vectorial son 0 y \vec{v} , respectivamente, se denomina cuaternión puro y tiene la forma

$$Q = [0, \vec{v}] = 0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k},$$

este cuaternión tiene propiedades semejantes a las de un vector en \mathbb{R}^3 , por lo que puede utilizarse para representar la posición en un espacio tridimensional (Vilhena-Adorno, 2017).

Sea $Q \in \mathbb{H}$, el mapeo $\|\cdot\| : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ se conoce como norma y está dado por

$$\|Q\| \equiv \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \equiv \sqrt{QQ^*}.$$

Un cuaternión cuya norma $\|Q\| = 1$ se conoce como *cuaternión unitario* y pertenece al conjunto $\mathbb{H}_1 \equiv \{Q \in \mathbb{H} \mid \|Q\| = 1\}$. Este conjunto constituye una esfera unitaria en un espacio de cuatro dimensiones (Dam et al., 1998).

Todo cuaternión $Q \in \mathbb{H}$ tiene asociado un conjugado $Q^* \in \mathbb{H}$

$$Q^* \equiv [q_0, -q_1, -q_2, -q_3]^T = [s, -\vec{v}].$$

Sea $Q \in \mathbb{H}$, entonces existe un cuaternión $Q^{-1} \in \mathbb{H}$ tal que $QQ^{-1} = Q^{-1}Q = I$, donde $I = [1, \mathbf{0}]$ es el elemento neutro bajo multiplicación de cuaterniones. Además Q^{-1} es único y se define como

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{\|Q\|^2}$$

Desde un punto de vista geométrico se puede considerar que Q^{-1} rota el mismo número de grados que Q , pero que los ejes de rotación apuntan en direcciones opuestas, por lo tanto la rotación dada por Q^{-1} cancela el efecto de la rotación dada por Q . (Dam et al., 1998) Si $Q \in \mathbb{H}_1$, su inverso es también su conjugado Q^* .

Dado un vector unitario $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3] \in \mathbb{R}^3$ y un ángulo $\theta \in \mathbb{R}$

$$e^{(u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}+u_3\mathbf{k})\theta} = \cos(\theta) + (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}) \sin(\theta)$$

$$e^{\vec{u}\theta} = \cos(\theta) + \vec{u} \sin(\theta).$$

La representación mapa exponencial representa una rotación en el espacio tridimensional, un ángulo θ con respecto a un eje unitario \vec{u} . Además, para un vector cualquiera $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ se tiene

$$e^{\vec{0}} = [1, \vec{0}]$$

$$e^{\vec{w}} = \cos(\|\vec{w}\|) + \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} \sin(\|\vec{w}\|),$$

donde $\vec{u} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$ y $\theta = \|\vec{w}\|$.

Mientras que para un cuaternión unitario considere

$$Q = e^{\frac{1}{2}\vec{u}\theta} = \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) + \vec{u} \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \in \mathbb{H}_1. \quad (1)$$

El logaritmo de (1) está dado por

$$\log(Q) = \frac{1}{2}\vec{u}\theta \in \mathbb{R}^3.$$

A partir de la representación mapa exponencial de un cuaternión unitario se puede ver que el cuaternión unitario depende de tres variables: la parte vectorial de su logaritmo.

Sean $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{H}$, la multiplicación entre cuaterniones, representada por el operador \circ , está dada por

$$Q_3 = Q_1 \circ Q_2$$

$$= [s_1, \vec{v}_1]^T \circ [s_2, \vec{v}_2]^T$$

$$= \begin{bmatrix} s_1 s_2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \\ \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 + s_1 \vec{v}_2 + s_2 \vec{v}_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s_1 & -\vec{v}_1^T \\ \vec{v}_1 & s_1 I + [\vec{v}_1]^\times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_2 \\ \vec{v}_2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

donde \cdot y \times denotan el producto escalar y vectorial en \mathbb{R}^3 , respectivamente, y $[\vec{v}_1]^\times$ es una matriz anti simétrica de producto cruz definida $[\vec{v}_1]^\times : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ de la forma

$$[\vec{v}_1]^\times = \begin{bmatrix} 0 & -q_{13} & q_{12} \\ q_{13} & 0 & -q_{11} \\ -q_{12} & q_{11} & 0 \end{bmatrix}.$$

El resultado obtenido en (2) muestra que la multiplicación de dos cuaterniones se puede expresar como el segundo cuaternión pre multiplicado por una función matricial del primer cuaternión, es decir

$$Q_1 \circ Q_2 = [Q_1]_{L_4} Q_2,$$

donde $[\cdot]_{L_4} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{4 \times 4}$ se denomina *operador izquierdo* y su forma generalizada es la siguiente

$$[Q]_{L_4} = \begin{bmatrix} s & -\vec{v}^T \\ \vec{v} & sI + [\vec{v}]^\times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Existe una función matricial de cuaterniones conjugados tal que

$$Q_1 \circ Q_2 = [Q_2]_{R_4} Q_1,$$

donde $[\cdot]_{R_4} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{4 \times 4}$, se denomina *operador derecho* y se define de la siguiente manera

$$[Q]_{R_4} = \begin{bmatrix} s & -\vec{v}^T \\ \vec{v} & sI - [\vec{v}]^\times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Sean $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in \mathbb{H}$, utilizando los operadores definidos, la multiplicación de cuaterniones se puede expresar de dos maneras distintas

$$Q_4 = Q_1 Q_2 Q_3 = [[Q_1]_{L_4} Q_2]_{L_4} Q_3 = [Q_1]_{L_4} [Q_3]_{R_4} Q_2.$$

La multiplicación entre cuaterniones permite componer transformaciones en el espacio tridimensional, por lo que es la herramienta fundamental para encontrar la solución al problema cinemático directo.

2.2. Cuaterniones duales

Sea $\hat{a} = a_p + \varepsilon a_d$ un número dual, donde a_p es la parte primaria, mientras que a_d es la parte dual. Ambas partes están compuestas por el mismo tipo de elementos: escalares, números complejos o cuaterniones. Cuando ambas partes se componen de cuaterniones, el número dual se conoce como *cuaternión dual* y se puede definir el conjunto de los cuaterniones duales

$$\mathcal{H} \equiv \{h_1 + \varepsilon h_2 : h_1, h_2 \in \mathbb{H}, \varepsilon \neq 0, \varepsilon^2 = 0\}.$$

Un cuaternión dual se puede expresar de las siguientes maneras

$$\hat{Q} = a + bi + cj + dk + \varepsilon(f + gi + hj + mk)$$

$$= Q_{prim} + \varepsilon Q_{dual}$$

$$= \begin{bmatrix} Q_{prim} \\ Q_{dual} \end{bmatrix}.$$

Los cuaterniones duales tienen propiedades algebraicas similares a las de los cuaterniones, por lo que la norma, el conjugado y el inverso se definen de la misma forma.

Sean $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \hat{Q}_3 \in \mathcal{H}$, la multiplicación entre cuaterniones duales se puede realizar algebraicamente como el producto entre polinomios, por ejemplo

$$\hat{Q}_3 = \hat{Q}_1 \hat{Q}_2 = (Q_{1_{prim}} + \varepsilon Q_{1_{dual}})(Q_{2_{prim}} + \varepsilon Q_{2_{dual}})$$

$$= Q_{1_{prim}} Q_{2_{prim}} + \varepsilon Q_{1_{dual}} Q_{2_{prim}} + \varepsilon Q_{1_{prim}} Q_{2_{dual}} + \varepsilon^2 Q_{1_{dual}} Q_{2_{dual}}$$

$$= Q_{1_{prim}} Q_{2_{prim}} + \varepsilon(Q_{1_{prim}} Q_{2_{dual}} + Q_{1_{dual}} Q_{2_{prim}}) + 0 \cdot Q_{1_{dual}} Q_{2_{dual}}$$

$$= Q_{1_{prim}} Q_{2_{prim}} + \varepsilon(Q_{1_{prim}} Q_{2_{dual}} + Q_{1_{dual}} Q_{2_{prim}}).$$

La propiedad de nilpotencia de ε permite que el resultado de multiplicar dos cuaterniones duales sea un cuaternión dual. La multiplicación entre cuaterniones duales no es conmutativa, por lo que, en general

$$\hat{Q}_1 \hat{Q}_2 \neq \hat{Q}_2 \hat{Q}_1.$$

La multiplicación entre cuaterniones duales se puede expresar de la siguiente manera

$$\hat{Q}_1 \hat{Q}_2 = [\hat{Q}_1]_{L_8} \hat{Q}_2,$$

donde el operador matricial $[\cdot]_{L_8} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^{8 \times 8}$, denominado *operador dual izquierdo*, transforma linealmente el cuaternión dual en una matriz cuadrada de dimensión 8×8 de la forma

$$[\hat{Q}]_{L_8} = \begin{bmatrix} [Q_{prim}]_{L_4} & 0_{4 \times 4} \\ [Q_{dual}]_{L_4} & [Q_{prim}]_{L_4} \end{bmatrix},$$

el operador matricial $[\cdot]_{L_4}$ se definió en (3).

Una multiplicación entre dos cuaterniones duales también se puede expresar como

$$\hat{Q}_1 \hat{Q}_2 = [\hat{Q}_2]_{R_8} \hat{Q}_1,$$

donde el operador matricial $[\cdot]_{R_8} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^{8 \times 8}$, denominado *operador dual derecho*, transforma linealmente el cuaternión dual en una matriz cuadrada de dimensión 8×8 de la forma

$$[\hat{Q}]_{R_8} = \begin{bmatrix} [Q_{prim}]_{R_4} & 0_{4 \times 4} \\ [Q_{dual}]_{R_4} & [Q_{prim}]_{R_4} \end{bmatrix},$$

el operador matricial $[\cdot]_{R_4}$ se definió en (4).

Entonces, es posible expresar la multiplicación de tres cuaterniones duales de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \hat{Q}_4 &= \hat{Q}_1 \hat{Q}_2 \hat{Q}_3 \\ &= [[\hat{Q}_1]_{L_8} \hat{Q}_2]_{L_8} \hat{Q}_3 \\ &= [\hat{Q}_1]_{L_8} [\hat{Q}_3]_{R_8} \hat{Q}_2. \end{aligned}$$

La postura de un cuerpo rígido se puede describir utilizando un sólo cuaternión dual. Una postura dada puede alcanzarse mediante una sucesión de movimientos ordenados de rotación y traslación. Como la multiplicación de cuaterniones no es conmutativa, esto puede ocurrir de dos maneras distintas. Sean $\hat{Q} \in \mathcal{H}$, $r = e^{\frac{1}{2}\hat{u}\theta} \in \mathbb{H}_1$ y $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in \mathbb{R}^3$.

a) Suponga que el cuerpo rota r y después se traslada \vec{p}_1

$$\hat{Q} = r + \varepsilon \frac{1}{2} r \vec{p}_1 \quad (5)$$

b) Suponga que un cuerpo se traslada \vec{p}_2 y después rota r

$$\hat{Q} = r + \varepsilon \frac{1}{2} \vec{p}_2 r \quad (6)$$

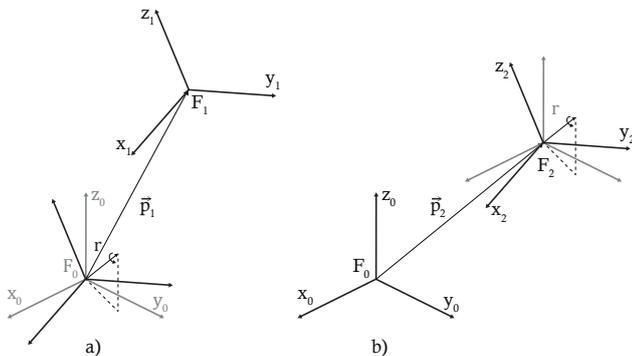


Figura 1: a) Rotación r seguida de una traslación \vec{p}_1 . b) Traslación \vec{p}_2 seguida de una rotación r

La Figura 1 muestra una interpretación gráfica de las diferencias entre rotar o trasladar primero. Note que en ambos casos el cuaternión de rotación es el mismo, pero ocurre en sistemas de coordenadas diferentes. Por otro lado, los vectores de traslación son diferentes ya que las traslaciones ocurren en sistemas de coordenadas diferentes. En una cadena cinemática las rotaciones y traslaciones de la articulación i se realizan con respecto a la articulación $i - 1$, además las longitudes de los eslabones son constantes, mientras que las orientaciones de las articulaciones son variables, por ello es conveniente elegir la representación donde primero ocurre la traslación y después la rotación, de esta manera el vector de traslación \vec{p}_2 es independiente del cuaternión de rotación r .

2.3. Derivada de un cuaternión con respecto a sus variables logarítmicas

La derivada de un cuaternión con respecto al tiempo sigue las mismas reglas de derivación para un vector en \mathbb{R}^3 , por lo que las leyes del producto y de la cadena también se cumplen (Dam et al., 1998). Siguiendo las mismas reglas, se puede definir la derivada de un cuaternión con respecto a su logaritmo de la siguiente manera: Sean $\vec{w} = [w_1, w_2, w_3] \in \mathbb{R}^3$ y $Q = Q(\vec{w}) = e^{\vec{w}} \in \mathbb{H}_1$, las derivadas parciales de Q con respecto a \vec{w} para $\|\vec{w}\| \neq 0$ están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(\vec{w})}{\partial w_k} &= (a_k - w_k) \frac{\sin(\|\vec{w}\|)}{\|\vec{w}\|} \\ &+ w_k \vec{w} \left(\frac{\cos(\|\vec{w}\|)}{\|\vec{w}\|^2} - \frac{\sin(\|\vec{w}\|)}{\|\vec{w}\|^3} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Si $\|\vec{w}\| = 0$, entonces

$$\frac{\partial Q(\vec{w})}{\partial w_k} = a_k, \quad (8)$$

para todo $k \in \{1, 2, 3\}$, donde $a_k = \mathcal{K}_{(k=1)}\mathbf{i} + \mathcal{K}_{(k=2)}\mathbf{j} + \mathcal{K}_{(k=3)}\mathbf{k}$.

Considere un cuaternión dual unitario de la forma $\hat{Q} = (1 + \frac{1}{2}\varepsilon\vec{p})e^{\vec{w}}$, donde $\vec{p} \in \mathbb{H}$ y $e^{\vec{w}} \in \mathbb{H}_1$, note que en este caso únicamente $e^{\vec{w}}$ depende las variables logarítmicas \vec{w} . Utilizando la regla del producto se obtienen las derivadas parciales con respecto a sus variables logarítmicas

$$\frac{\partial}{\partial \vec{w}} \left((1 + \frac{1}{2}\varepsilon\vec{p})e^{\vec{w}} \right) = (1 + \frac{1}{2}\varepsilon\vec{p}) \frac{\partial}{\partial \vec{w}} e^{\vec{w}} \quad (9)$$

3. Planteamiento del problema

3.1. Cinemática directa

El problema cinemático directo busca determinar la posición y orientación del efector final dada una configuración de las articulaciones de una cadena cinemática, el problema está descrito por

$$\vec{e} = f(\Phi), \quad (10)$$

donde f es una función no lineal con una solución única, Φ es la configuración de la cadena cinemática dada por

$$\Phi = [\vec{\Phi}_1 \quad \vec{\Phi}_2 \quad \dots \quad \vec{\Phi}_n]^T, \quad (11)$$

donde $\vec{\Phi}_i = \log(Q_i^R)$ es la configuración de la articulación i con respecto a la articulación $i - 1$, y \vec{e} es la postura del efector final en el espacio de trabajo, dada por

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} p \\ \phi \end{bmatrix} = [p_x \quad p_y \quad p_z \quad \phi_x \quad \phi_y \quad \phi_z]^T, \quad (12)$$

donde el vector p expresa la posición del efector final y el vector ϕ expresa la orientación del efector final.

La solución al problema cinemático directo está dado por la composición de cuaterniones que representan la postura relativa de las articulaciones de la cadena cinemática y del efector final

$$\begin{aligned} \hat{Q}_e^W(\vec{\Phi}) &= \hat{Q}_n^W(\vec{\Phi})\hat{Q}_e^R \\ &= \hat{Q}_0^W\hat{Q}_1^R(\vec{\Phi}_1)\hat{Q}_2^R(\vec{\Phi}_2)\dots\hat{Q}_{n-1}^R(\vec{\Phi}_{n-1})\hat{Q}_n^R(\vec{\Phi}_n)\hat{Q}_e^R, \end{aligned} \quad (13)$$

donde $\hat{Q}_e^W(\vec{\Phi})$ describe la postura del efector final con respecto al sistema de coordenadas global, \hat{Q}_0^W describe al sistema de coordenadas global, $\hat{Q}_n^W(\vec{\Phi})$ describe la postura de la articulación n con respecto al sistema de coordenadas global, \hat{Q}_e^R describe la postura del efector final con respecto a la articulación n y $\hat{Q}_i^R(\vec{\Phi}_i)$ describe la postura de la articulación i con respecto a la articulación $i - 1$, todos los cuaterniones duales están expresados usando (6).

A partir de $\hat{Q}_e^W(\vec{\Phi}) = Q_{e_{prim}}^W + \varepsilon Q_{e_{dual}}^W = Q_e^W + \frac{1}{2}\varepsilon\vec{p}_e^W Q_e^W$ se puede extraer la posición del efector final con respecto al sistema de coordenadas global

$$\vec{p}_e^W = 2Q_{e_{dual}}^W(Q_{e_{prim}}^W)^*$$

y la orientación del efector final con respecto al sistema de coordenadas global

$$2 \log(Q_e^W) = 2 \left(\frac{1}{2} \vec{u}\theta \right) = 2 \left(\frac{\vec{v}_e^W}{\|\vec{v}_e^W\|} \right) \arccos(s_e^W),$$

obteniendo la solución

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} p \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{p}_e^W \\ 2 \log(Q_e^W) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

3.2. Cinemática inversa

El problema cinemático inverso busca determinar la configuración de las articulaciones que coloque al efector final en una postura deseada. Dada la función f descrita en (10), el vector de postura \vec{e} descrito en (12) y el vector de configuración de las articulaciones Φ descrito en (11), el problema cinemático inverso se describe mediante

$$\Phi \in f^{-1}(\vec{e}),$$

lo que implica que pueden existir múltiples soluciones, o ninguna. La matriz Jacobiana

$$J = \begin{bmatrix} J_p(\Phi) \\ J_\phi(\Phi) \end{bmatrix}$$

relaciona las velocidades de las articulaciones y las velocidades del efector final de la siguiente manera

$$\dot{\vec{e}} = J\dot{\Phi}.$$

El método Jacobiano se utiliza para resolver el problema cinemático inverso de forma iterativa, cambiando la configuración de la cadena cinemática de tal forma que la posición y orientación del efector final se acerque poco a poco a la posición y orientación deseadas. Lo anterior se consigue determinando la manera en que un cambio en la configuración de la cadena produce un cambio en la posición y orientación del efector final.

Dados $\vec{e} \in \mathbb{R}^6$ y $\Phi \in \mathbb{R}^{3n}$ la matriz Jacobiana $J(\vec{e}, \Phi) \in \mathbb{R}^{6 \times 3n}$ está dada por

$$J(\vec{e}, \Phi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_1}{\partial \Phi_1} & \dots & \frac{\partial e_1}{\partial \Phi_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial e_6}{\partial \Phi_1} & \dots & \frac{\partial e_6}{\partial \Phi_m} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

donde $\frac{\partial e_k}{\partial \Phi_i} = \left(\frac{\partial e_k}{\partial \Phi_{i,1}}, \frac{\partial e_k}{\partial \Phi_{i,2}}, \frac{\partial e_k}{\partial \Phi_{i,3}} \right)$ para $i = \{1, 2, \dots, m\}$ y $k = \{1, 2, \dots, 6\}$.

Entonces, la relación entre el cambio en la posición y orientación del efector final y la configuración de la cadena cinemática se puede aproximar linealmente

$$\Delta \vec{e} \approx \frac{\partial \vec{e}}{\partial \Phi} \Delta \Phi = J(\vec{e}, \Phi) \Delta \Phi,$$

lo que significa que un pequeño cambio $\Delta \vec{\Phi}$ en la configuración de la cadena tendrá como consecuencia un pequeño cambio $\Delta \vec{e}$ en la posición y orientación del efector final. La relación inversa está dada por

$$\Delta \Phi \approx J(\vec{e}, \Phi)^{-1} \Delta \vec{e}.$$

Es común que la matriz Jacobiana no sea invertible, en estos casos se recurre a métodos alternativos como el de la matriz Jacobiana transpuesta, matriz Jacobiana pseudoinversa o el método Jacobiano de mínimos cuadrados amortiguados (Bartelink, 2012).

3.2.1. Método Jacobiano de mínimos cuadrados amortiguados

El método Jacobiano de mínimos cuadrados amortiguados busca evitar las singularidades asociadas al método Jacobiano pseudoinverso, calculando el cambio en la configuración $\Delta \vec{\Phi}$ dado un cambio en la posición y orientación del efector final $\Delta \vec{e}$ mediante la siguiente expresión

$$\Delta \Phi = J^T (JJ^T + \gamma^2 I)^{-1} \Delta \vec{e},$$

donde I es una matriz identidad de 6×6 y $\gamma \in \mathbb{R}$ es una constante de amortiguamiento cuyo valor se elige lo suficientemente grande para eliminar las singularidades, pero considerando que a medida que este valor crece la tasa de convergencia se hace lenta. $\Delta \vec{e} = \vec{g} - \vec{e} = \vec{g} - f(\Phi)$ es la diferencia entre la postura actual del efector final \vec{e} y la postura objetivo del efector final \vec{g} , sin embargo, la aproximación $\Delta \Phi$ solo es válida para pequeños cambios $\Delta \vec{e}$, por lo tanto es conveniente acercar el efector final

\vec{e} al objetivo \vec{g} solamente una fracción $\alpha \in [0, 1]$. Entonces se define $\Delta\vec{e} = \alpha(\vec{g} - \vec{e})$. La nueva configuración $\Phi^{nueva} = \Phi + \Delta\Phi$ conduce a una nueva postura del efector final $\vec{e}^{nueva} = f(\Phi^{nueva})$. La solución de este método da el minimizador de

$$\|J\Delta\Phi - \Delta\vec{e}\|^2 + \gamma^2\|\Delta\Phi\|^2.$$

3.3. Cálculo de la matriz Jacobiana

El cálculo de la matriz Jacobiana consiste en determinar los vectores columna de $\frac{\partial\vec{e}}{\partial\Phi_{i,k}}$ de acuerdo con (15). Dada una configuración Φ , los vectores de traslación \vec{p}_i^R y \hat{Q}_0^W , se pueden calcular los cuaterniones duales \hat{Q}_i^R y \hat{Q}_i^W para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. De acuerdo con la definición del mapa exponencial, Q_i^R es una función de los valores logarítmicos $\vec{w} := (w_1, w_2, w_3) = \vec{\Phi}_i$.

$$Q_i^R(\vec{w}) = e^{\vec{w}}.$$

Utilizando las definiciones de la derivada de un cuaternión dadas en (7) y (8) y la regla del producto dada en (9) se puede obtener la derivada del cuaternión dual $\hat{Q}_i^R(\vec{w}) = (1 + \frac{1}{2}\varepsilon\vec{p}_i^R)Q_i^R(\vec{w})$

$$\frac{\partial\hat{Q}_i^R(\vec{w})}{\partial w_k} = \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon\vec{p}_i^R\right) \frac{\partial Q_i^R(\vec{w})}{\partial w_k}.$$

El cuaternión dual $\hat{Q}_e^W(\vec{w})$ se obtiene usando (13). Se requiere encontrar la derivada de $\vec{e} = (\vec{p}_e^W, \log(Q_e^W))$, por lo que utilizando la forma $\hat{Q}_e^W(\vec{w}) = (1 + \frac{1}{2}\varepsilon\vec{p}_e^W)Q_e^W(\vec{w})$, considerando que el cuaternión de rotación Q_e^W y el vector de posición \vec{p}_e^W dependen de \vec{w} , y aplicando la regla del producto para cuaterniones duales, la derivada $\frac{\partial\hat{Q}_e^W(\vec{w})}{\partial w_k}$ se obtiene mediante la expresión

$$\begin{aligned} \frac{\partial\hat{Q}_e^W(\vec{w})}{\partial w_k} &= \frac{\partial}{\partial w_k} \left(\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon\vec{p}_e^W(\vec{w})\right) Q_e^W(\vec{w}) \right) \\ &= \frac{\partial Q_e^W(\vec{w})}{\partial w_k} + \frac{1}{2}\varepsilon \left(\frac{\partial\vec{p}_e^W(\vec{w})}{\partial w_k} Q_e^W(\vec{w}) + \vec{p}_e^W(\vec{w}) \frac{\partial Q_e^W(\vec{w})}{\partial w_k} \right), \end{aligned}$$

a partir de la cual se pueden obtener las derivadas de $\vec{p}_e^W(\vec{w})$ y Q_e^W como sigue

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{p}_e^W(\vec{w})}{\partial w_k} &= \left(2\mathbb{D} \left(\frac{\partial\hat{Q}_e^W(\vec{w})}{\partial w_k} \right) - \vec{p}_e^W(\vec{w})\mathbb{R} \left(\frac{\partial\hat{Q}_e^W(\vec{w})}{\partial w_k} \right) \right) (Q_e^W(\vec{w}))^{-1} \\ \frac{\partial Q_e^W(\vec{w})}{\partial w_k} &= \mathbb{R} \left(\frac{\partial\hat{Q}_e^W(\vec{w})}{\partial w_k} \right), \end{aligned}$$

donde $\mathbb{R}(\cdot)$ y $\mathbb{D}(\cdot)$ dan la parte real y la parte dual del cuaternión dual, respectivamente.

Para obtener la derivada de $\vec{\sigma}_e^W(\vec{w}) := (o_1(\vec{w}), o_2(\vec{w}), o_3(\vec{w})) = \log(Q_e^W(\vec{w}))$, a partir de la derivada de $Q_e^W(\vec{w})$, se utiliza la regla de la cadena para obtener la siguiente expresión

$$\frac{\partial Q_e^W(\vec{w})}{\partial w_k} = \frac{\partial Q_e^W(\vec{w})}{\partial\vec{\sigma}_l(\vec{w})} \frac{\partial\vec{\sigma}_l(\vec{w})}{\partial w_k}$$

para $k \in \{1, 2, 3\}$ y $l \in \{1, 2, 3\}$. Despejando, se obtiene la derivada de $\vec{\sigma}_e^W(\vec{w})$ con

$$\frac{\partial\vec{\sigma}_l(\vec{w})}{\partial w_k} = S \left(\left(\frac{\partial Q_e^W(\vec{w})}{\partial\vec{\sigma}_l(\vec{w})} \right)^* \frac{\partial Q_e^W(\vec{w})}{\partial w_k} \right)$$

donde $S(\cdot)$ da la parte escalar de un cuaternión. Entonces, las derivadas parciales de $\vec{e}(\vec{w})$ están dadas por

$$\frac{\partial\vec{e}(\vec{w})}{\partial w_k} = \left(\frac{\partial\vec{p}_e^W(\vec{w})}{\partial w_k}, \frac{\partial\vec{\sigma}_e^W(\vec{w})}{\partial w_k} \right)$$

4. Ejemplo

Considere un sistema de coordenadas inercial global $x_0y_0z_0$ y una cadena cinemática planar de 3 GdL con un sistema de coordenadas local $x_iy_iz_i$ adjunto a cada articulación i , como se muestra en la Figura 2. Todos los sistemas coordenados son dextrógiros. Cada articulación i está desplazada con respecto a la articulación $i - 1$ una distancia a_i sobre el eje x_{i-1} y gira un ángulo θ_i en torno al eje z_i . Entonces, el cuaternión que expresa la posición relativa entre las articulaciones está dado por

$$\vec{p}_i^R = [0 \ \vec{p}_i^R]^T = [0 \ a_i \ 0 \ 0]^T,$$

mientras que la configuración de cada una de las articulaciones en términos de sus variables logarítmicas está dada por

$$\Phi_i = \frac{1}{2}\vec{u}_i\theta_i = [0 \ 0 \ 1]^T \frac{\theta_i}{2},$$

siendo $i = \{1, 2, 3\}$. El cuaternión que expresa la posición del efector final con respecto a la articulación n está dado por

$$\vec{p}_e^R = [0 \ \vec{p}_e^R]^T = [0 \ a_e \ 0 \ 0]^T.$$

La configuración que expresa la orientación del efector final con respecto a la articulación n está dado por $\Phi_e = [0 \ 0 \ 0]$ ya que su orientación está determinada por la orientación de la articulación n .

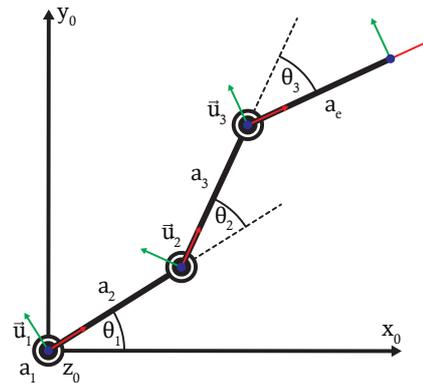


Figura 2: Cadena cinemática 3GdL. Los ejes de los sistemas coordenados locales se representan por colores: x-rojo, y-verde, z-azul. Todos los ejes z "salen" de la hoja.

Para este ejemplo las distancias entre las articulaciones, expresadas en milímetros, son

$$a = [0 \ 60 \ 100],$$

y entre el efector final y la articulación 3

$$a_e = 80.$$

La configuración inicial de las articulaciones se estableció con $\theta_i = 0$ para $i = \{1, 2, 3\}$, es decir, con la cadena cinemática extendida sobre el eje x_0 . Siguiendo el procedimiento descrito en la sección 3.1 se obtiene el cuaternión dual que expresa la postura del efector final con la configuración inicial de las articulaciones

$$\hat{Q}_{e_0}^W = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 120 \ 0 \ 0 \ 0]^T,$$

y la postura del efector final en el espacio de trabajo

$$\vec{z}_0 = [240 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T. \quad (16)$$

Para determinar los valores de α y γ se estableció un valor para $\alpha = 0,5$ y se comprobó el comportamiento del sistema para valores de γ en un rango de 0,1 a 0,9, para una postura deseada del efector final en el espacio de trabajo

$$\vec{g} = [-190,5256 \ -110 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3,6652]. \quad (17)$$

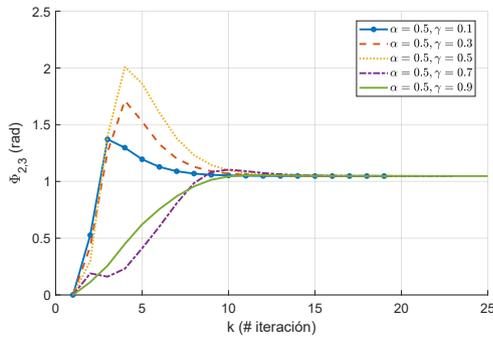


Figura 3: Trayectoria de la articulación 2 para distintos valores de γ .

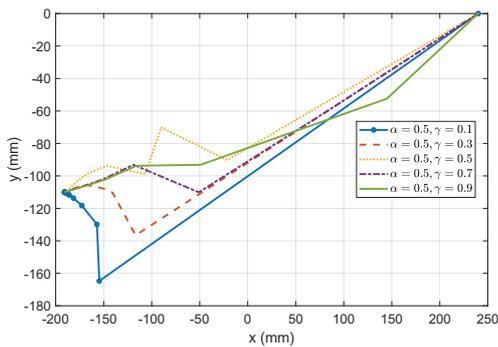


Figura 4: Trayectoria del efector final para distintos valores de γ .

La Figura 3 muestra la trayectoria de la articulación 2 para distintos valores de γ . Entre $\gamma = 0,1$ y $\gamma = 0,5$ ocurre un sobre impulso, que crece a medida que el valor de γ aumenta, sin embargo, para valores mayores a $\gamma = 0,5$ y hasta $\gamma = 0,9$, el sobre impulso desaparece. Las otras articulaciones presentan un comportamiento similar. La Figura 4 muestra que a medida que el valor de γ aumenta, el efector final se acerca a la postura objetivo de manera mas suave. Sin embargo, valores altos de γ tienen un efecto negativo en la cantidad de iteraciones necesarias para

alcanzar la postura deseada y en el error de aproximación final. La tabla 1 muestra estos efectos.

γ	No. de Iteraciones	Error
0.1	19	0.0006
0.3	20	0.0008
0.5	21	0.0010
0.7	23	0.0007
0.9	25	0.0009

Tabla 1: Efecto del valor de γ en el comportamiento del sistema

De manera similar se analizó el comportamiento del sistema para valores de entre $\alpha = 0,1$ y $\alpha = 0,9$, manteniendo $\gamma = 0,9$. La figura 5 muestra que a medida que α aumenta, la trayectoria de la articulación 2 converge mas rápido a una solución. Las otras articulaciones tienen un comportamiento semejante.

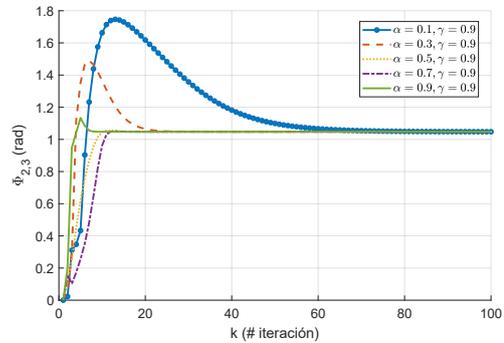


Figura 5: Trayectoria de la articulación 2 para distintos valores de α .

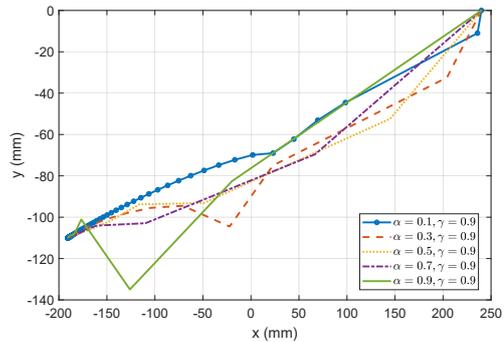


Figura 6: Trayectoria del efector final para distintos valores de α .

α	No. de Iteraciones	Error
0.1	100	0.0137
0.3	40	0.0010
0.5	25	0.0009
0.7	21	0.0006
0.9	12	0.0007

Tabla 2: Efecto del valor de α en el comportamiento del sistema

La figura 6 permite observar el comportamiento del efector final para distintos valores de α . Cuando $\alpha = 0,1$ el efector

final se aproxima lentamente al objetivo, describiendo una trayectoria suave formada por muchos puntos, la mayor densidad de puntos ocurre cuando se encuentra muy cerca del objetivo. Cuando $\alpha = 0,9$ el efector final se aproxima rápidamente al objetivo en muy pocas iteraciones y describe una trayectoria caracterizada por grandes desplazamientos en línea recta. La tabla 2 muestra la relación entre distintos valores de α y el número de iteraciones para alcanzar la postura objetivo y el error de aproximación final.

Considerando los resultados mostrados en las tablas 1 y 2 y haciendo un balance entre el número de iteraciones y el error de aproximación final, se eligieron los valores $\alpha = 0,55$ y $\gamma = 0,22$. Se estableció la postura inicial como en (16) y la postura deseada como en (17).

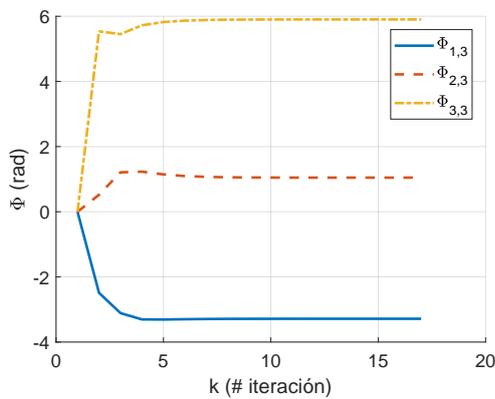


Figura 7: Trayectoria de las articulaciones para alcanzar la postura deseada \vec{g} , utilizando cuaterniones duales.

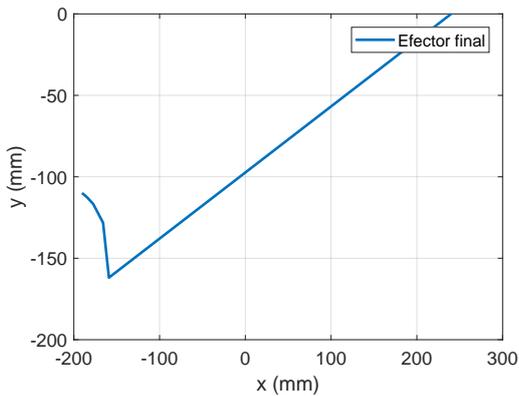


Figura 8: Trayectoria del efector final para alcanzar la postura deseada \vec{g} , utilizando cuaterniones duales.

El algoritmo implementado de acuerdo con la sección 3.2 da como resultado el vector que expresa la postura final del efector final en el espacio de trabajo

$$\vec{e}_f = [-190,5252 \quad -109,9996 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3,6652]^T \quad (18)$$

en un total de 17 iteraciones y con una norma del error

$$\|\vec{g} - \vec{e}_f\| = 4,6671 \times 10^{-4}. \quad (19)$$

Las Figuras 7 y 8 muestran las trayectorias de las articulaciones y del efector final, respectivamente, utilizando el método Jacobiano de mínimos cuadrados amortiguados basado cuaterniones duales. Se observa que las trayectorias se aproximan rápidamente al objetivo durante las primeras iteraciones y después se estabilizan lentamente.

A modo de comparación, se implementó el método Jacobiano de mínimos cuadrados amortiguados utilizando matrices de transformación homogénea. Bajo las mismas condiciones y con un máximo de 30 iteraciones, el método falla en aproximarse a la postura deseada. Esto ocurre para cualquier postura deseada ubicada en el tercer y cuarto cuadrante del plano xy . Las Figuras 9 y 10 muestran las trayectorias de las articulaciones y del efector final, respectivamente, utilizando el método Jacobiano de mínimos cuadrados amortiguados basado en matrices de transformación homogénea.

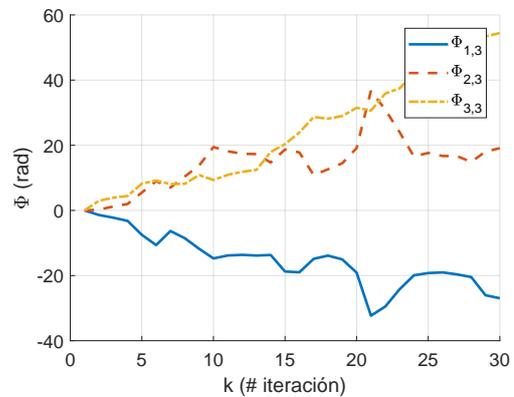


Figura 9: Trayectoria de las articulaciones para alcanzar la postura deseada \vec{g} , utilizando matrices de transformación homogénea.

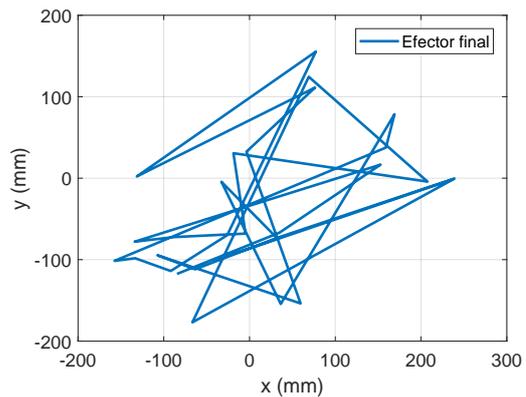


Figura 10: Trayectoria del efector final para alcanzar la postura deseada \vec{g} , utilizando matrices de transformación homogénea.

Cabe señalar que ambas versiones del método tienen un desempeño similar cuando se trata de posturas dentro del primer y segundo cuadrante del plano xy .

5. Conclusiones

En este trabajo se implementó un método para el análisis cinemático de una cadena articulada basado en cuaterniones

duales que dependen de la configuración de sus articulaciones. Particularmente, el problema cinemático inverso se abordó utilizando un método numérico que aproxima el efector final a una postura deseada modificando la configuración de las articulaciones en pequeños incrementos en cada iteración.

Si bien el método es capaz de encontrar una solución para cualquier postura dentro del espacio de trabajo del efector final, las trayectorias de las articulaciones y del efector final no son óptimas, esto se debe a dos factores: 1) en esta etapa de la investigación se decidió no limitar el rango de movimiento de las articulaciones, para que fueran libres de adoptar cualquier posición, incluidas aquellas donde ocurren colisiones entre los eslabones. 2) las constantes α y γ no son óptimas, es decir, se eligieron de forma heurística, realizando un balance entre el número de iteraciones necesarias para alcanzar el objetivo y el error de aproximación final.

Por lo tanto, el trabajo a futuro incluye el desarrollo de algoritmos que permitan: 1) imponer límites al rango de movimiento de las articulaciones y 2) la elección sistemática de los valores de α y γ , con el objetivo de mejorar las trayectorias descritas por las articulaciones y el efector final.

Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado por el CONACYT por medio de la beca de posgrado con CVU 1077676 y el LANAVEX de la Universidad Politécnica de Pachuca.

Referencias

Barrientos, A., Cruz, A., Peñín, L., and Balaguer, C. (2007). *Fundamentos de robótica*. McGraw-Hill.

- Bartelink, M. E. (2012). *Global inverse kinematics solver for linked mechanisms under joint limits and contacts. The BIRTH game*. PhD thesis, Universiteit Utrecht. European Design Centre.
- Craig, J. (1986). *Introduction to robotics : mechanics & control / John J. Craig*. Addison-Wesley Pub. Co., Reading, Mass. Includes bibliographies and index.
- Dam, E. B., Koch, M., and Lillholm, M. (1998). Quaternions, interpolation and animation. Technical report.
- Diebel, J. (2006). Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors.
- Jia, Y.-B. (2015). Quaternions and rotations.
- Kenwright, B. (2012). A beginners guide to dual-quaternions: What they are, how they work, and how to use them for 3d character hierarchies. In *20th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision*, pages 1–10. 20th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision 2012, WSCG 2012 ; Conference date: 26-06-2012 Through 28-06-2012.
- Kenwright, B. (2013). Inverse kinematics with dual-quaternions, exponential-maps, and joint limits. *International Journal on Advances in Intelligent Systems*, 6(1, 2).
- Pham, H.-L., Perdureau, V., Adorno, B. V., and Fraisse, P. (2018). Position and orientation control of robot manipulators using dual quaternion feedback. In *IROS*, pages 658–663. IEEE.
- Pieper, D. (1968). *The Kinematics of Manipulators Under Computer Control*. Computer Science Department. Stanford University.
- Ramírez Gordillo, J., Merchán Cruz, E., Lugo González, E., Rodríguez Cañizo, R., Ponce Reynoso, R., and Urriolagoitia Sosa, G. (2011). Desarrollo de una nueva solución compacta a la cinemática de manipuladores robóticos basada en cuaterniones duales. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, 8(4):334–344.
- Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., and Oriolo, G. (2010). *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer London.
- Spong, M. and Vidyasagar, M. (1989). *Robot Dynamics and Control*. Wiley.
- Vilhena-Adorno, B. (2017). *Robot Kinematic Modeling and Control Based on Dual Quaternion Algebra - Part I: Fundamentals*. hal-01478225.