





## Control con entradas saturadas para el vuelo estacionario de quadrotores Input saturated controller for quadrotor hovering

R. Pérez-Alcocer <sup>a,\*</sup>, J. Moreno-Valenzuela <sup>b</sup>, I Lopez-Sanchez <sup>b</sup>, L. García-Delgado <sup>a</sup>, J. R. Noriega <sup>a</sup>

<sup>a</sup>Departamento de Investigación en Física, Universidad de Sonora, 83000, Hermosillo, Sonora, México.

<sup>b</sup>Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital, Instituto Politécnico Nacional, 22435, Tijuana, Baja California, México.

### Resumen

En este trabajo se presenta un controlador con entradas saturadas para quadrotores que realizan la tarea de vuelo estacionario. El controlador se desarrolla considerando las restricciones físicas que presentan los rotores del vehículo, en particular el fenómeno de saturación en los actuadores. Los límites de saturación establecidos en el diseño del controlador permiten evitar que las señales de entrada excedan las capacidades de los actuadores y al mismo tiempo aseguran el cumplimiento de la tarea asignada. La estabilidad del sistema en lazo cerrado es analizada utilizando la teoría de Lyapunov garantizando convergencia asintótica del error de posición del quadrotor. La funcionalidad de la propuesta de control es validada empleando simulaciones numéricas las cuales demuestran las ventajas de considerar el efecto de la saturación en el diseño del controlador.

*Palabras Clave:* Quadrotor, control saturado, vuelo estacionario, estabilidad asintótica.

### Abstract

In this document, a controller with saturated inputs for quadrotors performing a hover task is presented. The controller is developed considering the physical restrictions associated with the vehicle rotors, specifically, the saturation phenomenon in the actuators. The controller design establishes the saturation limits to keep the input signals from exceeding the maximum ratings of the actuators and, at the same time, ensure the fulfillment of the assigned task. The stability of the closed-loop system is analyzed using the Lyapunov theory guaranteeing asymptotic convergence of the quadrotor position error. The functionality of the control proposal is validated using numerical simulations demonstrating the advantages of considering the effect of saturation in the controller design.

*Keywords:* Quadrotor, saturated control, hovering, asymptotic stability.

## 1. Introducción

En los últimos años la investigación relacionada con vehículos no tripulados ha crecido considerablemente. Los investigadores han mostrado interés para trabajar en este campo debido a la amplia gama de aplicaciones de estos vehículos que no requieren la interacción humana de manera directa. Entre las aplicaciones que se le han dado a los vehículos no tripulados se puede mencionar exploración, rescate, inspección, recolección de muestras, mapeo y muchas otras en distintos campos de conocimiento y de la vida diaria. Los vehículos aéreos no tripulados son un caso particular de los vehículos no tripulados que presentan un área de oportunidad para el desarrollo de herramientas que tienen impacto directo en la vida diaria. Existen distintas configuraciones de los vehículos aéreos que incluyen

los de ala fija y los de ala rotatoria. En esta última categoría los quadrotores han sido objeto de una gran popularidad dado que brindan prestaciones tales como movimiento ágil en ambientes reducidos, vuelo suspendido en un solo punto, despegue y aterrizaje vertical, además de que son ligeros y de bajo costo en comparación de otros tipos de aeronaves como son los aviones.

Los esquemas de control son componentes relevantes que impactan significativamente el rendimiento de los quadrotores. La compleja dinámica y la naturaleza subactuada de algunos de estos vehículos dificultan el desarrollo de esquemas de control eficientes que garanticen el cumplimiento de la tarea asignada. Las estrategias de control para lograr las tareas de regulación y seguimiento de trayectorias han sido ampliamente estudiadas. Algunos ejemplos de estos trabajos incluyen el presentado por Jalili et al. (2018) donde se propuso un esquema de con-

\*Autor para correspondencia: ricardoramon.perez@unison.mx

**Correo electrónico:** ricardoramon.perez@unison.mx (Ricardo Pérez-Alcocer), moreno@citedi.mx (Javier Moreno-Valenzuela), ilopez@citedi.mx (Ivan Lopez-Sanchez), arturo.garcia@unison.mx (Luis García-Delgado), benito.noriega@unison.mx (José Rafael Noriega).

**Historial del manuscrito:** recibido el 01/06/2022, última versión-revisada recibida el 12/08/2022, aceptado el 27/08/2022, publicado el 05/10/2022. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v10iEspecial4.9433>



trol combinando las técnicas de control predictivo del modelo y lógica difusa para cumplir con la tarea de seguimiento de trayectorias. Noordin et al. (2021) presentó un sistema de control PID adaptativo de ajuste automático para la estabilización de la posición y orientación del quadrotor bajo incertidumbres de parámetros y perturbaciones externas. Una estrategia de control adaptativo para controlar la velocidad de una carga útil con masa desconocida fue introducida por Lv et al. (2021).

En este trabajo se aborda el caso del control de vuelo estacionario de quadrotores. Este caso en particular resulta de interés porque una cantidad considerable de las aplicaciones del quadrotor necesitan que el vehículo mantenga el vuelo en una posición específica o en un conjunto de ellas para cumplir su encomienda. Algunos de los controladores diseñados para cumplir con la tarea de regulación pueden presentar problemas cuando el vehículo se encuentran a una distancia considerable de su objetivo dado que no toman en cuenta las limitaciones físicas de los actuadores incorporados en el vehículo.

El diseño de controladores que consideran la saturación de la entrada han sido objeto de estudio para distintos dispositivos. En el trabajo presentado por Cheng et al. (2021) se propone un controlador con entradas saturadas para un robot con articulaciones flexibles. De manera similar, Perez-Alcocer et al. (2021) desarrollaron un control visual con entradas saturadas para un robot tipo unicycle. Los quadrotores no han sido la excepción y distintas estrategias han sido presentadas y validadas tanto teórica como experimentalmente en investigaciones como Cao y Lynch (2015), Zhu et al. (2017), Zhou et al. (2019), Jiang et al. (2019), Zheng et al. (2022). En este trabajo se presenta una nueva estrategia de control con entradas saturadas para el vuelo estacionario de un quadrotor. Este esquema de control permite garantizar que tanto el empuje total como el vector de pares aplicados al quadrotor se encuentren acotados y al mismo tiempo limita el rango de valores deseados de orientación que puede tomar el vehículo. La principal característica de este controlador es su simplicidad para ser implementado. Además de lo mencionado anteriormente, la otra contribución principal de este trabajo es el riguroso análisis de estabilidad el cual garantiza que se cumple la tarea de regulación. Por último, los resultados en simulación numérica muestran su eficiencia en condiciones donde otros métodos presentan problemas.

El documento está organizado de la siguiente manera: En la sección 2 se presenta el modelo dinámico del quadrotor y se establece el objetivo de control. El controlador con entradas saturadas para vuelo estacionario y el análisis de estabilidad para el sistema en lazo cerrado se describe en la sección 3. El desempeño del controlador propuesto se discute con los resultados presentados en la sección 4, y las conclusiones de este trabajo son expuestas en la sección 5.

## 2. Modelo dinámico y objetivo de control

En esta sección se presenta el modelo dinámico del quadrotor. Este modelo se obtiene bajo el supuesto que la aeronave es un cuerpo rígido que se mueve libremente en un espacio tridimensional. El modelo ha sido ampliamente estudiado y utilizado en trabajos presentados por Kim et al. (2009), Carrillo et al. (2012) y Perez-Alcocer y Moreno-Valenzuela (2019). El

quadrotor tiene una estructura en forma de cruz con cuatro rotores fijos en los extremos que generan las fuerzas de empuje y arrastre dando lugar al movimiento del vehículo en el espacio. Un diagrama de la estructura del quadrotor, en el cual se presentan las posiciones de los rotores los marcos de referencia tanto inercial como del vehículo y los movimientos que realiza la aeronave, se presentan en la figura 1. Tomando en cuentas las consideraciones antes mencionadas, la dinámica del quadrotor es descrita por las siguientes ecuaciones de movimiento

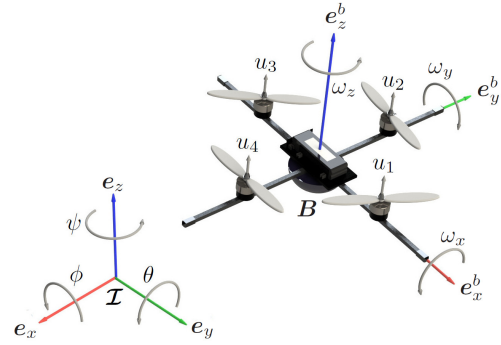


Figura 1: Esquema CAD del quadrotor.

$$m\ddot{\mathbf{p}} + m\mathbf{g}\mathbf{e}_z = R(\boldsymbol{\eta})\mathbf{e}_z u_T, \quad (1)$$

$$H(\boldsymbol{\eta})\ddot{\boldsymbol{\eta}} + C(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\tau}, \quad (2)$$

donde  $\mathbf{p} = [x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^3$  y  $\boldsymbol{\eta} = [\phi \ \theta \ \psi]^T \in \mathbb{R}^3$  son los vectores que representan la posición del centro de masa del vehículo respecto al marco de referencia inercial y la orientación del quadrotor en función de los ángulos de Euler, respectivamente. La masa del vehículo está denotada por  $m$ ,  $g$  es la constante gravitacional,  $I_o$  representa el tensor de inercia y el vector unitario en dirección del eje  $z$  en el marco de referencia inercial está representado por  $\mathbf{e}_z \in \mathbb{R}^3$ . Las matrices  $H(\boldsymbol{\eta})$  y  $C(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})$  relacionadas con la dinámica de orientación se calculan explícitamente como

$$H(\boldsymbol{\eta}) = W(\boldsymbol{\eta})^{-T} I_o W(\boldsymbol{\eta})^{-1}, \quad (3)$$

$$C(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) = W(\boldsymbol{\eta})^{-T} [S(\boldsymbol{\omega}) I_o - I_o W(\boldsymbol{\eta})^{-1} \dot{W}(\boldsymbol{\eta})] W(\boldsymbol{\eta})^{-1}. \quad (4)$$

Para el cálculo de estas matrices, el vector de velocidades angulares  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T \in \mathbb{R}^3$  se obtiene como  $\boldsymbol{\omega} = W(\boldsymbol{\eta})^{-1} \dot{\boldsymbol{\eta}}$ , y  $S(\boldsymbol{\omega}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  representa la matriz antisimétrica dada por

$$S(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz de rotación  $R(\boldsymbol{\eta}) \in SO(3)$  y la matriz que relaciona las velocidades angulares con la razón de cambio de los parámetros de Euler  $W(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  están definidas como

$$R(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\theta c_\psi s_\phi - s_\psi c_\phi & s_\theta c_\psi c_\phi + s_\psi s_\phi \\ c_\theta s_\psi & s_\theta s_\psi s_\phi + c_\psi c_\phi & s_\theta s_\psi c_\phi - c_\psi s_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$W(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} 1 & s_\phi t_\theta & c_\phi t_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi / c_\theta & c_\phi / c_\theta \end{bmatrix}, \quad (6)$$

donde las funciones  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$  y  $\tan(x)$  son representadas como  $s_x$ ,  $c_x$  y  $t_x$ , respectivamente.

Finalmente,  $u_T \in \mathbb{R}$  y  $\tau = [\tau_\phi \ \tau_\theta \ \tau_\psi]^T \in \mathbb{R}^3$  denotan las entradas del sistema correspondientes al empuje total generado por los rotores y el vector de pares, respectivamente. Estas entradas del sistema están en función del empuje y el arrastre que generan los rotores de la aeronave que a su vez dependen de la velocidad con que gira cada uno de los motores. La relación entre los empujes de los rotores  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T \in \mathbb{R}^3$  con el empuje total y el vector de pares está dada por

$$u_T = \sum_{i=1}^4 u_i, \quad \tau = W^{-T}(\eta) \begin{bmatrix} 0 & -l & 0 & l \\ l & 0 & -l & 0 \\ k_y & -k_y & k_y & -k_y \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (7)$$

donde  $l$  es la distancia del centro de masa del quadrotor al eje de giro del rotor y  $k_y$  es un coeficiente de arrastre asociado con la geometría de las hélices. Cabe mencionar que cada rotor tiene una velocidad máxima de giro y por lo tanto también de empuje máximo proporcionado. Esta característica física da lugar a las restricciones de entrada en el diseño del controlador que se va a presentar a continuación.

Algunas propiedades que son de utilidad en el análisis de estabilidad se presentan a continuación, para más detalles consulte Nicosia y Tomei (1992), Fossen (1995) y Zhao et al. (2015).

**Propiedad 1.** La matriz  $H(\eta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es simétrica y definida positiva para todo  $\eta$  tal que  $|\theta| < \pi/2$ ,  $\phi, \psi \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Propiedad 2.** Usando los símbolos de Christoffel para calcular la matriz de Coriolis  $C(\eta, \dot{\eta})$ , la matriz  $\dot{H}(\eta) - 2C(\eta, \dot{\eta})$  es una matriz antisimétrica, i.e.,

$$\mathbf{x}^T \left[ \frac{1}{2} \dot{H}(\eta) - C(\eta, \dot{\eta}) \right] \mathbf{x} = 0, \quad \forall \eta, \dot{\eta}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad \square$$

**Propiedad 3.** Existe una constante  $k_c > 0$  tal que la matriz  $C(\eta, \dot{\eta})$  satisfice que

$$\|C(\eta, \dot{\eta})\| \leq k_c \|\dot{\eta}\|. \quad \square$$

**Propiedad 4.** Las matrices  $\dot{H}(\eta)$  y  $C(\dot{\eta}, \eta)$  satisfacen

$$\dot{H}(\eta) = C(\dot{\eta}, \eta) + C(\dot{\eta}, \eta)^T$$

para todo  $\eta, \dot{\eta} \in \mathbb{R}^3$ .  $\square$

### 2.1. Objetivo de control

Considerando que los valores deseados de posición y orientación son constantes y están dados por  $\mathbf{p}_d \in \mathbb{R}^3$  y  $\eta_d \in \mathbb{R}^3$ , respectivamente, las señales de error se definen como

$$\tilde{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{p}_d - \mathbf{p}(t), \quad (8)$$

$$\tilde{\eta}(t) = \eta_d - \eta(t). \quad (9)$$

Note que el quadrotor es un sistema subactuado dado que posee seis grados de libertad y únicamente cuatro entradas de control. Esta característica da como resultado que cuando se controla la

posición y el ángulo de guiñada los ángulos deseados de cabeceo  $\phi_d(t)$  y balanceo  $\theta_d(t)$  son usados como señales de control auxiliar para definir el comportamiento del vehículo en el plano horizontal. De este modo, el objetivo de control es diseñar un algoritmo que proporcione los valores adecuados a las entradas del sistema  $u_T(t)$ ,  $\phi_d(t)$ ,  $\theta_d(t)$  y  $\tau(t)$ , tales que se satisfaga el siguiente límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{p}}(t), \tilde{\eta}(t) = \mathbf{0}, \quad (10)$$

mientras se garantiza que

$$\begin{aligned} |u_T(t)| &< u_{T\max}, & |\phi_d(t)| &< \phi_{d\max}, \\ |\tau(t)| &< \tau_{\max}, & |\theta_d(t)| &< \theta_{d\max}, \end{aligned} \quad \forall t \geq 0,$$

donde  $u_{T\max}$ ,  $\tau_{\max}$ ,  $\phi_{d\max}$  y  $\theta_{d\max}$  son valores de saturación dados por constantes arbitrarias.

En este trabajo no se consideran movimientos acrobáticos para el quadrotor, además que el desplazamiento del vehículo no se realiza a altas velocidades. Por lo tanto en el diseño del controlador se supone que los valores deseados para los ángulos de orientación balanceo  $\phi_d(t)$  y cabeceo  $\theta_d(t)$  presentan cambios pequeños con respecto al tiempo y por lo tanto  $\dot{\phi}_d(t) = \dot{\theta}_d(t) = 0, \forall t \geq 0$ .

### 3. Controlador con entradas saturadas

En esta sección se presenta el control propuesto y se analiza la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Para alcanzar el objetivo de control descrito anteriormente se propone el siguiente controlador con saturación en la entrada para regulación de posición de un quadrotor

$$u_T = \frac{f_{pz}}{r_{33}(\eta)}, \quad (11)$$

$$\phi_d = \tan^{-1} \left( \frac{c_{\theta_d}}{f_{pz}} [f_{px} s_{\psi_d} - f_{py} c_{\psi_d}] \right), \quad (12)$$

$$\theta_d = \tan^{-1} \left( \frac{1}{f_{pz}} [f_{py} s_{\psi_d} + f_{px} c_{\psi_d}] \right), \quad (13)$$

$$\tau = -K_{do} \tanh(\dot{\eta}) + K_{po} \tanh(\tilde{\eta}), \quad (14)$$

donde  $\mathbf{f}_p = [f_{px} \ f_{py} \ f_{pz}]^T \in \mathbb{R}^3$  es el vector definido como

$$\mathbf{f}_p = m \mathbf{g} \mathbf{e}_z - K_{dp} \tanh(\dot{\mathbf{p}}) + K_{pp} \tanh(\tilde{\mathbf{p}}), \quad (15)$$

$r_{ij}(\eta)$  es el  $ij$ -ésimo elemento de la matriz  $R(\eta)$  y  $K_{pp}$ ,  $K_{dp}$ ,  $K_{po}$ ,  $K_{do} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  son matrices diagonales definidas positivas. Además, sea  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , entonces  $\tanh(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$  se define como

$$\tanh(\mathbf{x}) = [\tanh(x_1) \ \tanh(x_2) \ \tanh(x_3)]^T. \quad (16)$$

Note que considerando el vector  $\mathbf{f}_p$  definido en (15) se puede establecer la siguiente cota

$$|u_T| \leq k_{fz}, \quad (17)$$

donde  $k_{fz} \geq mg + k_{ppz} + k_{dpz}$ .

De este modo, el sistema en lazo cerrado obtenido con la dinámica de quadrotor en (1)–(2), y el controlador con saturación en la entrada para regulación de posición (11)–(14) se

denota por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{p}} &= -\tilde{\mathbf{p}}, \\ m \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{p}} &= -K_{dp} \tanh(\dot{\mathbf{p}}) + K_{pp} \tanh(\tilde{\mathbf{p}}) - [\mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta}_d) - \mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta})] \mathbf{e}_z u_T, \\ \frac{d}{dt} \tilde{\boldsymbol{\eta}} &= -\tilde{\boldsymbol{\eta}}, \\ H(\boldsymbol{\eta}) \frac{d}{dt} \dot{\boldsymbol{\eta}} &= -C(\dot{\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{\eta}) \dot{\boldsymbol{\eta}} - K_{do} \tanh(\dot{\boldsymbol{\eta}}) + K_{po} \tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}}), \end{aligned} \quad (18)$$

donde el vector  $\mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^3$  está definido como

$$\mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} r_{13}(\boldsymbol{\eta}) \\ r_{23}(\boldsymbol{\eta}) \\ r_{33}(\boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix} \frac{1}{r_{33}(\boldsymbol{\eta})} \in \mathbb{R}^3.$$

Esta función  $\mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta})$  es localmente Lipchitz, por lo tanto

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta}_d) - \mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta}_d - \tilde{\boldsymbol{\eta}})\| &\leq k_{r1} \|\tilde{\boldsymbol{\eta}}\| \\ &\leq k_r \|\tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}})\|, \end{aligned} \quad (19)$$

para todo  $\boldsymbol{\eta}$  y  $\boldsymbol{\eta}_d$ , tales que

$$|\phi|, |\theta|, |\phi_d|, |\theta_d| < \frac{\pi}{2}, \psi, \psi_d \in \mathbb{R}.$$

Es posible mostrar que el único punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado está dado por

$$\mathbf{x} = [\tilde{\mathbf{p}}(t)^T \ \dot{\mathbf{p}}(t)^T \ \tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)^T \ \dot{\boldsymbol{\eta}}(t)^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{12}.$$

**Proposición 1.** El punto de equilibrio  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  del sistema en lazo cerrado (18) es local y asintóticamente estable.

*Prueba:* Durante la demostración de la proposición se utiliza la notación y hechos siguientes:  $\|\mathbf{x}\|$  denota la norma euclidiana del vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Considere una matriz simétrica y definida positiva  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , entonces  $\lambda_{\max}\{A\}$  y  $\lambda_{\min}\{A\}$  representan el máximo y mínimo eigenvalor, respectivamente.

Sea el vector  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T \in \mathbb{R}^3$  y la matriz  $K = \text{diag}\{k_1 \ k_2 \ k_3\} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , entonces

$$\sum_{i=1}^3 \ln \cosh(x_i) \geq \frac{1}{2} \|\tanh(\mathbf{x})\|^2, \quad (20)$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 k_i \ln \cosh(x_i) = \dot{\mathbf{x}} K \tanh(\mathbf{x}), \quad (21)$$

$$\frac{d}{dt} \tanh(\mathbf{x}) = \text{diag}\{\text{sech}(x_i)\} \dot{\mathbf{x}} = \text{sech}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}}. \quad (22)$$

Del mismo modo, se tienen la siguientes desigualdades

$$\|\tanh(\mathbf{x})\| \geq k_n \|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in B_r \ \|\mathbf{x}\| < r, \quad (23)$$

$$\|\tanh(\mathbf{x})\| \leq \sqrt{3}. \quad (24)$$

Se propone la siguiente función definida positiva

$$V = \epsilon_1 V_p + \epsilon_2 V_o,$$

donde  $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R}$  son constantes positivas y las funciones  $V_p$  y  $V_o$  se definen como

$$V_p = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{p}} + \sum_{i=1}^3 k_{ppi} \ln \cosh(\tilde{p}_i) - \alpha m \tanh(\tilde{\mathbf{p}})^T \dot{\mathbf{p}},$$

$$V_o = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^T H(\boldsymbol{\eta}) \dot{\boldsymbol{\eta}} + \sum_{i=1}^3 k_{poi} \ln \cosh(\tilde{\eta}_i) - \beta \tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}})^T H(\boldsymbol{\eta}) \dot{\boldsymbol{\eta}}.$$

Para mostrar que  $V_p$  y  $V_o$  son funciones definidas positivas y radialmente desacotadas se emplea la desigualdad en (20), de este modo se obtiene

$$V_p \geq \frac{1}{2} \left[ \frac{\|\tanh(\tilde{\mathbf{p}})\|}{\|\dot{\mathbf{p}}\|} \right]^T W_1 \left[ \frac{\|\tanh(\tilde{\mathbf{p}})\|}{\|\dot{\mathbf{p}}\|} \right],$$

$$V_o \geq \frac{1}{2} \left[ \frac{\|\tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}})\|}{\|\dot{\boldsymbol{\eta}}\|} \right]^T W_2 \left[ \frac{\|\tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}})\|}{\|\dot{\boldsymbol{\eta}}\|} \right],$$

donde las matrices  $W_1$  y  $W_2$  están dadas por

$$W_1 = \begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{K_{pp}\} & -\alpha m \\ -\alpha m & m \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{K_{po}\} & -\alpha \lambda_{\max}\{H\} \\ -\alpha \lambda_{\max}\{H\} & \lambda_{\min}\{H\} \end{bmatrix},$$

de donde se puede observar que  $V_p$  y  $V_o$  son funciones positivas y radialmente desacotadas siempre que  $W_1$  y  $W_2$  sean matrices definidas positivas lo cual se garantiza cumpliendo las siguientes desigualdades

$$\alpha < \frac{\sqrt{m \lambda_{\min}\{K_{pp}\}}}{m}, \quad \beta < \frac{\sqrt{\lambda_{\min}\{K_{po}\} \lambda_{\min}\{H\}}}{\lambda_{\max}\{H\}}. \quad (25)$$

Con el objetivo de obtener la derivada temporal de la función  $V$  se calcula  $\dot{V}_p$  y  $\dot{V}_o$  por separado. Empleando (21) y (22) se tiene

$$\dot{V}_p = m \dot{\mathbf{p}}^T \ddot{\mathbf{p}} + \dot{\tilde{\mathbf{p}}} K_{pp} \tanh(\tilde{\mathbf{p}}) - \alpha m \dot{\tilde{\mathbf{p}}}^T \text{sech}^2(\tilde{\mathbf{p}}) \dot{\tilde{\mathbf{p}}} - \alpha m \tanh(\tilde{\mathbf{p}})^T \ddot{\mathbf{p}}.$$

Sustituyendo la dinámica de posición en lazo cerrado se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_p &= -\dot{\mathbf{p}}^T K_{dp} \tanh(\dot{\mathbf{p}}) - \dot{\mathbf{p}}^T [\mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta}_d) - \mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta})] \mathbf{e}_z u_T \\ &\quad + \alpha m \dot{\mathbf{p}}^T \text{sech}^2(\tilde{\mathbf{p}}) \dot{\tilde{\mathbf{p}}} + \alpha \tanh(\tilde{\mathbf{p}})^T K_{dp} \tanh(\dot{\mathbf{p}}) \\ &\quad - \alpha \tanh(\tilde{\mathbf{p}})^T K_{pp} \tanh(\tilde{\mathbf{p}}) + \alpha \tanh(\tilde{\mathbf{p}})^T [\mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta}_d) - \mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta})] \mathbf{e}_z u_T, \end{aligned}$$

haciendo uso de (17), (19) y (23) la derivada temporal de  $V_p$  puede ser acotada como sigue

$$\begin{aligned} \dot{V}_p &\leq -k_{n1} \lambda_{\min}\{K_{dp}\} \|\dot{\mathbf{p}}\|^2 + \alpha m \|\dot{\tilde{\mathbf{p}}}\|^2 - \alpha \lambda_{\min}\{K_{pp}\} \|\tanh(\tilde{\mathbf{p}})\|^2 \\ &\quad + \alpha k_{n1} \lambda_{\max}\{K_{dp}\} \|\tanh(\tilde{\mathbf{p}})\| \|\dot{\mathbf{p}}\| + k_{fz} k_r \|\dot{\tilde{\mathbf{p}}}\| \|\tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}})\| \\ &\quad + \alpha k_{fz} k_r \|\tanh(\tilde{\mathbf{p}})\| \|\tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}})\|, \end{aligned}$$

lo cual puede ser reescrito de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{V}_p &\leq - \left[ \frac{\|\dot{\mathbf{p}}\|}{\|\tanh(\tilde{\mathbf{p}})\|} \right]^T Q_1 \left[ \frac{\|\dot{\mathbf{p}}\|}{\|\tanh(\tilde{\mathbf{p}})\|} \right] \\ &\quad + k_{fz} k_r \|\dot{\tilde{\mathbf{p}}}\| \|\tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}})\| + \alpha k_{fz} k_r \|\tanh(\tilde{\mathbf{p}})\| \|\tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}})\|, \end{aligned}$$

donde  $Q_1$  está definida como

$$Q_1 = \begin{bmatrix} k_{n1} \lambda_{\min}\{K_{dp}\} - \alpha m & \frac{1}{2} \alpha k_{n1} \lambda_{\max}\{K_{dp}\} \\ \frac{1}{2} \alpha k_{n1} \lambda_{\max}\{K_{dp}\} & \alpha \lambda_{\min}\{K_{pp}\} \end{bmatrix},$$

y es una matriz simétrica definida positiva siempre que

$$\alpha < \frac{4 \lambda_{\min}\{K_{pp}\} k_{n1} \lambda_{\min}\{K_{dp}\}}{k_{n1}^2 \lambda_{\max}\{K_{dp}\}^2 + m \lambda_{\min}\{K_{pp}\} k_{n1}}. \quad (26)$$

De manera similar se obtiene la derivada de  $V_o$

$$\begin{aligned}\dot{V}_o &= \dot{\boldsymbol{\eta}}^T H(\boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}} + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\eta}}^T \dot{H}(\boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\boldsymbol{\eta}}^T K_{po} \tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) \\ &\quad - \beta \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \operatorname{sech}^2(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) H(\boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}} - \beta \tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}})^T H(\boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}} \\ &\quad - \beta \tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}})^T \dot{H}(\boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}}.\end{aligned}$$

Sustituyendo la dinámica de orientación en lazo cerrado y haciendo uso de las propiedades 2 y 4 se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{V}_o &= -\dot{\boldsymbol{\eta}}^T K_{do} \tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) + \beta \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \operatorname{sech}^2(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) H(\boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}} \\ &\quad - \beta \tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}})^T C(\dot{\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{\eta})^T \dot{\boldsymbol{\eta}} + \beta \tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}})^T K_{do} \tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) \\ &\quad - \beta \tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}})^T K_{po} \tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}}).\end{aligned}$$

Empleando las propiedades 1 y 3 y la desigualdad en (23) se obtiene la siguiente cota superior para  $\dot{V}_o$

$$\begin{aligned}\dot{V}_o &\leq -k_{n2}\lambda_{\min}\{K_{do}\}\|\dot{\boldsymbol{\eta}}\|^2 + \beta\lambda_{\max}\{H(\boldsymbol{\eta})\}\|\dot{\boldsymbol{\eta}}\|^2 + \beta k_c \sqrt{3}\|\dot{\boldsymbol{\eta}}\|^2 \\ &\quad + k_{n2}\beta\lambda_{\max}\{K_{do}\}\|\tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}})\|\|\dot{\boldsymbol{\eta}}\| - \beta\lambda_{\min}\{K_{po}\}\|\tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}})\|^2,\end{aligned}$$

lo cual se puede reescribir como

$$\dot{V}_o \leq -\left[\begin{array}{c} \|\dot{\boldsymbol{\eta}}\| \\ \|\tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}})\| \end{array}\right]^T Q_2 \left[\begin{array}{c} \|\dot{\boldsymbol{\eta}}\| \\ \|\tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}})\| \end{array}\right],$$

con la matriz  $Q_2$  dada por

$$Q_2 = \begin{bmatrix} k_{n2}\lambda_{\min}\{K_{do}\} - \beta\lambda_{\max}\{H(\boldsymbol{\eta})\} - \beta k_c \sqrt{3} & \frac{1}{2}\beta k_{n2}\lambda_{\max}\{K_{do}\} \\ \frac{1}{2}\beta k_{n2}\lambda_{\max}\{K_{do}\} & \beta\lambda_{\min}\{K_{po}\} \end{bmatrix},$$

la cual resulta ser una matriz definida positiva siempre que se cumpla

$$\beta < \frac{4\lambda_{\min}\{K_{pp}\}k_{n2}\lambda_{\min}\{K_{dp}\}}{k_{n2}^2\lambda_{\max}\{K_{dp}\}^2 + \lambda_{\max}\{H(\boldsymbol{\eta})\}\lambda_{\min}\{K_{pp}\}k_{n2} + \sqrt{3}\lambda_{\min}\{K_{pp}\}}. \quad (27)$$

Después de obtener las expresiones de  $V_p$  y  $V_o$  y sus respectivas cotas superiores,  $\dot{V}$  se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \epsilon_1 V_p + \epsilon_2 V_o \\ &\leq -\epsilon_1 \lambda_{\min}\{Q_1\} \left\| \left[ \begin{array}{c} \|\dot{\boldsymbol{p}}\| \\ \|\tanh(\tilde{\boldsymbol{p}})\| \end{array} \right] \right\|^2 - \epsilon_2 \lambda_{\min}\{Q_2\} \left\| \left[ \begin{array}{c} \|\dot{\boldsymbol{\eta}}\| \\ \|\tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}})\| \end{array} \right] \right\|^2 \\ &\quad + \epsilon_1 k_{fz} k_r \|\dot{\boldsymbol{p}}\| \|\tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}})\| + \epsilon_1 \alpha k_{fz} k_r \|\tanh(\tilde{\boldsymbol{p}})\| \|\tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}})\| \\ &\leq -\epsilon_1 \lambda_{\min}\{Q_1\} \left\| \left[ \begin{array}{c} \|\dot{\boldsymbol{p}}\| \\ \|\tanh(\tilde{\boldsymbol{p}})\| \end{array} \right] \right\|^2 - \epsilon_2 \lambda_{\min}\{Q_2\} \left\| \left[ \begin{array}{c} \|\dot{\boldsymbol{\eta}}\| \\ \|\tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}})\| \end{array} \right] \right\|^2 \\ &\quad + \epsilon_1 k_{fz} k_r (1 + \alpha) \left\| \left[ \begin{array}{c} \|\dot{\boldsymbol{p}}\| \\ \|\tanh(\tilde{\boldsymbol{p}})\| \end{array} \right] \right\| \left\| \left[ \begin{array}{c} \|\dot{\boldsymbol{\eta}}\| \\ \|\tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}})\| \end{array} \right] \right\|.\end{aligned}$$

Definiendo los vectores  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  como sigue

$$\Delta_1 = \left\| \left[ \begin{array}{c} \|\dot{\boldsymbol{p}}\| \\ \|\tanh(\tilde{\boldsymbol{p}})\| \end{array} \right] \right\|, \quad \Delta_2 = \left\| \left[ \begin{array}{c} \|\dot{\boldsymbol{\eta}}\| \\ \|\tanh(\tilde{\boldsymbol{\eta}})\| \end{array} \right] \right\|,$$

la cota superior de  $\dot{V}$  se puede expresar como

$$\dot{V} \leq -\left[ \begin{array}{c} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{array} \right]^T Q \left[ \begin{array}{c} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{array} \right],$$

donde

$$Q = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \lambda_{\min}\{Q_1\} & \frac{1}{2}\epsilon_1 k_{fz} k_r (1 + \alpha) \\ \frac{1}{2}\epsilon_1 k_{fz} k_r (1 + \alpha) & \epsilon_2 \lambda_{\min}\{Q_2\} \end{bmatrix},$$

y se observa como  $Q$  es una matriz definida positiva siempre que

$$\epsilon_1 < \frac{4\epsilon_2 \lambda_{\min}\{Q_1\} \lambda_{\min}\{Q_2\}}{k_r^2 (1 + \alpha)}. \quad (28)$$

Por lo tanto, la derivada temporal de la función  $V$  es definida negativa y puede ser acotada como

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min}\{Q\} \left\| \left[ \begin{array}{c} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{array} \right] \right\|^2.$$

Basados en los resultados anteriores y empleando el teorema de estabilidad de Lyapunov, Khalil (2002), se puede concluir que seleccionando  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\epsilon_1$  de manera que satisfagan con las condiciones expresadas en (25), (26), (27) y (28), el objetivo de control en (10) se cumple y se concluye la prueba. Hay que hacer notar que los valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\epsilon_1$  que cumplen con las condiciones de la prueba siempre pueden ser obtenidos sin importar la asignación de las ganancias del controlador. Por tal motivo, la selección de ganancias se puede realizar sin restricciones de diseño. ■

#### 4. Resultados en simulación

Para evaluar el desempeño del controlador propuesto se realizaron simulaciones numéricas en Matlab–Simulink considerando el modelo dinámico del quadrotor dado en (1)-(2). En la tabla 1 se presentan los parámetros cinemáticos y dinámicos del quadrotor Qball 2 manufacturado por Quanser los cuales fueron empleados para simular el comportamiento del quadrotor.

Tabla 1: Parámetros cinemáticos y dinámicos del quadrotor Quanser QBall 2.

Notación	Descripción	Valor	Unidad
$g$	Aceleración gravitacional	9.8	[m/s <sup>2</sup> ]
$m$	Masa	1.79	[kg]
$l$	Distancia del rotor al centro de masa	0.2	[m]
$I_{xx}$	Momento de inercia en $x$	0.03	[kg m <sup>2</sup> ]
$I_{yy}$	Momento de inercia en $y$	0.03	[kg m <sup>2</sup> ]
$I_{zz}$	Momento de inercia en $z$	0.04	[kg m <sup>2</sup> ]

Se presentan dos casos de estudios en los cuales el tiempo de muestreo se estableció en un milisegundo mientras que el tiempo de simulación fue de cuarenta segundos para ambos casos. Adicionalmente, al modelo del quadrotor se le agregó una función de saturación en las señales de control  $\boldsymbol{u}(t)$ , que simula el comportamiento de los rotores con valores máximo y mínimo de empuje entregado en el rango de  $0 \text{ [N]} \leq u_i(t) \leq 7.5 \text{ [N]}$ , esto con el objetivo de simular las restricciones de empuje máximo que pueden proporcionar los rotores.

Con el objetivo de mostrar las ventajas del controlador con entradas saturadas se presenta la comparación de su desempeño

con respecto un esquema que no considera la saturación de la entrada, el cual está dado por

$$u_T = \frac{f_{pz}}{r_{33}(\boldsymbol{\eta})}, \quad (29)$$

$$\phi_d = \tan^{-1} \left( \frac{c_{\theta_d}}{f_{pz}} [f_{px} s_{\psi_d} - f_{py} c_{\psi_d}] \right), \quad (30)$$

$$\theta_d = \tan^{-1} \left( \frac{1}{f_{pz}} [f_{py} s_{\psi_d} + f_{px} c_{\psi_d}] \right), \quad (31)$$

$$\boldsymbol{\tau} = -K_{do} \dot{\boldsymbol{\eta}} + K_{po} \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \quad (32)$$

donde  $\mathbf{f}_p = mg\mathbf{e}_z - K_{dp}\dot{\mathbf{p}} + K_{pp}\tilde{\mathbf{p}}$ , con  $K_{pp}, K_{dp}, K_{po}, K_{do} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  matrices diagonales definidas positivas. Como se puede observar, el controlador de comparación posee una estructura similar al control propuesto pero con la señal de entrada desacetada. Note que es posible demostrar la estabilidad del sistema en lazo cerrado con el controlador (29)-(32), sin embargo dicha prueba se omite en este documento. En lo subsecuente el controlador propuesto en (11)-(14) será denotado como control saturado mientras que el esquema de comparación en (29)-(32) se denotará como control no saturado.

Las ganancias para los dos casos de estudio y para ambos controladores fueron seleccionadas iguales y se obtuvieron mediante un proceso prueba y error, resultando en los valores presentados a continuación.

$$K_{pp} = \text{diag}\{1.44 \ 1.44 \ 2.50\},$$

$$K_{dp} = \text{diag}\{1.06 \ 1.06 \ 1.00\},$$

$$K_{po} = \text{diag}\{1.25 \ 1.25 \ 4.50\},$$

$$K_{do} = \text{diag}\{0.35 \ 0.35 \ 1.00\}.$$

Cabe hacer nota que podría seleccionarse ganancias distintas para cada esquema de control, pero se establecieron de este modo porque para ciertas condiciones iniciales del sistema los esquemas de control tienen un comportamiento similar y bajo otras condiciones permiten detectar las ventajas de la propuesta de control.

#### 4.1. Caso de estudio I

Para el primer caso de estudio se estableció la tarea de regulación con los siguientes valores deseados de pose

$$x_d = 10 \text{ [m]},$$

$$y_d = 10 \text{ [m]},$$

$$z_d = 10 \text{ [m]},$$

$$\psi_d = 0 \text{ [}^\circ\text{]},$$

mientras que las condiciones iniciales del quadrotor en la simulación se establecieron como

$$x(0) = 0 \text{ [m]},$$

$$y(0) = 0 \text{ [m]},$$

$$z(0) = 0 \text{ [m]},$$

$$\psi(0) = 0 \text{ [}^\circ\text{]}.$$

En la figura 2 se presenta la evolución temporal de la posición  $\mathbf{p}(t)$  y el ángulo de guiñada  $\psi(t)$  del quadrotor durante la

simulación al realizar la tarea de vuelo estacionario. Las líneas en color rojo representan los resultados empleando el controlador con entradas saturadas mientras que las líneas en color azul corresponden al control no saturado. Se puede observar que para la posición en  $x(t)$  y  $y(t)$  el controlador no saturado presenta una respuesta más rápida, sin embargo también se observa que el sobre impulso es mayor. En el caso de la altura  $z(t)$  se puede notar que de nueva cuenta que el control no saturado alcanza el valor deseado en un intervalo de tiempo más corto, pero para esta coordenada el sobre impulso con ambos controladores es similar. En lo que se refiere al ángulo de guiñada  $\psi(t)$ , es claro que con el controlador propuesto se mantiene cercano a la referencia mientras que con el control no saturado se presenta una diferencia considerable durante los primeros segundos de simulación.

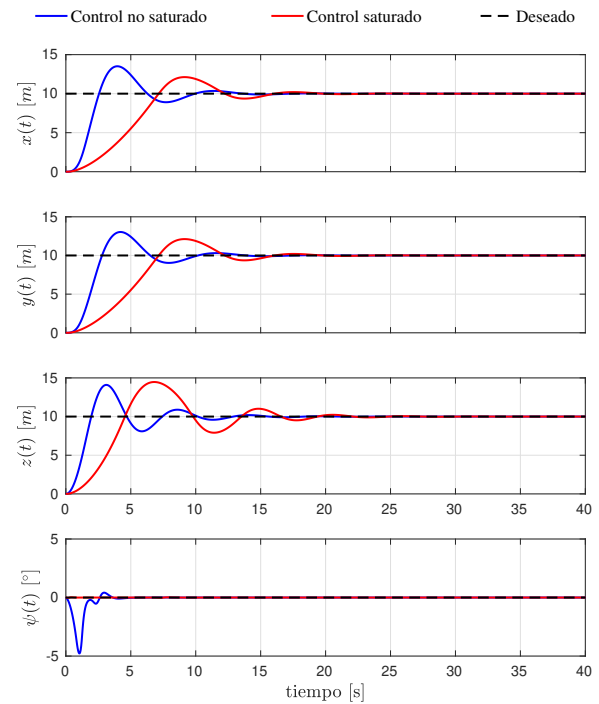


Figura 2: **Caso I:** Evolución temporal de la posición  $\mathbf{p}(t)$  y el ángulo de guiñada  $\psi(t)$  del quadrotor durante la simulación de la tarea de vuelo estacionario.

Los errores de posición  $\tilde{\mathbf{p}}(t)$  y orientación  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$  se muestran en la figura 3. Las señales del error en las gráficas concuerdan con lo observado en la evolución temporal de la pose del quadrotor. Adicionalmente se puede observar que tanto para el ángulo de balanceo  $\tilde{\phi}(t)$  como de cabeceo  $\tilde{\theta}(t)$ , durante los primeros segundos de simulación, el error con el control no saturado es considerablemente mayor en comparación con el que se presenta con el esquema de control saturado.

El empuje entregado por cada rotor  $u_i(t)$  es presentado en la figura 4. Se observa claramente como el controlador propuesto, el cual considera la saturación en la entrada, entrega señales que se encuentran lejanas al valor máximo de empuje establecido en 7.5 [N], el cual está asociado a las restricciones físicas de los actuadores. En contraste las señales de control obtenidas con el controlador no saturado alcanza dichos límites además de presentar cambios más abruptos durante los primeros segundos.

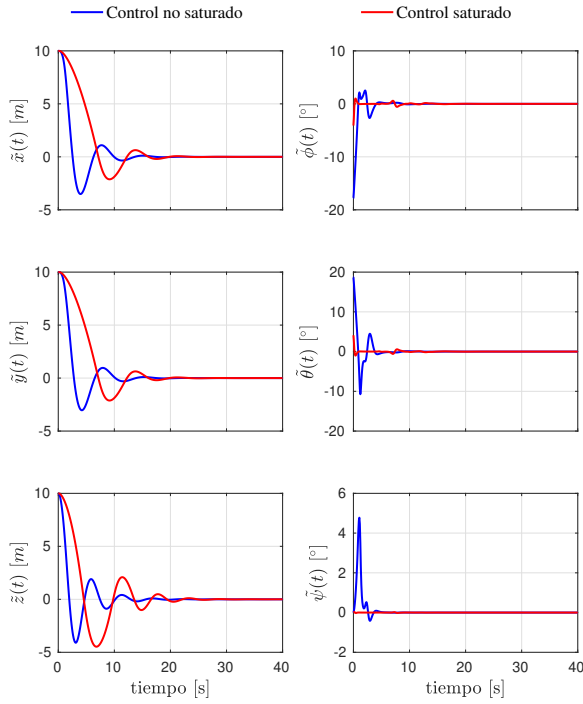


Figura 3: **Caso I:** Evolución temporal de las señales de error de pose en simulación utilizando el controlador saturado y el controlador no saturado.

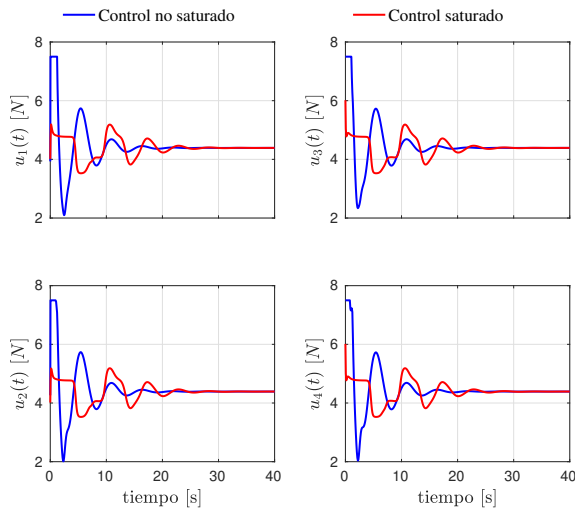


Figura 4: **Caso I:** Entradas de control entregadas por los controladores durante la simulación de la tarea de vuelo estacionario.

4.2. Caso de estudio II

Para el segundo caso de estudio se estableció la tarea de regulación con los siguientes valores deseados de pose

$$\begin{aligned} x_d &= 15 \text{ [m]}, \\ y_d &= 15 \text{ [m]}, \\ z_d &= 10 \text{ [m]}, \\ \psi_d &= 0 \text{ [}^\circ\text{]}, \end{aligned}$$

mientras que las condiciones iniciales del quadrotor se mantuvieron como en el caso anterior.

En la figura 5 se presenta la evolución temporal de la posición  $p(y)$  y el ángulo guiñada  $\psi(t)$  del quadrotor en el segundo caso de estudio analizado en este trabajo. A diferencia del primer caso de estudio, en esta simulación se puede observar que el controlador no saturado no puede completar la tarea asignada. Después de los primeros 10 segundos, la simulación se detiene dado que las señales de errores crecen considerablemente y el controlador no puede cumplir con la tarea asignada. Por el contrario, el controlador con entradas saturadas cumple con el objetivo de control a pesar del incremento en el error de posición al inicio de la simulación.

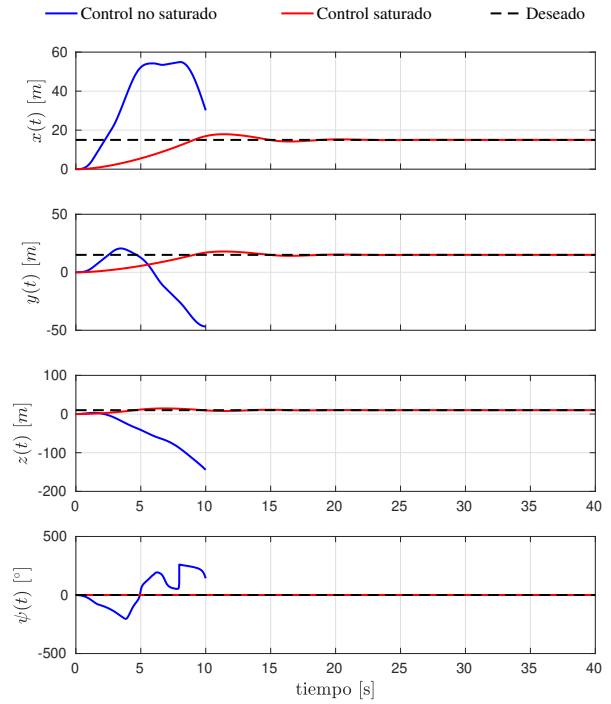


Figura 5: **Caso II:** Evolución temporal de la posición  $p(t)$  y el ángulo de guiñada  $\psi(t)$  del quadrotor durante la simulación de la tarea de vuelo estacionario.

Las señales de error de posición  $\tilde{p}(t)$  y orientación  $\tilde{\eta}(t)$  se presentan en la figura 6. De nueva cuenta se puede observar que usando el controlador propuesto las señales de error tienden a cero mientras que el quadrotor no cumple con la tarea asignada usando el controlador no saturado. En particular podemos observar que el error de altura  $\tilde{z}(t)$  supera los 100 metros y el error de orientación en balanceo  $\tilde{\phi}(t)$  alcanza magnitudes mayores de los 400 grados lo cual se presenta porque el vehículo ha dado más de una vuelta completa sobre el eje  $x$ , siendo un comportamiento indeseado.

Finalmente las entradas de control  $u(t)$  se presentan en la figura 7. Como se puede observar el controlador propuesto entrega señales que no se acercan al valor máximo de empuje que puede entregar cada rotor (7.5 [N]). Por el contrario, el control no saturado provee de señales que se encuentran cambiando entre los límites superior e inferior del empuje que entregan rotores. Este es un comportamiento indeseado que de inicio puede dañar los actuadores y que vuelve inestable al sistema. Por lo tanto, el esquema de control propuesto resulta una opción útil cuando se desea que el quadrotor se desplace a una posición

alejada sin la necesidad de implementar un planificador de trayectorias u otra estrategia de generación de rutas.

la propuesta de control y se comparó su desempeño con un esquema que no considera la saturación de la entrada. Los resultados obtenidos muestran las ventajas de considerar el efecto de la saturación en el diseño de la solución. Se observó un comportamiento similar en las dos estrategias de control cuando el error de posición es de magnitud pequeña, pero se mostraron las ventajas del control propuesto cuando dicho error aumenta considerablemente. Un aspecto que afecta considerablemente el desempeño del controlador, y que no ha sido considerado en este trabajo, son las perturbaciones ambientales. Por lo tanto como trabajo futuro se tiene considerado agregar robustez al controlador presentado, de modo que pueda hacer frente a estos factores que afectan el sistema.

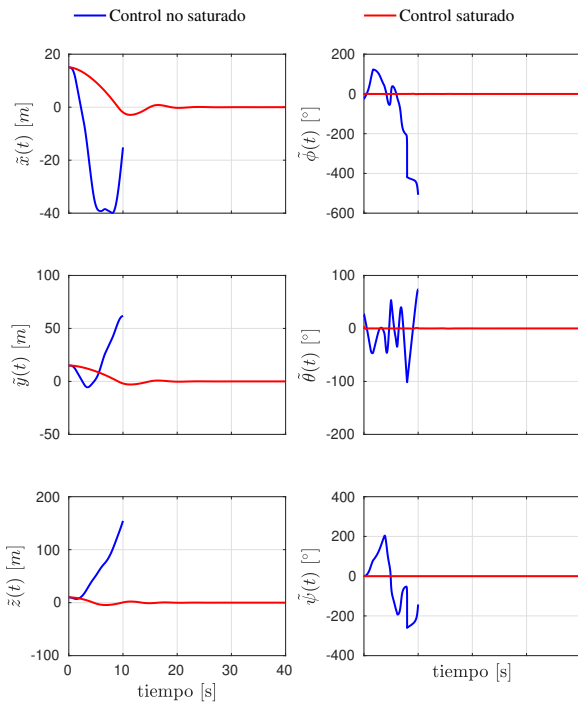


Figura 6: **Caso II:** Evolución temporal de las señales de error de pose en simulación utilizando el controlador saturado y el controlador no saturado.

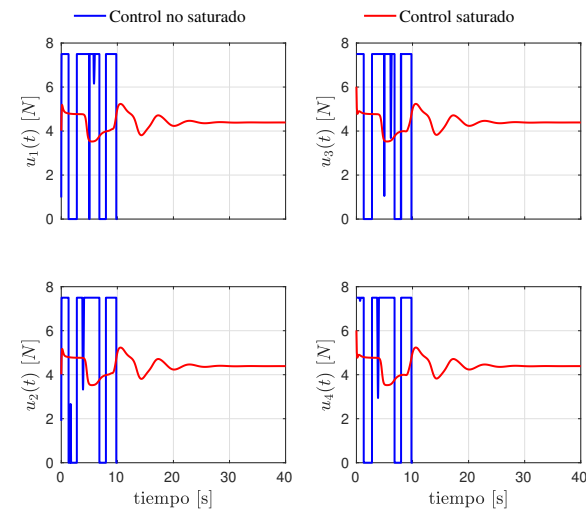


Figura 7: **Caso II:** Entradas de control entregadas por los controladores durante la simulación de la tarea de vuelo estacionario.

**5. Conclusiones**

En este trabajo se abordó el problema de control para el vuelo estacionario de quadrotores. Se desarrolló un controlador con entradas saturadas para el quadrotor. La estabilidad del sistema en lazo cerrado fue analizada y la convergencia asintótica para las señales del error de posición y orientación fue garantizada. Se realizó la validación con simulaciones numéricas de

**Referencias**

Nicosia, S. y Tomei, P. (1992). Nonlinear observer and output feedback attitude control of spacecraft. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 28(4):970–977.

Fossen, T. (1995). *Guidance and Control of Ocean Vehicles*. Wiley, New York, NY.

Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems third edition*. Patience Hall, New Jersey.

Kim, J., Kang, M.-S., y Park, S. (2009). Accurate modeling and robust hovering control for a quad-rotor VTOL aircraft. In *Selected papers from the 2nd International Symposium on UAVs, Reno, Nevada, USA June 8–10, 2009*, pages 9–26. Springer.

Carrillo, L. R. G., López, A. E. D., Lozano, R., y Pégard, C. (2012). *Quad rotorcraft control: vision-based hovering and navigation*. Springer Science & Business Media.

Cao, N. y Lynch, A. F. (2015). Inner–outer loop control for quadrotor UAVs with input and state constraints. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 24(5):1797–1804.

Zhao, B., Xian, B., Zhang, Y., y Zhang, X. (2015). Nonlinear robust sliding mode control of a quadrotor unmanned aerial vehicle based on immersion and invariance method. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 25(18):3714–3731.

Zhu, W., Du, H., Cheng, Y., y Chu, Z. (2017). Hovering control for quadrotor aircraft based on finite-time control algorithm. *Nonlinear Dynamics*, 88(4):2359–2369.

Jalili, S., Rezaie, B., y Rahmani, Z. (2018). A novel hybrid model predictive control design with application to a quadrotor helicopter. *Optimal Control Applications and Methods*, 39(4):1301–1322.

Perez-Alcocer, R. y Moreno-Valenzuela, J. (2019). Adaptive control for quadrotor trajectory tracking with accurate parametrization. *IEEE Access*, 7:53236–53247.

Jiang, H., Xia, Y., Hu, R., Ma, D., y Hao, C. (2019). A feedback linearization and saturated control structure for quadrotor UAV. In *2019 Chinese Control Conference (CCC)*, pages 8277–8282. IEEE.

Zhou, L., Zhang, J., She, H., y Jin, H. (2019). Quadrotor UAV flight control via a novel saturation integral backstepping controller. *Automatika*, 60(2):193–206.

Lv, Z.-Y., Li, S., Wu, Y., y Wang, Q.-G. (2021). Adaptive control for a quadrotor transporting a cable-suspended payload with unknown mass in the presence of rotor downwash. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 70(9):8505–8518.

Cheng, X., Zhang, Y., Liu, H., Wollherr, D., y Buss, M. (2021). Adaptive neural backstepping control for flexible-joint robot manipulator with bounded torque inputs. *Neurocomputing*, 458:70–86.

Noordin, A., Mohd Basri, M. A., Mohamed, Z., y Mat Lazim, I. (2021). Adaptive pid controller using sliding mode control approaches for quadrotor uav attitude and position stabilization. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 46(2):963–981.

Perez-Alcocer, R., Montoya-Villegas, L. G., Lopez-Martinez, A. E., y Moreno-Valenzuela, J. (2021). Saturated visual-servoing control strategy for non-holonomic mobile robots with experimental evaluations. *IEEE Access*, 9:130680–130689.

Zheng, X., Yang, X., Zhao, H., y Chen, Y. (2022). Saturated adaptive law based backstepping and its applications to a quad-rotor hover. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*.