

## Modelado, simulación y control de un robot humanoide sobre ruedas Modeling, simulation and control of a wheeled humanoid robot

I.A. Rodríguez-Márquez <sup>a</sup>, R.S. Núñez-Cruz <sup>a,\*</sup>, J.M. Ibarra-Zannatha <sup>b</sup>

<sup>a</sup>Laboratorio de Automatización e Instrumentación, Universidad Politécnica de Tulancingo, 43629, Tulancingo, Hidalgo, México.

<sup>b</sup>Departamento de Control Automático, CINVESTAV-IPN, 07360, Ciudad de México, México.

### Resumen

En el presente artículo se presenta el modelado y control de un nuevo robot humanoide como una plataforma de péndulo invertido sobre ruedas, el objetivo del esquema de control lineal es mantener la estabilidad de la plataforma manteniendo el equilibrio y siguiendo consignas de movimiento. El sistema propuesto esta formado por dos elementos principales: el torso humanoide formado por diez articulaciones, considerando los dos brazos y la cabeza, por otro lado, una plataforma móvil de tres grados de libertad con dos ruedas, lo que la convierte en un sistema subactuado. Se presenta el desarrollo del modelo matemático y su linealización, así como el cálculo de los parámetros del modelo. Además, los resultados en simulación son presentados en el software de Matlab/Simulink usando un controlador por retroalimentación de estados completo, incluyendo una comparación al usar dos métodos de diseño: asignación de polos y la técnica del regulador cuadrático lineal, para las pruebas se consideran condiciones iniciales, perturbaciones y seguimiento de trayectorias.

*Palabras Clave:* Modelo matemático, Sistema subactuado, Péndulo invertido sobre ruedas, Espacio de estados, Control LQR.

### Abstract

This article presents the modeling and control of a new humanoid robot as wheeled inverted pendulum platform, the objective of the linear control scheme is to maintain the stability of the platform by maintaining balance and following movement instructions. The proposed system is formed by two main elements: the humanoid torso formed by ten joints, considering the two arms and the head, on the other hand a mobile platform with three degrees of freedom with two wheels, which makes it an underactuated system. The development of the mathematical model and its linearization are presented, as well as the calculation of the model parameters. In addition, the simulation results are presented in the Matlab/Simulink software using a full-state feedback controller, including a comparison using two design methods: pole assignment and the quadratic linear regulator technique, for the tests initial conditions, disturbances and trajectory tracking are considered.

*Keywords:* Mathematical model, Underactuated system, Wheeled inverted pendulum, State space, LQR controller.

### 1. Introducción

Los robots humanoides con ruedas capaces de realizar tareas de manipulación, son de gran interés entre la comunidad científica: debido a su naturaleza inestable, se pueden utilizar como plataformas de investigación para implementar distintas técnicas de control, otra característica interesante es que la base móvil a pesar de tener solo dos actuadores, uno en cada rueda, es capaz de realizar cuatro movimientos distintos, dos desplazamientos lineales y dos angulares, uno que define la orientación y otro la inclinación, esto lo clasifica por definición

en una plataforma subactuada (Braham et al., 2014), lo cual requiere especial atención en el diseño del controlador.

Recientemente muchos robots han sido desarrollados para brindar asistencia a los humanos en diversas actividades, principalmente los robots con piernas entran en esta categoría (Nenchev et al., 2019), aunque pueden ser estáticamente estables presentan desventajas frente a los robots con ruedas, ya que estos requieren soportes mucho más pequeños para moverse en entornos desordenados, además, el uso de ruedas también es más eficiente energéticamente que el uso de piernas ya que no

\* Autor para correspondencia: rafael.nunez@upt.edu.mx

**Correo electrónico:** ismael.1117@upt.edu.mx (Ismael Alejandro Rodríguez Márquez), rafael.nunez@upt.edu.mx (Rafael Stanley Núñez Cruz), jibarra@cinvestav.mx (Juan Manuel Ibarra Zannatha)

**Historial del manuscrito:** recibido el 20/05/2022, última versión-revisada recibida el 05/08/2022, aceptado el 27/08/2022, publicado el 05/10/2022. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v10iEspecial4.9336>



es necesario cargar con el propio peso de las mismas, de este modo, el equilibrio requiere muy poca energía. Por lo general, en este tipo de robots la falta de actuación está en la articulación de inclinación ya que afecta el equilibrio del robot, normalmente se aborda este problema desacoplando las leyes de control utilizadas para regular el movimiento de la parte superior del cuerpo y la plataforma móvil.

En particular, en (Jeong and Takahash, 2008) un método de control es propuesto y aplicado al robot tipo péndulo invertido sobre ruedas *I-PENTAR*, las ecuaciones de movimiento de este robot son calculadas considerando restricciones cinemáticas en la plataforma móvil, además, un controlador LQR es aplicado considerando los movimientos de los brazos como perturbaciones; por otro lado, en (Feng et al., 2011), los autores utilizaron un controlador por asignación de polos para controlar la base móvil.

En (Kuindersma et al., 2009) se ha aplicado un método basado en ganancias para el control de un manipulador con ruedas (*uBot-5*). Desde otra perspectiva, en (Stilman et al., 2009) las referencias de tareas se utilizan para calcular los pares de torsión de las articulaciones que garantizan la estabilidad y desplazamiento del robot mientras realiza otras tareas con la parte superior del cuerpo. Por otro lado, que en (Chan et al., 2013) se muestra una revisión completa del modelo y control de los sistemas WIP (por sus siglas en inglés Wheeled Inverted Pendulum). Asimismo, en (Dai et al., 2015) los controladores por modo deslizante para el auto equilibrio del sistema WIP y el movimiento de inclinación son diseñados independientemente con fricción compensada. En (Hirose et al., 2016) el control predictivo del modelo (MPC) se utiliza para controlar el robot personal para que siga al ser humano, considerando varios tipos de restricciones de nivel superior e inferior. Por otra parte, en (Zafar et al., 2018) inspirado en (Zafar and Christensen, 2016), los autores proponen un marco de control de todo el cuerpo para el *Golem Krang*. En (Zambella et al., 2019) se propone un método de control para robots humanoides con ruedas, donde se deriva una ley de control para el sistema como un par calculado en las cuasi-velocidades para estabilizar el robot alrededor de la posición vertical.

En el presente trabajo se propone un nuevo robot humanoide sobre ruedas, tomando como base el torso de un robot humanoide desarrollado por los autores previamente. Dicha plataforma tiene como objetivo principal, ser una herramienta académica para la investigación en diferentes áreas de la robótica tales como: el análisis de la cinemática y dinámica, implementación de técnicas de control clásico y moderno, diseño e implementación de estrategias de generación de trayectorias y evasión de obstáculos, navegación en mapas conocidos o en ambientes desconocidos, manipulación de objetos, etc.

La parte restante de este documento se organiza de la siguiente manera: la sección II muestra el análisis del modelo cinemático diferencial, considerando el movimiento de los brazos como una perturbación al sistema. La sección III engloba el análisis y desarrollo del modelo dinámico basado en el enfoque de Euler-Lagrange, la sección IV presenta las consideraciones adicionales al modelo para poder usar el modelo dinámico, así

también, debido a que el modelo resultante es no lineal, se realiza la linealización de las ecuaciones de movimiento para poder implementar técnicas de control lineales, la sección V incluye el esquema de control y los resultados de simulación, usando el controlador lineal por retroalimentación de estados completo basado en dos métodos de diseño: asignación de polos y la técnica del regulador cuadrático lineal, así como las pruebas frente a condiciones iniciales, perturbaciones y seguimiento de trayectorias. Finalmente en la sección VI se concluye el artículo y se describe el trabajo a futuro.

## 2. Modelo cinemático diferencial

El sistema propuesto se separa en dos elementos principales: el torso humanoide y una base móvil de dos ruedas. El torso tiene diez articulaciones, considerando los dos brazos y la cabeza, sin embargo, en esta ocasión se considera como un solo eslabón y el movimiento de sus componentes se considera como perturbaciones al modelo de la base móvil.

En la Figura 1 se observa el sistema de coordenadas  $\Sigma_r$ , fijo al robot, el cual está ubicado en el punto medio del eje que une a las dos ruedas. Bajo estas consideraciones, se considera que el sistema puede realizar tres movimientos: un desplazamiento lineal  $x$  en el eje  $\hat{x}_r$  y dos movimientos angulares, el primero de inclinación  $\alpha$  en el eje  $\hat{y}_r$  y el segundo de orientación  $\theta$  en el eje  $\hat{z}_r$ .

La plataforma también tiene la capacidad de desplazarse en el eje  $\hat{y}_w$  del sistema de coordenadas del mundo  $\Sigma_w$ , para lo cual es necesario cambiar la orientación  $\theta$ . Considerando todos los movimientos que es capaz de realizar la plataforma y el hecho de que solo cuenta con dos actuadores, se concluye que es un sistema subactuado.

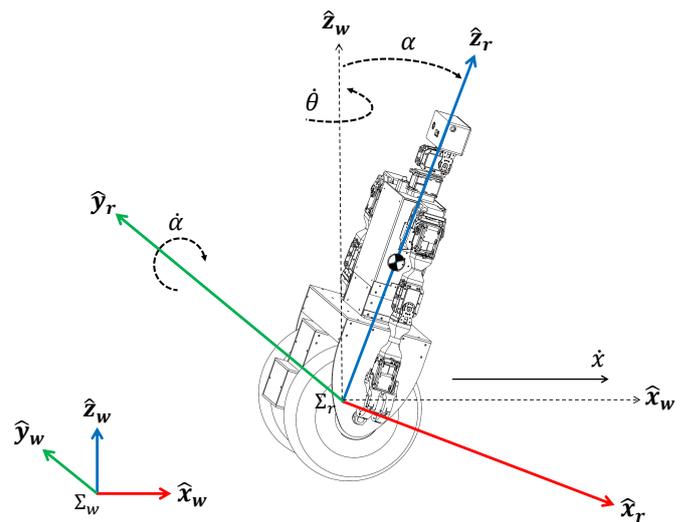


Figura 1: Sistema de referencia del robot humanoide sobre ruedas

Al mapeo entre las velocidades de las ruedas y las velocidades de la plataforma se le llama modelo cinemático diferencial, esta relación es más fácil de obtener en el sistema de coordenadas fijo al robot  $\Sigma_r$ , siguiendo la metodología presentada en (Siegwart et al., 2011).

La metodología consiste en sumar las contribuciones de velocidad lineal y angular de la plataforma debido al movimiento de cada rueda por separado, en el caso de una plataforma diferencial, al hacer girar una rueda mientras la otra está detenida se obtiene un movimiento circular alrededor de la rueda que está detenida.

Al moverse una de las ruedas con velocidad angular  $\dot{\varphi}_i$  la velocidad del centro de la plataforma es la mitad de la velocidad de avance de la rueda, por estar a la mitad de la distancia al centro de giro, de modo que:  $\dot{x}_i = \frac{1}{2}r\dot{\varphi}_i$ , donde  $r$  es el radio de las ruedas. La velocidad lineal solo tiene componente en el eje  $\hat{x}_r$  por que el análisis se hace en el sistema de coordenadas del robot y las ruedas no se pueden desplazar de manera lateral, a menos de que sean ruedas omnidireccionales pero ese no es el caso aquí, por lo tanto  $\dot{y}_r = 0$ .

Por otro lado, la contribución de velocidad angular  $\dot{\omega}_i$  se obtiene al dividir la velocidad angular entre el radio de giro  $\dot{\omega}_i = \frac{1}{2d}r\dot{\varphi}_i$  donde  $d$  es la distancia de las ruedas al centro de la plataforma, como se indica en la Figura 2.

El movimiento de la rueda derecha  $\varphi_{rd}$  produce una rotación positiva, mientras que el movimiento de la rueda izquierda  $\varphi_{ri}$  produce una rotación negativa.

La velocidad angular de la inclinación  $\dot{\alpha}$  no se ve afectada por las velocidades de las ruedas, su movimiento se debe a efectos dinámicos analizados en la sección III.

Con estas consideraciones el modelo cinemático directo queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{r}{2d} & -\frac{r}{2d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_{rd} \\ \dot{\varphi}_{ri} \end{bmatrix} \quad (1)$$

A la matriz obtenida en (1) se le conoce como matriz Jacobiana  $J$  y también relaciona las fuerzas y pares.

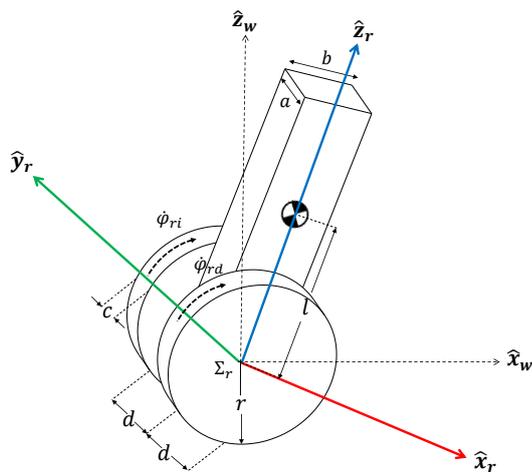


Figura 2: Representación geométrica y parámetros del robot

Por otro lado, el modelo cinemático inverso, definido como el mapeo de las velocidades de la plataforma a las velocidades en las ruedas, se obtiene despejando del modelo cinemático di-

recto dado por (1) de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_{rd} \\ \dot{\varphi}_{ri} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 & \frac{d}{r} \\ \frac{1}{r} & 0 & -\frac{d}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix} \quad (2)$$

Finalmente la conversión de las velocidades de la plataforma, en el sistema de coordenadas del robot  $\Sigma_r$ , al sistema de coordenadas del mundo  $\Sigma_w$  se obtiene mediante la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_w \\ \dot{y}_w \\ \dot{\theta}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix} \quad (3)$$

La cual es la matriz de rotación estándar de un ángulo  $\theta$  sobre el eje  $\hat{z}_w$ , lo cual permite describir la dirección de la velocidad lineal en el sistema de coordenadas del mundo.

### 3. Modelo dinámico

El enfoque dinámico de Euler-Lagrange es un método muy poderoso para formular las ecuaciones de movimiento de los sistemas mecánicos (Cortés, 2011). Este método se utiliza para derivar sistemáticamente las ecuaciones de movimiento considerando la energía cinética y potencial del sistema dado. La ecuación de Euler-Lagrange se puede escribir de la siguiente forma:

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (4)$$

Donde  $q$  es el vector de coordenadas generalizadas y  $\tau$  representa el vector de fuerzas generalizadas. A su vez la función lagrangiana  $L = K - P$  se define como la diferencia entre la energía cinética total  $K$  y la energía potencial total  $P$ , del sistema, las cuales se obtienen de sumar las energías cinética  $K_i$  y potencial  $P_i$  de cada eslabón  $i \in \{1, 2, 3\}$ . En este caso se tienen tres eslabones: las dos ruedas y el cuerpo del péndulo.

La energía cinética  $K_i$  del eslabón  $i$  está dada por:

$$K_i = \frac{1}{2} \vec{v}_i^T m_i \vec{v}_i + \frac{1}{2} \vec{\omega}_i^T I_i \vec{\omega}_i \quad (5)$$

Donde  $m_i$  es la masa,  $I_i$  es el tensor de inercia,  $\vec{v}_i$  y  $\vec{\omega}_i$  son la velocidad lineal y angular del centro de masa  $i$ .

Por otro lado, la energía potencial es igual a la cantidad de trabajo necesaria para elevar el centro de masa, desde un sistema de referencia hasta su posición actual. La energía potencial  $P_i$  de la masa  $m_i$  esta dada por:

$$P_i = m_i g h_i \quad (6)$$

Donde  $h_i$  es la altura del centro de masa desde el sistema de referencia.

Para definir la velocidad angular basta con observar los movimientos rotacionales que tenga cada eslabón del sistema, en el caso de que la velocidad angular de un eslabón esté dada por la suma de varias velocidades angulares, es necesario que la suma se haga con respecto a un mismo sistema de referencias.

La velocidad lineal para cualquier masa  $i$  se define como:

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{\rho}}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_i \quad (7)$$

Donde  $\dot{\vec{\rho}}_i$  representa el vector de velocidad traslacional y  $\vec{r}_i$  representa el vector de posición hacia el centro de masa  $i$ .

De acuerdo con la representación geométrica para el sistema WIP mostrada en la Figura 2, el vector de posición del centro de masa para el péndulo ( $\vec{r}_{pd}$ ), para la rueda derecha ( $\vec{r}_{rd}$ ) y la rueda izquierda ( $\vec{r}_{ri}$ ) esta dado por:

$$\vec{r}_{pd} = \begin{bmatrix} l \sin \alpha \\ 0 \\ l \cos \alpha \end{bmatrix} \quad \vec{r}_{rd} = \begin{bmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{r}_{ri} = \begin{bmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Dadas las definiciones anteriores y al sustituir los vectores de posición de (8) en (7), se obtienen las velocidades angulares y lineales para cada eslabón.

Para el centro de masa del péndulo se obtiene:

$$\omega_{pd} = \dot{\alpha} \hat{y}_r + \dot{\theta} \hat{z}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad v_{pd} = \begin{bmatrix} \dot{x} + l \cos \alpha \dot{\alpha} \\ l \sin \alpha \dot{\theta} \\ -l \sin \alpha \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Para la rueda derecha se obtiene:

$$\omega_{rd} = \dot{\varphi}_{rd} \hat{y}_r + \dot{\theta} \hat{z}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}_{rd} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad v_{rd} = \begin{bmatrix} \dot{x} + d\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Para la rueda izquierda se obtiene:

$$\omega_{ri} = \dot{\varphi}_{ri} \hat{y}_r + \dot{\theta} \hat{z}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}_{ri} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad v_{ri} = \begin{bmatrix} \dot{x} - d\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Adicionalmente para poder evaluar (5), de la energía cinética, es necesario definir los tensores de inercia para el péndulo y las ruedas:

$$I_{pd} = \begin{bmatrix} I_{pdx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{pdy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{pdz} \end{bmatrix} \quad I_r = \begin{bmatrix} I_{rx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{ry} & 0 \\ 0 & 0 & I_{rz} \end{bmatrix}$$

La energía cinética del péndulo se obtiene de sustituir las velocidades de (9) en (5) y la masa del péndulo como  $m_{pd}$ :

$$K_{pd} = \frac{1}{2} m_{pd} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (I_{pdy} + l^2 m_{pd}) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} (I_{pdz} + l^2 m_{pd} - l^2 m_{pd} \cos^2 \alpha) \dot{\theta}^2 + l m_{pd} \dot{x} \dot{\alpha} \cos \alpha \quad (12)$$

Asimismo la energía cinética de la rueda derecha se obtiene de sustituir las velocidades de (10) en (5) y la masa de la rueda como  $m_r$ :

$$K_{rd} = \frac{1}{2} I_{rz} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{ry} \dot{\varphi}_{rd}^2 + m_r \left( \dot{x} + d\dot{\theta} \right) \left( \frac{1}{2} \dot{x} + \frac{1}{2} d\dot{\theta} \right) \quad (13)$$

También la energía cinética de la rueda izquierda se obtiene de sustituir las velocidades de (11) en (5):

$$K_{ri} = \frac{1}{2} I_{rz} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{ry} \dot{\varphi}_{ri}^2 + m_r \left( \dot{x} - d\dot{\theta} \right) \left( \frac{1}{2} \dot{x} - \frac{1}{2} d\dot{\theta} \right) \quad (14)$$

La energía cinética total del sistema se obtiene sumando las contribuciones de cada centro de masa dadas por las ecuaciones (12), (13) y (14):

$$K = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{ry} (\dot{\varphi}_{rd}^2 + \dot{\varphi}_{ri}^2) + \frac{1}{2} I_y \dot{\alpha}^2 + m_{pd} l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + m_{pd} l \dot{x} \dot{\alpha} \cos \alpha \quad (15)$$

Donde:

$$M = m_{pd} + 2m_r \\ I_z = I_{pdz} + 2(I_{rz} + d^2 m_r) \\ I_y = I_{pdy} + l^2 m_{pd}$$

En la ecuación (15) se pueden observar cinco variables de movimiento: las tres de la plataforma y las de las ruedas, sin embargo, como ya se vio en el análisis de la cinemática, estos movimientos están relacionados y solo hay tres variables independientes, se pueden elegir de manera arbitraria, que el vector de coordenadas generalizadas esté formado por las velocidades de las ruedas o las de la plataforma y dejar el análisis en función de las variables elegidas usando el modelo cinemático directo o inverso de las ecuaciones (1) o (2).

Al sustituir (2) en (15) la energía cinética queda de la siguiente manera:

$$K = \left( \frac{1}{2} M + \frac{1}{r^2} I_{ry} \right) \dot{x}^2 + \left( \frac{1}{2} I_z + \frac{d^2}{r^2} I_{ry} \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_y \dot{\alpha}^2 + m_{pd} l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + m_{pd} l \dot{x} \dot{\alpha} \cos \alpha \quad (16)$$

Para el cálculo de la energía potencial total hay que notar que la altura  $h_i$  descrita en (6) se mide en el eje  $\hat{z}_r$  que es el eje alineado a la gravedad, por lo tanto al sustituir la componente  $z$  de los vectores de posición de (8) en (6) se tiene:

$$P = m_{pd} g l \cos \alpha \quad (17)$$

Es decir solo el péndulo tiene energía potencial, porque las ruedas se encuentran a la altura del origen.

Para simplificar el cálculo de las ecuaciones de movimiento se definen las siguientes constantes:

$$c_1 = \frac{1}{2} M + \frac{1}{r^2} I_{ry} \quad c_2 = \frac{1}{2} I_z + \frac{d^2}{r^2} I_{ry} \\ c_3 = \frac{1}{2} I_y \quad c_4 = m_{pd} l^2 \\ c_5 = m_{pd} l \quad c_6 = m_{pd} g l$$

De esta forma el Lagrangiano queda descrito como la diferencia entre (15) y (6) de la siguiente manera:

$$L = c_1 \dot{x}^2 + c_2 \dot{\theta}^2 + c_3 \dot{\alpha}^2 + c_4 \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + c_5 \dot{x} \dot{\alpha} \cos \alpha - c_6 \cos \alpha \quad (18)$$

Al tomar el vector de coordenadas generalizadas como  $q = [x \ \alpha \ \theta]^T$  y al aplicar la expresión (4), las ecuaciones del modelo dinámico son:

$$\tau_x = -c_5 \dot{\alpha}^2 \sin \alpha + 2c_1 \ddot{x} + c_5 \ddot{\alpha} \cos \alpha \\ \tau_\alpha = -2c_4 \dot{\theta}^2 \cos \alpha \sin \alpha + 2c_3 \ddot{\alpha} - c_6 \sin \alpha + c_5 \dot{x} \cos \alpha \\ \tau_\theta = (2c_2 + 2c_4 \sin^2 \alpha) \ddot{\theta} + 4\dot{\alpha} c_4 \dot{\theta} \cos \alpha \sin \alpha$$

Donde  $\tau_x$  será la fuerza en el eje  $\hat{x}_r$ ,  $\tau_\alpha = 0$  es el par en el eje  $\hat{y}_r$ , es cero porque esa articulación es subactuada y  $\tau_\theta$  es el par en el eje  $\hat{z}_r$ .

Si se reescriben estas ecuaciones como un sistema matricial se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_\alpha \\ \tau_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1 & c_5 \cos \alpha & 0 \\ c_5 \cos \alpha & 2c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_2 + 2c_4 \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c_5 \dot{\alpha}^2 \sin \alpha \\ -2c_4 \dot{\theta}^2 \cos \alpha \sin \alpha - c_6 \sin \alpha \\ 4\dot{c}_4 \dot{\theta} \cos \alpha \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (19)$$

#### 4. Consideraciones adicionales de modelado

A continuación se presentan algunas otras consideraciones que hay que tener en cuenta para poder usar el modelo dinámico obtenido en la sección anterior para aplicarlo en el desarrollo de técnicas de control.

##### 4.1. Pares en las ruedas

Como se mencionó en el cálculo de la cinemática directa, la matriz Jacobiana  $J$  definida en (1), relaciona fuerzas y pares en el espacio articular y en el de trabajo. Al usar el principio de trabajos virtuales se observa que dicha relación es a través de  $J^T$  de esta forma se puede obtener una expresión para los pares en las ruedas de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \tau_{rd} \\ \tau_{ri} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2d} \\ \frac{r}{2} & -\frac{r}{2d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_\theta \end{bmatrix}$$

La inversa de esta expresión permite reescribir el modelo dinámico de (19) con respecto a las fuerzas de las ruedas a partir de la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{rd} \\ \tau_{ri} \end{bmatrix}$$

##### 4.2. Parámetros del modelo

Para poder construir simuladores numéricos usando el modelo descrito por (19) es necesario calcular los valores de masa e inercia. Si las dimensiones de los eslabones están completamente definidas, la masa e inercia pueden ser aproximadas usando los modelos geométricos de las piezas diseñados en algún software de CAD o midiendo directamente los eslabones por separado.

Otro enfoque es aproximar la forma de los eslabones usando formas geométricas básicas, como se muestra en la Figura 2. Una ventaja de este enfoque es poder analizar el efecto que tiene modificar alguna dimensión del sistema sobre su respuesta.

Tras considerar el segundo enfoque, para el caso del péndulo, se usó un paralelepípedo rectangular con las dimensiones mostradas en la Figura 2:

$$I_{pd} = \frac{1}{12} m_{pd} \begin{bmatrix} b^2 + 2l^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 + 2l^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$

Para el caso de las ruedas se usó un cilindro sólido:

$$I_r = \frac{1}{4} m_r \begin{bmatrix} r^2 + \frac{1}{3} c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 + \frac{1}{3} c^2 \end{bmatrix}$$

Los parámetros considerados para la simulación se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1: Parámetros del modelo

Símbolo	Valor	Unidad
$m_r$	0.5	$Kg$
$m_{pd}$	5	$Kg$
$l$	0.27	$m$
$d$	0.128	$m$
$r$	0.115	$m$
$a$	0.10	$m$
$b$	0.20	$m$
$c$	0.065	$m$
$g$	9.81	$m/s^2$

##### 4.3. Linealización del modelo dinámico

Del modelo descrito por (19) podemos observar que el sistema es no lineal, para poder usar esquemas de control lineales es necesario que el sistema pueda ser descrito en la forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (20)$$

Una aproximación se puede obtener usando los primeros dos términos de la expansión en series de Maclaurin, es decir linealizando alrededor del punto  $\alpha = \dot{\alpha} = 0, \dot{\theta} = 0$  (Li et al., 2013).

Para este sistema el vector de estados se elige de la forma:

$$x = [\dot{x} \quad \alpha \quad \dot{\alpha} \quad \dot{\theta}]^T \quad (21)$$

Las matrices  $A$  y  $B$  del modelo linealizado quedan expresadas de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_2 & 0 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$a_1 = \frac{c_5 c_6}{c_5^2 - 4c_1 c_3} \quad a_2 = \frac{2c_1 c_6}{4c_1 c_3 - c_5^2}$$

$$b_1 = \frac{2c_3}{4c_1 c_3 - c_5^2} \quad b_2 = \frac{c_5}{c_5^2 - 4c_1 c_3} \quad b_3 = \frac{1}{2c_2}$$

La ecuación de salida se expresa como:

$$y = Cx \quad (22)$$

Donde  $C$  es una matriz identidad de  $4 \times 4$ , ya que los cuatro estados son salidas medibles: la velocidad lineal  $\dot{x}$  y angular  $\dot{\theta}$  del robot pueden ser obtenidas usando el modelo cinemático directo presentado en (1) conociendo las velocidades de las ruedas, por otro lado, el ángulo de inclinación  $\alpha$  y la velocidad angular  $\dot{\alpha}$  pueden ser medidos a partir de una unidad de medición inercial.

A partir del modelo linealizado se puede obtener la función de transferencia mediante  $G(s) = C(sI - A)^{-1} B$ , de la cual se

puede identificar el polinomio característico descrito a continuación:

$$P(s) = s^4 - a_2s^2 \tag{23}$$

Se puede observar que el sistema linealizado tiene dos polos en el origen  $s_{1,2} = 0$  y dos polos más en  $s_{3,4} = \pm \sqrt{a_2}$ , por lo tanto, se trata de un sistema inestable.

**4.4. Controlabilidad y Observabilidad**

En el caso de sistemas lineales invariantes, existe un método para el estudio de la controlabilidad y la observabilidad, la cual se formula mediante el siguiente teorema presentado en (Domínguez et al., 2006).

El sistema de dimensión  $n$  con ecuación de estado igual a (20), es controlable y observable, si y sólo si la matriz de controlabilidad  $M$ , definida de la siguiente forma  $M = [B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B]$  y la matriz de observabilidad  $O$  definida por  $O = [C \mid CA \mid CA^2 \mid \dots \mid CA^{n-1}]$  son de rango máximo, es decir,  $n = 4$ , al considerar el tamaño del vector de estados en (21).

Para este sistema la matriz de controlabilidad y observabilidad quedan expresadas como:

$$M = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1b_2 & 0 & a_2b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El rango de las matrices  $M$  y  $O$  es  $n = 4$ , por lo tanto, el sistema linealizado es controlable y observable.

**5. Esquema de control y resultados en simulación**

Los objetivos de los esquemas de control para el sistema WIP son moverse a una velocidad deseada mientras el robot mantiene el ángulo de inclinación  $\alpha$  en posición vertical, además, de que el controlador debe de ser capaz de estabilizar el sistema con un sobre impulso y tiempos de establecimiento aceptables.

El objetivo del controlador por retroalimentación de estados completo es regular la salida tal que siga la señal de referencia aún en presencia de perturbaciones. La ley de control esta dada por:

$$u = Ke \tag{24}$$

Donde:  $u$ : es la salida del controlador,  $K$ : es la matriz de ganancias,  $e = x_d - x$  es el error de seguimiento,  $x_d$ : es el vector

de estados deseados.

A continuación se muestran dos métodos de diseño para determinar la matriz de ganancias  $K$ .

**5.1. Asignación de polos**

Antes de usar este método debe conocerse a priori el modelo matemático, para posteriormente poder manipular la ubicación de los polos en el lazo cerrado y poder ubicarlos en el lugar deseado para obtener una respuesta específica.

Para sistemas de orden superior la literatura recomienda ubicar los polos dominantes en los requerimientos deseados y colocar los polos restantes significativamente lejos 5 o 6 veces para poder despreciar su efecto en la respuesta transitoria (Ogata, 2010).

Para el modelo del sistema WIP linealizado el orden del polinomio característico es de grado 4, como se observa en (23), por consiguiente, para diseñar los polos de referencia se especifican los siguientes requerimientos de diseño: un sistema sobreamortiguado con coeficiente de amortiguamiento  $\zeta = 1.5$  y tiempo de establecimiento  $T_s = 2$  seg, con dos polos no dominantes, negativos.

Los polos deseados requeridos son:

$$\begin{aligned} p_1 &= -0.3056 & p_2 &= -2.094 \\ p_3 &= -12 & p_4 &= -15 \end{aligned}$$

Al aplicar el método de asignación de polos al modelo presentado en (19) y al usar los parámetros de la tabla 1 se obtiene la siguiente matriz de ganancias:

$$K = \begin{bmatrix} 86.014 & 301.88 & 86.29 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.43 \end{bmatrix}$$

**5.2. Regulador Cuadrático Lineal**

Este método mejor conocido como LQR (por sus siglas en ingles Linear Quadratic Regulator) presenta la ventaja, frente al método por asignación de polos, de usar un procedimiento sistemático para calcular la matriz  $K$  mediante la minimización de la siguiente función de costo:

$$J = \int_0^\infty (e^T Q e + u^T R u) dt \tag{25}$$

Donde  $Q$  es la matriz de ponderación del error de seguimiento y  $R$  es la matriz de ponderación del costo de energía, ambas son matrices simétricas definidas positivas, estas matrices se eligen en función de la cantidad de costo que el diseñador quiere atribuir a cada elemento de estado o entrada, la asignación de un mayor costo para ciertos estados implicaría que su desempeño tendría mayor prioridad sobre los demás.

El proceso de minimizar la función de costo en (25) implica resolver una ecuación de Ricatti de la forma:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \tag{26}$$

Cuya solución define la matriz de ganancias de la siguiente manera:

$$K = R^{-1}B^T P \tag{27}$$

Para el caso del sistema WIP lo más importante es mantener la posición vertical, por lo tanto, se le da más ponderación a los términos que dependen de  $\alpha$  y  $\dot{\alpha}$ . Tras estas consideraciones se proponen los siguientes valores para las matrices de ponderación:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al aplicar el método LQR al modelo presentado en (19) y al usar los parámetros de la tabla 1 se obtiene la siguiente matriz de ganancias a partir de (27):

$$K = \begin{bmatrix} 10 & 45.4 & 18.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para la simulación se usó el software de Matlab, especialmente el ambiente de Simulink, el diagrama de bloques se muestra en la Figura 3. En el bloque del modelo dinámico se encuentra las ecuaciones del modelo no lineal que describen el comportamiento del sistema, su salida es el vector de aceleraciones que se obtiene de despejar de (19).

### 5.3. Resultados de simulación

En la Figura 3, se muestra el diagrama de bloques realizado en Matlab Simulink de la implementación del sistema de control, además, de los bloques de control y del modelo dinámico, se observa el bloque de la señal de referencia del lado izquierdo, en la parte superior se puede observar un bloque de perturbación aditiva a la señal de control, en la parte derecha se aprecia el bloque de transformación a sistemas de coordenadas del mundo, adicionalmente se programó un bloque para detener la simulación antes de que la plataforma golpee el piso y un bloque de mundo virtual para visualizar de manera más intuitiva los resultados.

Para obtener las ganancias del controlador, se aplicó la técnica de control presentada anteriormente al modelo linealizado, pero en simulación, estas se aplicaron al modelo no lineal.

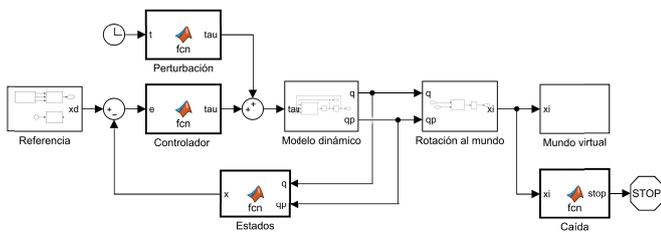


Figura 3: Diagrama a bloques del sistema WIP

En la figura 4, se puede apreciar el entorno virtual de V-Realm Builder, el cual permite visualizar simulaciones de sistemas dinámicos en una escena 3D.

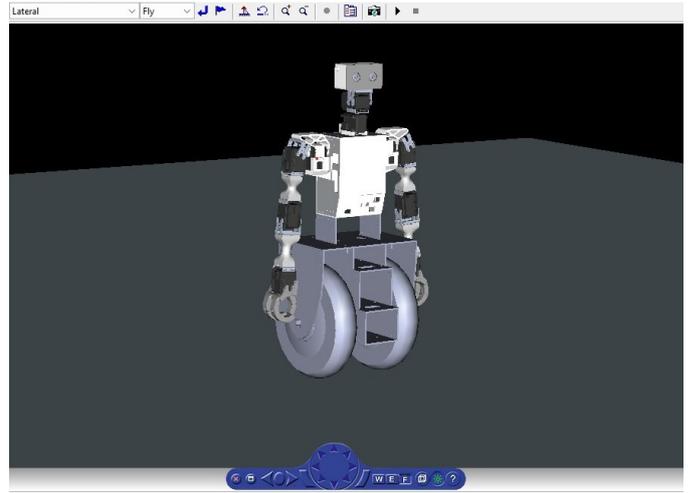


Figura 4: Entorno virtual de V-Realm Builder

En la Figura 5, se muestra una comparación frente a una condición inicial de  $\alpha(0) = 0.17$  radianes de inclinación aproximadamente  $10^\circ$  grados con respecto a la vertical, las gráficas muestran la comparación de los cuatro estados usando los dos métodos de diseño. El método por asignación de polos presenta ser más efectivo debido a que llega más rápido a la posición de equilibrio.

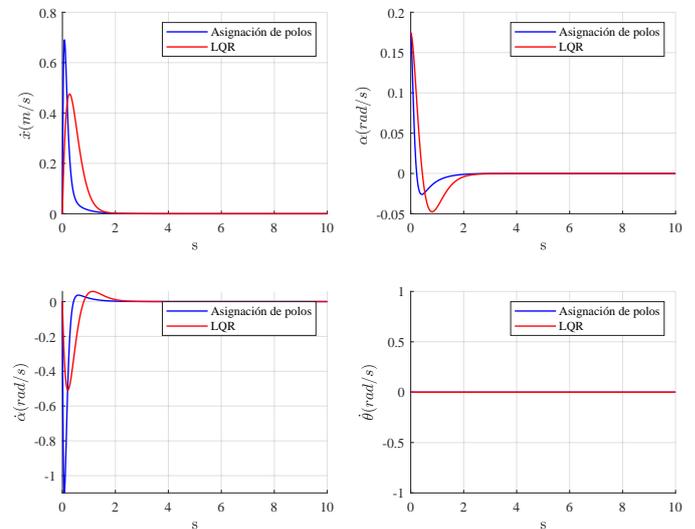


Figura 5: Comparación frente a una condición inicial

En la Figura 6, se observan los resultados de simulación de una prueba con condiciones iniciales cero, pero donde se aplica una perturbación externa, lo cual simula que el robot recibe un golpe estando en la posición vertical durante un lapso de 1s en  $t = 2s$  con una magnitud de  $10 Nm$ , las gráficas muestran la comparación de los cuatro estados. El método LQR presenta tener una mejor respuesta ante una perturbación externa.

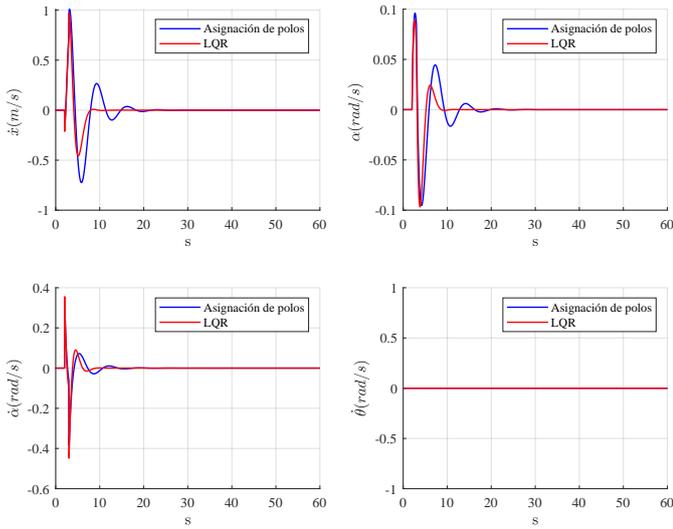


Figura 6: Comparación frente a una perturbación externa

En la Figura 7 se observan los resultados de la última prueba que fue el seguimiento de una trayectoria cuadrada en el espacio de trabajo, para lograrlo se definen trayectorias de velocidad lineal y angular en función del tiempo, la gráfica muestra la comparación de las trayectorias al usar los dos métodos de diseño en el plano  $XY$ . El método  $LQR$  presenta nuevamente ser más efectivo debido a que sigue la trayectoria cuadrada con mejor precisión.

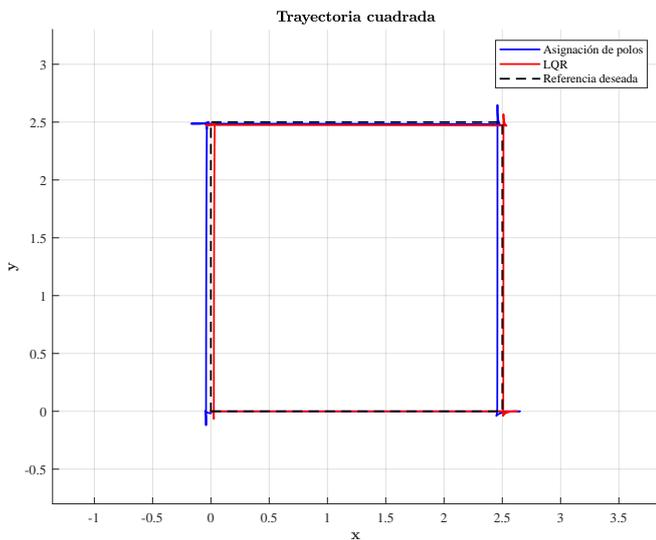


Figura 7: Seguimiento de trayectoria cuadrada en el espacio de trabajo

En la Figura 8 se muestran los resultados de seguimiento en el espacio articular de esta misma prueba. Se muestran únicamente los primeros 30 segundos, ya que la trayectoria es cíclica.

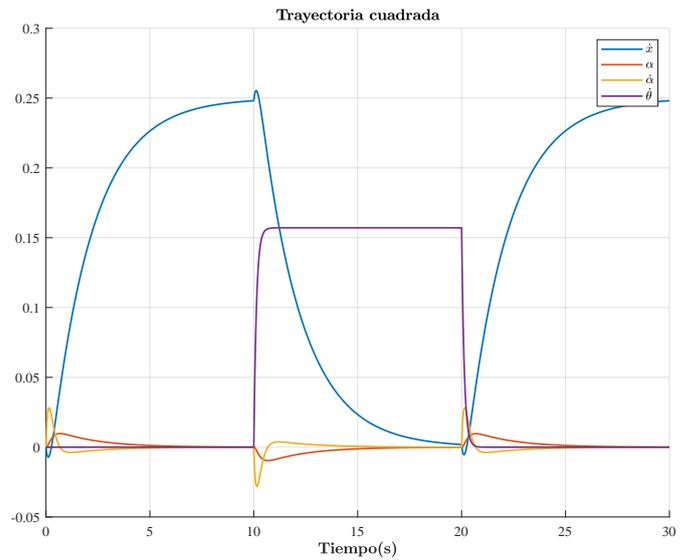


Figura 8: Seguimiento de trayectoria cuadrada en el espacio articular

Los pares aplicados al sistema para esta prueba se aprecian en la Figura 9 donde aproximadamente su valor es de  $1.5 \text{ Nm}$  para el par lineal.

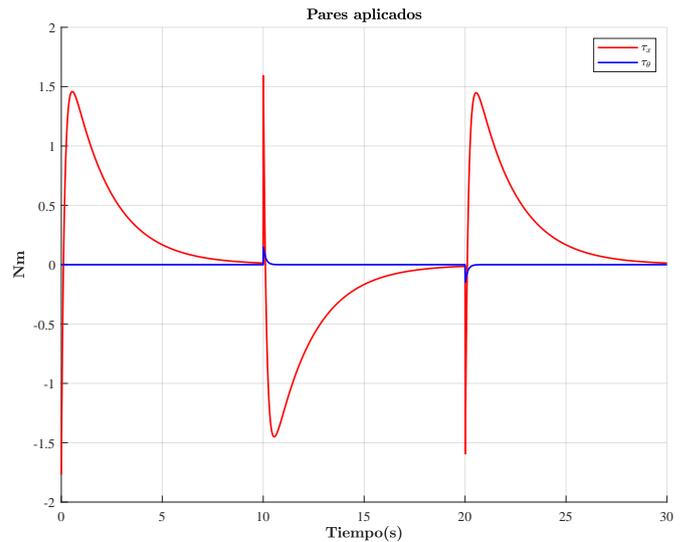


Figura 9: Pares aplicados al sistema frente a seguimiento de trayectoria cuadrada

## 6. Conclusiones y trabajo a futuro

En este documento se presentó el desarrollo del modelo, simulación y control de un robot humanoide sobre ruedas. Los resultados en simulación demuestran que el robot puede mantenerse en la posición vertical y ser estable frente a condiciones de perturbación y seguimiento de trayectorias.

Se considera que el par máximo de los motores es de  $15 \text{ Nm}$ , por lo tanto se observa en la Figura 9 que los motores estarían trabajando alrededor del 10 % de su rango de operación, lo cual indica que el sistema de actuación es adecuado. Un factor importante a considerar es la velocidad de respuesta del controlador, de acuerdo a los resultados de las tres pruebas planteadas, el control sintonizado mediante el método  $LQR$

presenta mejores resultados debido a que su sintonización se hace de una forma mas intuitiva.

Como trabajo futuro se considera la implementación de nuevos controladores lineales y no lineales tanto en simulación como en el prototipo real, el cual se encuentra en fase de desarrollo, ya que hasta el momento se ha construido y probado la base móvil pero falta acoplarla al torso del robot real, de momento se utiliza una estructura de madera que simula el torso del robot humanoide, como se muestra en la Figura 10, con el cual se realizaron unas pruebas iniciales de estabilidad, como se aprecia en la Figura 11.



Figura 10: Vista frontal de la plataforma móvil con el torso de madera



Figura 11: Pruebas iniciales de estabilidad

## Agradecimientos

El desarrollo de este trabajo fue apoyado por el CONACYT por medio de la beca de posgrado con CVU 1075342 y el DCA del CINVESTAV-IPN.

## Referencias

- Braham, A. C., Cherki, B., Djemaï, M., and Busawon, K. (2014). *Analysis and Control of Underactuated Mechanical Systems*. Springer Cham.
- Chan, R. P. M., Stol, K. A., and Halkyard, C. R. (2013). Review of modelling and control of two-wheeled robots. *Annual Reviews in Control*, 37(1):89–103.
- Cortés, F., editor (2011). *Robótica control de robots manipuladores*. Alfaomega, México.
- Dai, F., Gao, X., Jiang, S., Guo, W., and Liu, Y. (2015). A two-wheeled inverted pendulum robot with friction compensation. *Mechatronics*, 30:116–125.
- Domínguez, S., Campoy, P., Sebastián, J. M., and Jiménez, A., editors (2006). *Control en el espacio de estado*. Pearson Educación S.A, Madrid.
- Feng, T., Liu, T., Wang, X., Xu, Z., Zhang, M., and Han, S.-c. (2011). Modeling and implementation of two-wheel self-balancing robot equipped with supporting arms. In *2011 6th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications*, pages 713–718.
- Hirose, N., Tajima, R., Koyama, N., Sukigara, K., and Tanaka, M. (2016). Following control approach based on model predictive control for wheeled inverted pendulum robot. *Advanced Robotics*, 30(6):374–385.
- Jeong, S. and Takahashi, T. (2008). Wheeled inverted pendulum type assistant robot: design concept and mobile control. *Intelligent Service Robotics*, page 313–320.
- Kuindersma, S. R., Hannigan, E., Ruiken, D., and Grupen, R. A. (2009). Dexterous mobility with the ubot-5 mobile manipulator. In *2009 International Conference on Advanced Robotics*, pages 1–7.
- Li, Z., C. Yang, and Fan, L., editors (2013). *Advanced control of wheeled inverted pendulum systems*. Springer-Verlag, London.
- Nenchev, D. N., Konno, A., and Tsujita, T. (2019). *Humanoid Robots*. Butterworth-Heinemann.
- Ogata, K., editor (2010). *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educacion, España.
- Siegwart, R., Nourbakhsh, I. R., and Scaramuzza, D., editors (2011). *Introduction to autonomous mobile robots*. The MIT Press, London, England.
- Stilman, M., Olson, J., and Gloss, W. (2009). Golem krang: dynamically stable humanoid robot for mobile manipulation. In *2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, page 3304–3309.
- Zafar, M. and Christensen, H. I. (2016). Whole body control of a wheeled inverted pendulum humanoid. In *2016 IEEE-RAS 16th International Conference on Humanoid Robots (Humanoids)*, pages 89–94.
- Zafar, M., Hutchinson, S., and Theodorou, E. A. (2018). Hierarchical optimization for whole-body control of wheeled inverted pendulum humanoids. *CoRR*, abs/1810.03074.
- Zambella, G., Lentini, G., Garabini, M., Grioli, G., Catalano, M. G., Pallechi, A., Pallottino, L., Bicchi, A., Settini, A., and Caporale, D. (2019). Dynamic whole-body control of unstable wheeled humanoid robots. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 4(4):3489–3496.