https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/icbi/issue/archive
Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI

Pädi

ISSN: 2007-6363

Publicación Semestral Pädi Vol. 9 No. Especial (2021) 10-17

Resolución de problemas en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas
Problem solving in teaching and learning mathematics

F. Barrera-Mora[a], A. Reyes-Rodríguez[b], M. Campos-Nava[c], C. Rodríguez-Álvarez[d*]

[a,b,c] *Área Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Pachuca, Hidalgo, México.*
[d] *Área Académica de Ingenierías y Arquitectura, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Pachuca, Hidalgo, México.*

Resumen

En este artículo se caracteriza una perspectiva de la resolución de problemas como aproximación didáctica. Particularmente se identifican aquellos aspectos de una comunidad de aprendizaje que favorecen el desarrollo de un aprendizaje con entendimiento, a partir de las contribuciones de diversos matemáticos y educadores matemáticos, entre los que se encuentran George Polya, Paul Halmos, Jaques Hadamard, Alan Schoenfeld, James Hiebert y Richard Lesh.

Palabras Clave:
Resolución de Problemas, Aprendizaje por descubrimiento, Pensamiento matemático, Creatividad.

Abstract

In this paper we characterize a perspective of problem solving as a didactic approach. In particular, the characteristics of a learning community that favor the development of learning with understanding are identified, based on the contributions of some mathematicians and mathematics educators, such as George Polya, Paul Halmos, Jaques Hadamard, Alan Schoenfeld, James Hiebert and Richard Lesh.

Keywords:
Problem solving, Discovery learning, Mathematical thinking, Creativity.

1. Introducción

Hablar de resolución de problemas implica distinguir entre al menos dos significados del término. Por un lado, la resolución de problemas es un marco que ha sustentado diversas agendas de investigación en educación matemática y, por otro, es una perspectiva didáctica utilizada para orientar y estructurar procesos de diseño curricular, de instrucción en el aula, y de elaboración de materiales educativos (Santos-Trigo, 2014).

En el aspecto didáctico, el término resolución de problemas tiene una multiplicidad de interpretaciones (Santos-Trigo, 2014), que abarcan prácticas instruccionales tales como el Método Moore (Halmos, Moise y Piranian, 1975), la Enseñanza con Variación (Cai y Nie, 2007) o la Perspectiva de Modelos y Modelación (Lesh y Doerr, 2003; Lesh y Zawojewski, 2007). Debido a la amplitud de significados en torno al término Resolución de Problemas, el objetivo de este trabajo es identificar algunos principios que caracterizan a esta aproximación como un medio para orientar los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Particularmente, pretendemos reconocer elementos importantes que aparecen en la construcción del conocimiento matemático dentro de una comunidad donde se valora y fomenta el desarrollo de actitudes investigativas o inquisitivas (Santos-Trigo, 2008).

2. Antecedentes

Las bases de la perspectiva didáctica que se busca caracterizar en este trabajo: Resolución de Problemas, tiene como punto de partida diversas ideas que han desarrollado matemáticos interesados en el aprendizaje y la enseñanza de la disciplina, entre los que destacan George Polya, Paul Halmos y Jaques Hadamard; así como de educadores matemáticos tales como Alan Schoenfeld, James Hiebert y Richard Lesh. Al realizar un análisis de las propuestas de Polya, Halmos y Hadamard se identifican principios que son comunes al desarrollo de la disciplina y su aprendizaje, significando esto que en el aprendizaje matemático esos principios deberían ser considerados y puestos en práctica.

A continuación, exponemos brevemente algunas de las contribuciones principales de cada uno de los autores mencionados, que a nuestro juicio, pueden aportar elementos importantes para estructurar una aproximación didáctica del aprendizaje matemático vía la Resolución de Problemas.

*Autor para la correspondencia: profe_7479@uaeh.edu.mx
Correo electrónico: fbarrera10147@gmail.com (Fernando Barrera-Mora), aaronr@uaeh.edu.mx (Aarón Reyes-Rodríguez), mcampos@uaeh.edu.mx (Marcos Campos-Nava), profe_7479@uaeh.edu.mx (Cutberto Rodríguez-Álvarez)

Fecha de recepción: 17/03/2021 Fecha de aceptación: 31/05/2021 Fecha de publicación: 05/08/2021
https://doi.org/10.29057/icbi.v9iEspecial.7051

2.1. George Polya

Uno de los antecedentes principales de la resolución de problemas se encuentra en el análisis introspectivo, sobre su práctica y experiencia, que llevó a cabo el matemático húngaro, nacionalizado estadounidense, George Polya y que plasmó en el libro titulado How to solve it, publicado por primera vez en 1945 (Polya, 1973). En el libro mencionado, el autor retoma parte de sus experiencias como matemático profesional y como profesor, con la finalidad de bosquejar algunas recomendaciones para docentes y estudiantes de matemáticas. En el planteamiento de Polya, se aprende matemáticas al resolver problemas, y durante este proceso se transita por cuatro fases o etapas: (i) comprender el enunciado de la tarea, (ii) concebir un plan, (iii) ejecutar el plan y (iv) examinar en forma retrospectiva la solución obtenida. Otro de sus aportes relevantes es que recupera el término heurística y su importancia como estrategia general durante la resolución de problemas. Es decir, es una recomendación (rule of thumb) que puede ayudar a avanzar en la solución, pero que no asegura el éxito. Algunas de las principales heurísticas de resolución de problemas son: considerar el problema resuelto, buscar un problema más simple, elaborar un dibujo, analizar casos particulares, organizar y representar la información, entre otras.

Desde la perspectiva de Polya, resolver problemas puede ser un trabajo placentero, ya que el proceso de resolución ofrece retos semejantes a los de actividades recreativas tales como completar un crucigrama, participar en un partido de tenis o jugar una partida de ajedrez.

La resolución de problemas es el medio ideal para aprender matemáticas, ya que los estudiantes, en su fase de formación, pueden realizar experimentos con objetos matemáticos, formular y justificar conjeturas, así como plantear nuevas situaciones problemáticas o interrogantes, actividades que integran los ejes experimental e inductivo de la disciplina.

Con respecto de las ideas previas, se ha considerado por mucho tiempo a las matemáticas como una ciencia formal, diferente de otras ciencias consideradas clásicamente como experimentales o factuales como la física; sin embargo, argumentamos que la matemática también es una ciencia experimental, sólo que los objetos de experimentación son sus representaciones y no los objetos de estudio en sí, como ocurre en las ciencias naturales o sociales. Dicho de otra forma, la resolución de problemas favorece el descubrimiento o redescubrimiento de patrones, resultados, conjeturas y teoremas, que en el fondo es identificar, formular y describir patrones en lenguaje matemático.

Por otra parte, al descubrir un resultado, este proceso deja una ruta sólida de conexiones neuronales en nuestro cerebro, la cual puede utilizarse cuando sea necesario (Polya, 1963). Generalmente, es más fácil reconstruir una de estas rutas, a partir de sus componentes, que recordar el complejo conjunto de relaciones involucradas en un resultado o teorema. Así, consideramos que la mejor forma de aprender algo, en matemáticas, es descubrirlo por uno mismo. Esto puede ser un trabajo arduo, que requiere de tiempos que usualmente exceden los periodos asignados desde la aproximación curricular existente, dado que en los cursos "tradicionales", los contenidos deben presentarse a los alumnos con restricciones de tiempo, que no permiten implementar diversos elementos del pensamiento matemático (Santos-Trigo, 2009) tales como: identificar y representar información, resolver casos particulares, identificar patrones, formular y justificar conjeturas, así como comunicar resultados.

Por lo mencionado anteriormente, el proceso de instrucción debiera mostrar analogías con la actividad que llevan a cabo los matemáticos profesionales al generar nuevo conocimiento disciplinar. Además, la principal función del profesor, desde el punto de vista de Polya (1963,1973), es orientar y apoyar la actividad del estudiante a través de preguntas que lo ayuden a avanzar en el proceso de resolución de problemas, lo cual es esencial para fomentar un proceso fundamental en cualquier aproximación didáctica basada en la resolución de problemas: el método inquisitivo (Santos-Trigo, 2009).

En un artículo sobre el aprendizaje y la enseñanza, Polya (1963) argumenta que es función de los docentes enseñar a pensar matemáticamente a los estudiantes, lo cual significa no solo compartir información, sino promover el desarrollo de habilidades para utilizar dicha información en la resolución de problemas. En este mismo artículo, se identifican tres principios de aprendizaje: (1) principio de aprendizaje activo, (2) principio de la mejor motivación y (3) principio de las fases consecutivas.

En el Principio de aprendizaje activo, se establece que leer libros, escuchar conferencias o mirar videos no es suficiente para comprender algo en matemáticas. Una comprensión robusta, al menos en matemáticas, requiere llevar a cabo acciones mentales con la información que recibimos (reflexionar, buscar ejemplos o contraejemplos, generalizar, abstraer, etcétera), por lo que este principio está relacionado con la idea de que la mejor forma de aprender algo consiste en descubrir un hecho o resultado por uno mismo.

El principio de la mejor motivación indica que el interés por el contenido o material que se va a aprender, debiera ser el principal motivo para el aprendizaje y, que el placer derivado de la intensa actividad mental al resolver problemas o al identificar relaciones entre contenidos o ideas, debiera ser la mejor recompensa. Sin embargo, además de estos mejores motivos, también hay otros para aprender y entender algo, como obtener una buena calificación en un curso o conseguir una recompensa derivada de esa buena calificación.

Respecto al principio de las fases consecutivas, se argumenta que el aprendizaje comienza con la acción y la percepción, pasa de allí a las palabras y los conceptos, y debiera terminar en hábitos mentales deseables. La acción y la percepción involucran la manipulación y experimentación con objetos concretos tales como guijarros, manzanas, fichas, dados o regletas de Cuisenaire; regla y compás; o instrumentos en un laboratorio, así como con objetos abstractos tales como figuras, símbolos, signos, entre otros. Siguen a la acción y la percepción, las fases de exploración, formalización y asimilación. La exploración es la fase que se encuentra más cercana a la acción y la percepción. Ésta se lleva a cabo en un nivel intuitivo y heurístico. La formalización por su parte asciende a un nivel más conceptual, ya que involucra la introducción de terminología, definiciones y demostraciones. En la asimilación debe haber un intento para percibir "los fundamentos internos" de las cosas; es decir, el material o contenido revisado debe integrarse o enmarcarse en una estructura conceptual.

Los principios de aprendizaje anteriores tienen su contraparte en tres principios de enseñanza. El principio de aprendizaje activo en la enseñanza señala la importancia de lo que expresa el profesor en clase, pero destaca lo fundamental que es el pensamiento del estudiante. Una sugerencia útil para el docente en esta fase consiste en dejar que el estudiante participe en la formulación de los problemas que resolverá, ya que formular un problema puede ser la mejor parte de un descubrimiento, debido a que a menudo la solución necesita menos perspicacia y originalidad que la formulación. El principio de la mejor motivación en la enseñanza sugiere que el papel del profesor sea análogo al de un vendedor, ya que debe convencer a los estudiantes de que las matemáticas son interesantes, que el tema que se aborda es valioso o que merece la pena el esfuerzo dedicado a resolver cierto problema. Algunas sugerencias que pueden ser útiles para apoyar esta fase, son relacionar los problemas con la experiencia diaria de los estudiantes, introducir los problemas mediante alguna broma o paradoja; o dejar que los estudiantes anticipen o adivinen la solución, ya que la curiosidad por saber si están en lo correcto o no, los alentará a resolver el problema. Para describir el principio de las fases consecutivas en el aprendizaje, Polya (1963) interpreta el siguiente enunciado de Kant (1996): "Thus all human cognition begins with intuitions, proceeds from there to concepts, and ends with ideas." (p.721) de la siguiente manera: "Para un aprendizaje eficiente, una fase exploratoria debe preceder a la fase de verbalización y formación de conceptos y, eventualmente, el material aprendido debe fusionarse y contribuir a la actitud mental integral del alumno." (p.608) Si revisamos los libros de texto usuales de bachillerato, es patente que se enfatiza en problemas algorítmicos rutinarios, los cuales son importantes, e incluso necesarios; sin embargo, las cuatro fases descritas no tienen lugar. Esto pudiese explicar el tipo de aprendizaje que construyen los estudiantes en este nivel educativo.

2.2. Paul Halmos

Otro matemático, húngaro nacionalizado estadounidense que con sus ideas ha contribuido a la formación de nuestra perspectiva de resolución de problemas es Paul Halmos, quien considera la resolución de problemas como la principal razón de la existencia de los matemáticos. Para este autor, las matemáticas consisten realmente en problemas y soluciones a esos problemas (Halmos, 1980) y, por ello, argumenta que los profesores deben apoyar a los estudiantes para que sean mejores formuladores y resolutores de problemas. También que la manera más adecuada de aprender matemáticas es hacer matemáticas (resolver problemas) y que el peor método para enseñar es la lección magistral (Halmos et al., 1975). Además, en uno de sus artículos, comentan que el célebre matemático alemán David Hilbert expresó que para entender una teoría matemática el camino más adecuado consiste en encontrar, y entonces estudiar, un ejemplo concreto de esa teoría. Es decir, se puede aprender una teoría a partir de analizar y estudiar un ejemplo que ilustre los elementos esenciales de ésta (Halmos et al., 1975).

Los autores argumentan que la parte más difícil al responder una pregunta es formularla y, por tanto, una de las principales tareas de los profesores debería ser enseñar a los estudiantes a formular preguntas (Halmos et al.,1975). Para promover una actitud investigativa o inquisitiva, cada maestro debería hacer investigación acorde al nivel escolar que enseña. Lo anterior no significa que todos los profesores sean matemáticos profesionales, sino que debieran ser capaces de establecer conexiones entre los problemas que se abordan en las asignaturas que enseñan y problemas de otras áreas de las matemáticas o de otras asignaturas del nivel escolar en el que se desempeñan, y deseablemente, con los problemas básicos que se abordan en los niveles previos y subsecuentes.

Para Halmos ser educado significa recordar algo, poder usarlo y comprenderlo (Halmos, 1994). Al igual que Polya, considera que la mejor forma de que un estudiante comprenda algo es que re-descubra ese algo por sí mismo y, que la mejor forma en que podemos apoyar a nuestros estudiantes a entender matemáticas, es ofreciendo retos con problemas, y así permitirles construir tanto soluciones como herramientas conceptuales para solucionar los problemas que se les proponen o que ellos mismo formulan. Así, este autor promueve una enseñanza basada en preguntar a los estudiantes (mayéutica socrática) e inspirarlos para que formulen preguntas por sí mismos (favorecer una actitud investigativa o inquisitiva). La forma más efectiva de enseñar matemáticas es desafiar a los estudiantes para que resuelvan problemas que apenas están a su alcance. De esta forma, la enseñanza basada en la resolución de problemas es la mejor forma de enseñanza, ya que favorece la comprensión, promueve la investigación y el desarrollo de una actitud inquisitiva, "enseña en la forma en que la naturaleza ha enseñado al hombre desde antes de la invención de los maestros" (Halmos, 1994, p. 852). En un contexto de resolución de problemas no se comienza probando el Teorema 1, se comienza con preguntas: ¿es este resultado cierto? ¿Qué nos sugieren estos ejemplos acerca de algún resultado? Por otra parte, el profesor no dice al estudiante: "mira, así es como se hace", sino que más bien pregunta: "¿cómo crees que se puede hacer?". Adicionalmente, se parte de centrar, inicialmente, la atención en lo definido, lo concreto, lo específico y después se transita hacia diferentes niveles de abstracción. Por ejemplo, cuando un estudiante comprende realmente por qué 3 x 5 es lo mismo que 5 x 3, entonces puede convencerse, casi "naturalmente" de que "esto mismo ocurre" para todos los demás números.

2.3. Jacques Hadamard

Con base en lo discutido en las secciones previas, una aproximación de resolución de problemas privilegia el aprendizaje por descubrimiento (Discovery learning). Cuando un estudiante resuelve problemas, de los cuales no conoce de antemano un método de solución, pone en práctica y desarrolla su creatividad al descubrir resultados e inventar herramientas conceptuales para obtener la solución, y justamente en este punto es que retomamos algunas ideas del matemático francés Jacques Hadamard publicadas en su libro The psychology of the invention in the mathematical field (1945). Entre muchas otras cosas importantes relacionadas con la sicología de la invención en matemáticas, Hadamard argumenta que: "Entre el trabajo del estudiante quien trata de resolver un problema en geometría o álgebra y el trabajo de invención, uno puede decir que solo hay una diferencia de grado, una diferencia de nivel, ambos trabajos son de naturaleza similar" (Hadamard, 1945, p. 104). Continuando con este análisis formula una pregunta fundamental ¿Por qué muchos estudiantes son incapaces de resolver problemas, incapaces de entender matemáticas? Hadamard trata de encontrar una respuesta a esa pregunta citando un trabajo de Henri Poincaré y menciona que el asunto central radica en dar significado a lo que significa "entender", término del que nos ocuparemos más adelante, en la sección correspondiente a James Hiebert.

Para Hadamard, el trabajo creativo en matemáticas se lleva a cabo en ciclos sucesivos, cada uno de los cuales está integrado por cuatro fases o etapas: (1) preparación o iniciación, (2) incubación, (3) iluminación, y (4) verificación. A continuación, se describe cada una de estas etapas.

En la fase de preparación se lleva a cabo un trabajo consciente e intenso al tratar de entender el problema, al realizar experimentos con los objetos matemáticos con la finalidad de formular conjeturas, proponer diversas representaciones semióticas para los conceptos o realizar cálculos, con el objetivo de identificar relaciones. Involucra proponer rutas de solución, implementarlas y determinar si son productivas o no. De acuerdo con Hadamard (1945) “El acto de estudiar una pregunta consiste en la movilización de ideas, no cualesquiera, sino de aquellas de las que podemos esperar razonablemente la solución deseada” (pp. 46-47). En ocasiones puede parecer que toda la actividad desarrollada en esta etapa no arroja los resultados deseados, pero no hay que desanimarse, sino que una vez que estamos fatigados o no conseguimos avanzar más, es importante relajarnos y olvidarnos del trabajo consciente por un momento, con la finalidad de que la actividad mental inconsciente lleve a cabo su parte del trabajo en el proceso creativo. En algunas ocasiones, algunas rutas propuestas no serán apropiadas o podremos cometer errores que se pueden superar en ciclos posteriores.

En la fase de incubación, ningún trabajo de la mente se percibe conscientemente. Para Hadamard (1945) “cualquier trabajo mental y especialmente el trabajo del descubrimiento implica la cooperación del inconsciente, ya sea este el superficial o (con bastante frecuencia) el más o menos remoto” (p. 112). Al inconsciente pertenece no solamente la tarea complicada de construir el conjunto de diversas combinaciones de ideas, sino también la más esencial y delicada tarea de seleccionar aquellas que es más probable que sean de utilidad (Hadamard, 1945).

En la fase de iluminación, inesperadamente aparece una idea novedosa que puede ayudar a avanzar o ser crucial en el proceso de solución. Una posible causa de la iluminación es la ausencia de interferencias durante la incubación, las cuales bloquean el progreso durante la etapa de preparación. Helmholtz (citado en Hadamard, 1945), médico y físico alemán conocido por sus teorías sobre la conservación de la energía, dice que las “ideas felices” nunca se le ocurren cuando su mente está fatigada o cuando está sentado frente a su mesa de trabajo, aunque a otros científicos les ocurre de forma diferente. Esta es una fase la cual no sabemos cuándo ocurrirá, puede suceder en el momento menos esperado.

Algunas anécdotas referidas a esta etapa del proceso creativo se han descrito por matemáticos como Poincaré, quien relata que el viaje derivado de una excursión geológica lo hizo olvidarse del trabajo matemático que estaba realizando en ese momento. Entonces, al colocar su pie en el escalón para subir al autobús que lo llevaría de regreso a casa, se le ocurrió una idea que fue clave para resolver el problema en el que trabajaba (Hadamard, 1945, p. 13). La etapa de iluminación también ha sido descrita por químicos como Kekulé, quien refiere que durante un sueño visualizó una serpiente que se mordía a sí misma la cola y, esta imagen, le sugirió la idea de asignar al benceno una estructura cíclica, la cual explicaba la mayoría de las propiedades de este compuesto aromático (August Kekulé, 2021). Podemos mencionar también el caso de Arquímedes, quien, según la leyenda, buscaba un método para determinar si la corona del rey Hierón II de Siracusa era de oro puro, pero sin dañar la corona. Arquímedes se estaba bañando y notó que el nivel del agua subía cuando él entraba en la tina; entonces, vino a su mente la solución del problema en el que había estado trabajando. Acto seguido, Arquímedes salió desnudo corriendo por las calles de Siracusa gritando “Eureka”, “Eureka”, debido al descubrimiento que había realizado.

En la fase de verificación los resultados intuidos durante la iluminación se comprueban, dando lugar a una nueva fase de trabajo consciente.

Es de gran importancia señalar que en un esquema curricular tradicional, en donde se deben “programar” las actividades en el aula, es imposible llevar a cabo las etapas identificadas y discutidas por Hadamard. Esto pudiese explicar, en alguna medida, los pobres resultados que tienen los estudiantes en las pruebas de aprovechamiento.

2.4. Alan Schoenfeld

Alan Schoenfeld, es un matemático y educador matemático estadounidense que se interesó por las ideas de Polya, ya que durante su trabajo como matemático profesional se dio cuenta de que muchas de las estrategias que aparecen en el libro How to solve it (1973), las había descubierto por sí mismo, pero que nadie se las mencionó durante su periodo como estudiante. Entonces, al preguntar a sus colegas, quienes entrenaban estudiantes para un concurso nacional de matemáticas en los Estados Unidos, si ellos utilizaban las ideas de Polya, le contestaron que estas ideas eran inútiles. Estas experiencias le produjeron a Schoenfeld sentimientos encontrados, ya que por un lado, los estudiantes de sus colegas obtenían buenos resultados en el concurso y, entonces, la opinión de ellos acerca de las estrategias de Polya podría tener algo de razón; pero por otro lado, también consideraba que las ideas de Polya eran importantes.

Estas vivencias alentaron a Schoenfeld a desarrollar un programa de investigación en educación matemática cuyos resultados se reportan en el libro titulado Mathematical problem solving (Schoenfeld, 1985). Entre los resultados más relevantes se encuentra que el proceso de resolución de problemas se puede describir, analizar y explicar con base en cuatro variables: (1) los recursos o conocimientos previos, (2) las heurísticas, (3) el control y (4) los sistemas de creencias.

Otro aporte relevante de este autor es que identificó uno de los aspectos esenciales del proceso de instrucción: que los estudiantes aprendan a pensar matemáticamente (Schoenfeld, 1992). Pensar matemáticamente involucra mucho más que tener disponibles grandes volúmenes de información factual y métodos algorítmicos. Más bien, incluye ser flexible e ingenioso con los principios de la disciplina, usar el conocimiento de forma eficiente y entender y aceptar las “reglas tácitas del juego”. Para ser ingenioso en matemáticas se requiere estar familiarizado con un amplio repertorio de técnicas o estrategias generales de resolución de problemas, conocidas como heurísticas; mientras que para ser eficiente, necesita orientación sobre cómo manejar los recursos que se tienen a disposición.

Los recursos están integrados por todo aquello que el estudiante conoce de matemáticas, sea correcto o no. Una de las primeras tareas de un docente en el salón de clase consiste en conocer cuáles son los recursos de los estudiantes, ya que así tendrá conocimiento de cuáles son las herramientas y técnicas que un resolutor puede usar en una situación particular, en caso de ser necesario. Schoenfeld argumenta que un componente de la educación matemática debe enfocarse a desarrollar el pensamiento matemático. En este sentido argumenta que la metacognición, las creencias y la práctica matemática son aspectos críticos del pensar matemáticamente, más aún, "La persona que piensa matemáticamente tiene una forma particular de ver el mundo, de representarlo, de analizarlo. Solo dentro del contexto general, las piezas (la base de conocimientos, las estrategias, el control, las creencias y las prácticas) encajan de manera coherente." (Schoenfeld, 1992, p. 363).

2.5. James Hiebert

Tal como se mencionó en secciones previas, el entendimiento de las ideas en matemáticas, juega un papel crucial en su aprendizaje, en este apartado se discutirán algunas ideas que permiten esclarecer la noción de entendimiento en matemáticas que sostenemos en este trabajo. "Para preparar ciudadanos letrados matemáticamente para el siglo 21, los salones de clase deben ser reestructurados de forma que se aprenda matemáticas con entendimiento" (Carpenter y Lehrer, 1999, p. 19).

Desde una perspectiva de resolución de problemas, los contenidos matemáticos son un elemento auxiliar en el eje del aprendizaje. La instrucción basada en resolución de problemas tiene como uno de sus principios que los estudiantes desarrollen y pongan en práctica elementos fundamentales del pensamiento matemático entre los que se encuentran experimentar, identificar relaciones y patrones, formular conjeturas, justificar resultados, comunicar ideas y plantear problemas. Para que los estudiantes pongan en acción estos elementos se requiere la integración de una comunidad de aprendizaje, en donde un elemento de mucha importancia es el salón de clase. En este sentido Hiebert et al. (1997) argumentan que "...los estudiantes de hoy necesitan enfoques flexibles para definir y resolver problemas. Necesitan métodos de resolución de problemas que puedan ser adaptados a situaciones nuevas, y necesitan saber cómo desarrollar nuevos métodos para clases nuevas de problemas. En ningún lado esos enfoques son más críticos que en el salón de clase." (p. 1)

Otro elemento importante en el proceso de resolver problemas matemáticos es el uso de la tecnología, al respecto Hiebert et al. (1997) señalan que: "La tecnología no solamente está haciendo ciertas habilidades obsoletas --tales como un nivel alto de velocidad y eficacia en los cálculos con lápiz y papel-- también está mostrando la importancia de aprender nuevas y flexibles formas de pensar matemáticamente. Todo esto significa que los estudiantes deben aprender matemáticas con entendimiento." (p.1) En torno al aprendizaje con entendimiento, Hiebert et al. (1997) argumentan que:

> El entendimiento es crucial porque las cosas que se aprenden con entendimiento pueden ser usadas de forma flexible, adaptarlas a nuevas situaciones, y usarlas para aprender nuevas cosas. Las cosas aprendidas con entendimiento son las más útiles en un mundo cambiante e impredecible. Puede haber debate acerca de qué contenidos matemáticos son más importantes para enseñar. Pero hay un consenso creciente de que lo que los estudiantes aprendan debe ser con entendimiento. (p. 1)

¿Qué es aprendizaje matemático con entendimiento? Uno de los objetivos centrales en la instrucción es que los estudiantes entiendan los conceptos o resultados que se aprenden. El entendimiento es fundamental, porque lo que se aprende con entendimiento puede usarse y adaptarse a situaciones nuevas, (Hiebert et al. 1997, p. 1). Cuando solamente se aprenden reglas para operar con símbolos, no se ponen en práctica los elementos del pensamiento matemático, consecuentemente ese aprendizaje no promueve el establecer conexiones entre diversos conceptos, métodos y resultados matemáticos. El proceso de entender algo es gradual, no ocurre que se entienda algo completamente o no se entienda nada. Por ejemplo, si un estudiante es cuestionado sobre el Teorema de Pitágoras y menciona que se relaciona con la ecuación a2+b2=c2, esto significa que tiene un entendimiento en cuanto a la forma de establecer la conclusión del teorema simbólicamente. En cambio, si algún otro estudiante menciona y justifica que el Teorema de Pitágoras es equivalente a la ley de cosenos, su nivel de entendimiento tiene otra característica, es decir, puede establecer una conexión con otro resultado de la geometría, mostrando con esto que su nivel de entendimiento es más robusto. Yendo un poco más lejos, si además, al considerar la ecuación a2+b2=c2, el hipotético estudiante argumenta que conoce un método para obtener las soluciones enteras, llamadas ternas pitagóricas, entonces el nivel de entendimiento del Teorema de Pitágoras tiene conexiones con propiedades aritméticas de los números enteros, lo que le permite relacionar elementos geométricos y aritméticos de un triángulo. En este caso el nivel de entendimiento del Teorema de Pitágoras es ciertamente más profundo.

Para lograr construir aprendizaje con entendimiento, Hiebert et al. (1997) argumentan que esto se puede lograr si a los estudiantes se les plantean tareas que les permitan reflexionar y comunicar ideas matemáticas al resolver problemas. Esto debe darse en un ambiente que reúna características apropiadas. Partiendo de esto, proponen un marco en donde se establecen las características que debe cumplir un salón de clase para promover aprendizaje con entendimiento. De acuerdo con estos autores las características de un salón de clase que promueve aprendizaje con entendimiento son: (a) la naturaleza de las tareas de aprendizaje, (b) el rol que juega el profesor, (c) la cultura social del salón de clase, (d) la clase de herramientas matemáticas que están disponibles y (e) lo accesible que le son las matemáticas a cada estudiante. En este trabajo centramos la atención en (a), (b) y (d), por considerar que se entrelazan naturalmente con la aproximación de aprendizaje vía resolución de problemas.

Las características de las tareas deben promover que los estudiantes se involucren en una situación problemática, entendiéndose por esto que ellos encuentren retos interesantes y se involucren en el proceso de resolverlos. Un componente importante, en este caso, es la reflexión y comunicación de ideas. En esta parte, el profesor debe jugar el rol de seleccionar o diseñar y proponer tareas que involucren problemas matemáticos genuinos y que atraigan la atención de los estudiantes. Un aspecto importante que debe jugar el profesor, es cuidar que no sea él la fuente fundamental de información, evitando resolver la tarea o, por el contrario, dejando todo el trabajo a cargo de los estudiantes.

El término herramienta matemática es muy amplio, es decir, no se restringe a objetos físicos, electrónicos o de otra naturaleza que los estudiantes puedan manipular. El término es más amplio e incluye, uso de lenguaje, signos o cualquier objeto o idea que los estudiantes puedan utilizar en el proceso de resolver un problema.

2.6. Richard Lesh

Richard Lesh es un educador matemático estadounidense, quien desarrolló una aproximación didáctica denominada

Models and modeling. En esta aproximación, las tareas se denominan actividades evocadoras de modelos (model-eliciting activities o MEAs por sus siglas en inglés), cuya finalidad es promover que los estudiantes desarrollen modelos matemáticos, entendidos como herramientas conceptuales que se pueden compartir, manipular, modificar y reutilizar, y que son útiles para construir, describir, explicar manipular, predecir o controlar sistemas matemáticamente significativos (fenómenos del “mundo real”).

En otras palabras, en esta perspectiva, un modelo se entiende como un sistema conceptual, integrado por elementos, relaciones, operaciones y reglas que gobiernan las interacciones). Estos sistemas se expresan mediante diversos sistemas de representación externa (palabras, dibujos, gráficos, ecuaciones, tablas, entre otros) y que se usan para construir describir o explicar el comportamiento de otros sistemas.

Al abordar una MEA, los estudiantes llevan a cabo procesos de matematización que involucran actividades tales como cuantificar, dimensionalizar, asignar coordenadas, categorizar, simbolizar, generalizar y sistematizar objetos relevantes, relaciones, patrones, acciones y regularidades.

Las MEAs generalmente son simplificaciones de problemas científicos o tecnológicos que requieren la aplicación de las matemáticas. Por ejemplo, el problema de determinar algunas características de los dinosaurios, a partir de sus huellas, encontradas como fósiles, se simplificó para dar origen a una MEA denominada El problema de pie grande (Lesh y Doerr, 2003). Otro caso es el de un problema de ingeniería aeronáutica orientado a evaluar la seguridad o efectividad de los aviones, el cual se simplificó y adaptó como una MEA denominada El problema del avión de papel (Lesh y Doerr, 2003).

Esencialmente, la aportación de la perspectiva de modelos y modelación que retomamos para estructurar nuestra perspectiva de resolución de problemas, consiste en retomar la definición de modelo propuesta por Lesh, ya que diversas producciones que elaboran los estudiantes, al resolver problemas, son modelos, pero generalmente no se les llama así en el contexto de resolución de problemas.

3. Fundamentos de nuestra aproximación a la resolución de problemas como perspectiva didáctica

Considerando a las matemáticas como la Ciencia de los Patrones, el aprendizaje de la disciplina se entiende en términos de poner en práctica los elementos esenciales del pensamiento matemático, entre los que se encuentra operar con los objetos matemáticos, con la finalidad de identificar patrones y regularidades, realizar observaciones, formular conjeturas y demostrarlas, así como comunicar resultados y formular preguntas. En particular, es importante que los estudiantes desarrollen una actitud inquisitiva (Santos-Trigo, 2014). En este proceso tienen la oportunidad de comunicar resultados y formular nuevos problemas o interrogantes (NCTM, 2000). En este sentido, nuestra aproximación de resolución de problemas consiste en una perspectiva de instrucción basada en el descubrimiento. Además, consideramos importante que los estudiantes puedan utilizar eficientemente el conocimiento que construyen al resolver problemas (Santos-Trigo, 2014), y durante este proceso reflexionen ampliamente sobre los conceptos, problemas y estrategias de solución.

Bajo estas consideraciones, Santos-Trigo (2014) argumenta que aún tareas consideradas rutinarias, pueden ser un medio o vehículo importante para promover un aprendizaje con entendimiento. En otras palabras, cuando se problematiza el proceso de aprendizaje; es decir, cuando se formulan preguntas relevantes sobre los objetos involucrados en una situación problemática, las tareas rutinarias pueden transformarse en trampolines que promuevan el entendimiento matemático. Al formular preguntas, los estudiantes tienen la oportunidad de transformar los enunciados iniciales de un problema, en actividades que demanden el uso de diversos contenidos y procesos matemáticos, la utilización de diversas formas de representación, la búsqueda de relaciones y el uso de diferentes formas de justificación para sustentar y comunicar resultados.

Además de promover el desarrollo de los elementos fundamentales del pensamiento matemático, como objetivo de aprendizaje central, en una aproximación de resolución de problemas también se busca que los estudiantes desarrollen un aprendizaje con entendimiento de las ideas matemáticas, lo cual involucra reflexionar sobre las conexiones entre objetos, ideas o procedimientos propios de la actividad matemática. El desarrollo de entendimiento es un proceso gradual y dinámico que se va robusteciendo en función de la necesidad de responder y resolver cuestionamientos que emerjan dentro y fuera de una comunidad de aprendizaje en la que, a través de la reflexión y comunicación de ideas, se construyen significados compartidos por los integrantes de ésta (Santos-Tigo, 2014, p. 23).

Desde la perspectiva de resolución de problemas que plantea Santos-Trigo (2014), y que nosotros retomamos, aprender matemáticas se relaciona con la participación activa del estudiante en la estructuración de relaciones entre conceptos o resultados matemáticos, y ubica a esta disciplina como un cuerpo dinámico de conocimientos en constante expansión.

Los estudiantes participan activamente en el desarrollo de ideas matemáticas, al descubrir o re-descubrir relaciones que se expresarán y justificarán empleando un lenguaje matemático. Los problemas son planteados tomando como eje un proceso inquisitivo, y el aprendizaje se relaciona con la práctica de los matemáticos al desarrollar la disciplina. Es decir, el estudiante aprende matemáticas al estar inmerso en un medio similar al de los matemáticos profesionales cuando hacen matemáticas.

En términos de resolución de problemas, el eje rector no es cubrir una lista amplia de contenidos, sino centrar el aprendizaje en las ideas fundamentales del programa de asignatura. El propósito general de una instrucción basada en la resolución de problemas no es equipar a los estudiantes con un bagaje extenso de contenidos, estrategias y habilidades, sino permitirles explorar situaciones problemáticas por sí mismos. El valor de las estrategias, habilidades y procesos radica en que favorecen en el estudiante una forma flexible e independiente de pensar (Santos-Trigo, 2014).

En la perspectiva de resolución de problemas que adoptamos, el objetivo fundamental de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es que el estudiante se responsabilice de su propio aprendizaje. Es decir, desarrolle una autonomía en cuanto a su relación directa con su instructor (Santos-Trigo, 2014, p. 103).

“Si el aprendizaje de las matemáticas refleja en alguna medida, la invención de las matemáticas, debe haber algún lugar para el guessing, para la inferencia plausible” (Polya, 1954, p. vi). Esta cita de Polya sintetiza la similitud entre el aprendizaje matemático y el desarrollo de la disciplina.

4. Características del proceso de instrucción

Las actividades en el salón de clase debieran reflejar en cierta medida, prácticas análogas a las llevadas a cabo por los matemáticos profesionales al generar nuevo conocimiento disciplinar. En este sentido, las tareas y el ambiente de aprendizaje deben aportar elementos esenciales para que los estudiantes desarrollen habilidades similares a las que los matemáticos profesionales ponen en práctica en su quehacer cotidiano. Para tal fin, la resolución de problemas es una alternativa en donde una comunidad de aprendizaje busca diferentes formas de resolver una situación problemática y reconocen la relevancia de justificar sus respuestas mediante diferentes tipos de argumentos. La meta no es sólo reportar una respuesta, sino identificar y contrastar diferentes maneras de explorar, representar, resolver el problema y comunicar los resultados (Santos-Trigo, 2008).

Resolver un problema en esta perspectiva, lleva aparejado el formular y extender a nuevos problemas. Esto con la finalidad de establecer conexiones para estructurar un entendimiento más robusto. Las imágenes mentales que los estudiantes elaboran permiten dar sentido a los conceptos o ideas, al permitirles organizar y reflexionar sobre sus conocimientos previos y ligarlos con los nuevos conocimientos. Para transitar entre los distintos niveles de entendimiento es necesario conectar ideas al participar en una comunidad de aprendizaje en la que se discuten y construyen significados considerados-como-compartidos.

Analizando el ciclo básico para observar el desarrollo del entendimiento (Barrera-Mora y Reyes-Rodríguez, 2016), en la fase de acción, es donde el estudiante interactúa con el objeto, lo manipula e identifica las características importantes del mismo, representa la información de diferentes formas y le agrega atributos que le parecen importantes, es decir, representa la información. En la fase de observación, implica que se trabaje con la información que se obtuvo de interactuar con el objeto, es decir, el estudiante reflexiona y detecta si existen regularidades resultado de haber manipulado un objeto matemático, y si es posible detectar algún patrón. Pudiera interpretarse que estas etapas son en realidad una sola, sin embargo, no es posible obtener información y formular conjeturas si no se interactúa con el objeto.

Cuando el estudiante hace una abstracción, es porque ha identificado características esenciales del objeto de estudio, después de haber transitado por la etapa anterior, ha iniciado la etapa de formulación de conjeturas, las generalizaciones que produce se enuncian en términos matemáticos. Finalmente, la etapa de justificación de resultados implica que el estudiante argumente sus resultados y que los comunique a otros. El ciclo del entendimiento no necesariamente puede concluir en esta fase, es posible que al justificar resultados surjan nuevas preguntas que generen una nueva problemática.

Organizar un currículum, con base en la resolución de problemas, supone diversos retos, los problemas orientan el tipo de contenidos matemáticos que son necesarios para diseñar una o más rutas de solución, y dar un seguimiento a los contenidos sería una dificultad. Si se centra la atención en los problemas, los contenidos abordados podrían tener una gran amplitud, abarcando lo que actualmente se revisa en diferentes asignaturas.

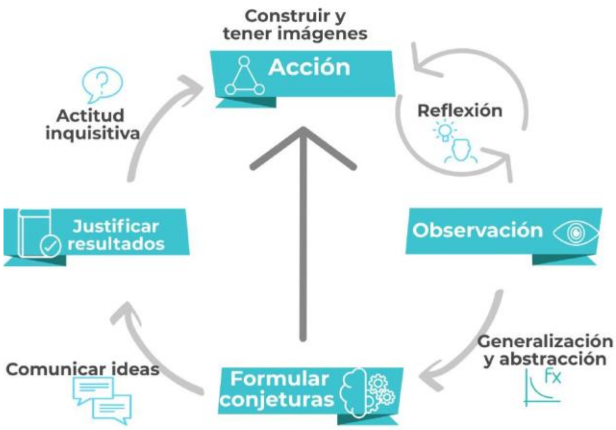

Figura 1: Ciclo para observar el desarrollo del entendimiento matemático.
Fuente. Téllez (2020, p.27).

5. Conclusión

Existen diferentes formas de caracterizar a la resolución de problemas como perspectiva didáctica, sin embargo consideramos que para que una caracterización sea útil en la práctica docente, es importante que retome aspectos que identifiquen el paralelismo existente entre el desarrollo de nuevo conocimiento disciplinar y el proceso de instrucción. Por otra parte, es importante que tal caracterización unifique las ideas de los pioneros en el desarrollo de esta perspectiva del aprendizaje, cuya opinión es de relevancia fundamental, ya que la mayoría de ellos conocían a profundidad lo que realmente significa hacer matemáticas, al ser todos matemáticos destacados en sus diversas áreas de investigación.

En esta línea de ideas, argumentamos que los profesores de matemáticas deben practicar, de manera sistemática, los principios básicos del pensamiento matemático, lo cual se logra resolviendo problemas. En otras palabras, los profesores de matemáticas deben ser resolutores de problemas matemáticos.

Agradecimientos

Queremos dejar patente la influencia de las ideas del Dr. Manuel Santos Trigo en la perspectiva que estamos presentando, dado que, tanto en publicaciones como en la formación de nuevos investigadores, han jugado un rol decisivo en la perspectiva de resolución de problemas que presentamos en este trabajo.

Referencias

August Kekulé. (2021, abril 26). En Wikipedia. https://es.wikipedia.org/wiki/August_Kekul%C3%A9

Barrera-Mora, F., & Reyes-Rodriguez, A. (2016). Designing technology-based tasks for enhancing mathematical understanding through problem solving. In L. Uden, D. Liberona and B. Feldmann (Eds.), *Learning technology for education in cloud: The changing face of education* (pp. 183-192). Switzerland: Springer.

Cai, J. Nie, B. (2007). Problem solving in Chinese mathematics education: research and practice. *ZDM–The International Journal on Mathematics Education*, 39, 459–473.

Camacho, M., Santos, M., (2004). La relevancia de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas. Números: *Revista de Didáctica de las Matemáticas* 58, 45-60.

Carpenter, T., & Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 19-32). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hadamard, J. (1945). *The psychology of the invention in the mathematical field*. Dover, New York.

Halmos, P. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly* 87, 519-524.

Halmos, P. (1994). What is teaching? *The American Mathematical Monthly* 101, 848-854.

Halmos, P., Moise, E. E., Piranian, G. (1975). The problem of learning to teach. *The American Mathematical Monthly* 82, 466-476.

Hamilton, E., Lesh, R., Lester, F., Yoon, C. (2007). The use of reflection tools to build personal models of problem-solving. En Lesh, R., Hamilton, E., Kaput, J. J. (Eds.), *Fundations for the future in mathematics education. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah*, pp 349-364.

Hiebert, J., Carpenter, T., Fennema, E., Fuson, K., Wearne, D., Murray, H., Oliver, A. & Human, P. (1997). *Making Sense: Teaching and learning Mathematics with Understanding.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Kant, I. (1996). *Critique of Pure Reason.* Hackett Publishing Company: Indianapolis.

Lesh, R., Doerr, H. M. (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problems solving, learning and teaching.* Lawrence Erlbaum, Mahwah.

Lesh R., Zawojewski, J.S. (2007). Problem solving and modeling. En Lester F. K. Jr. (Ed.), *The second handbook of research on mathematics teaching and learning. Information*. Age Publishing, Charlotte, pp 763-804.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* NCTM, Reston.

Polya, G. (1954). *Induction and analogy in mathematics*. Princeton University Press, Princeton.

Polya, G. (1963). On learning, teaching and learning teaching. *The American Mathematical Monthly* 70, 605-619.

Polya G. (1973). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Princeton University Press, Princeton.

Santos-Trigo, M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En*: Memorias del seminario de Resolución de Problemas: 30 años después del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*.

Santos-Trigo, M. (2009). Innovación e investigación en educación matemática. *Innovación Educativa* 9(46), 5-13.

Santos-Trigo, M. (2014). Problem solving in mathematics education. En Lerman, S. (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, New York, pp. 496-501.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press, Orlando.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Schoenfeld, A. (2000). Purposes and Methods of Research in Mathematics Education. *Notices of the American Mathematical Society*, 47(6) pp. 641-649

Szetela, W. & Nicol, C. (1992). Evaluating Problem Solving in Mathematics. *Educational Leadership*, 49(8), pp. 42-45.

Téllez, J. L (2020). Relación entre el sentido numérico y pensamiento algebraico en bachillerato (Tesis de maestría no publicada). Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.